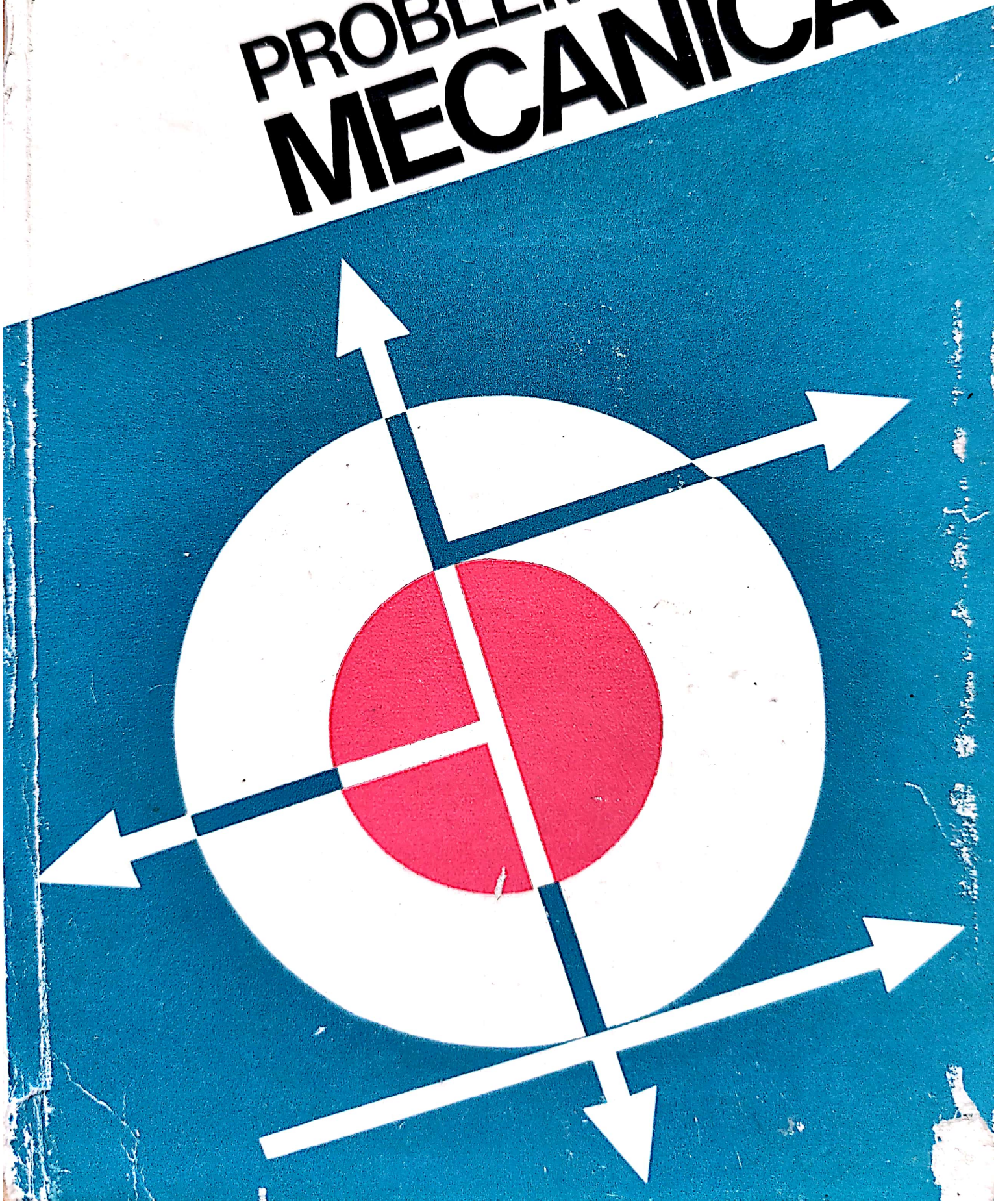
GABRIELA ȚIȚEICA

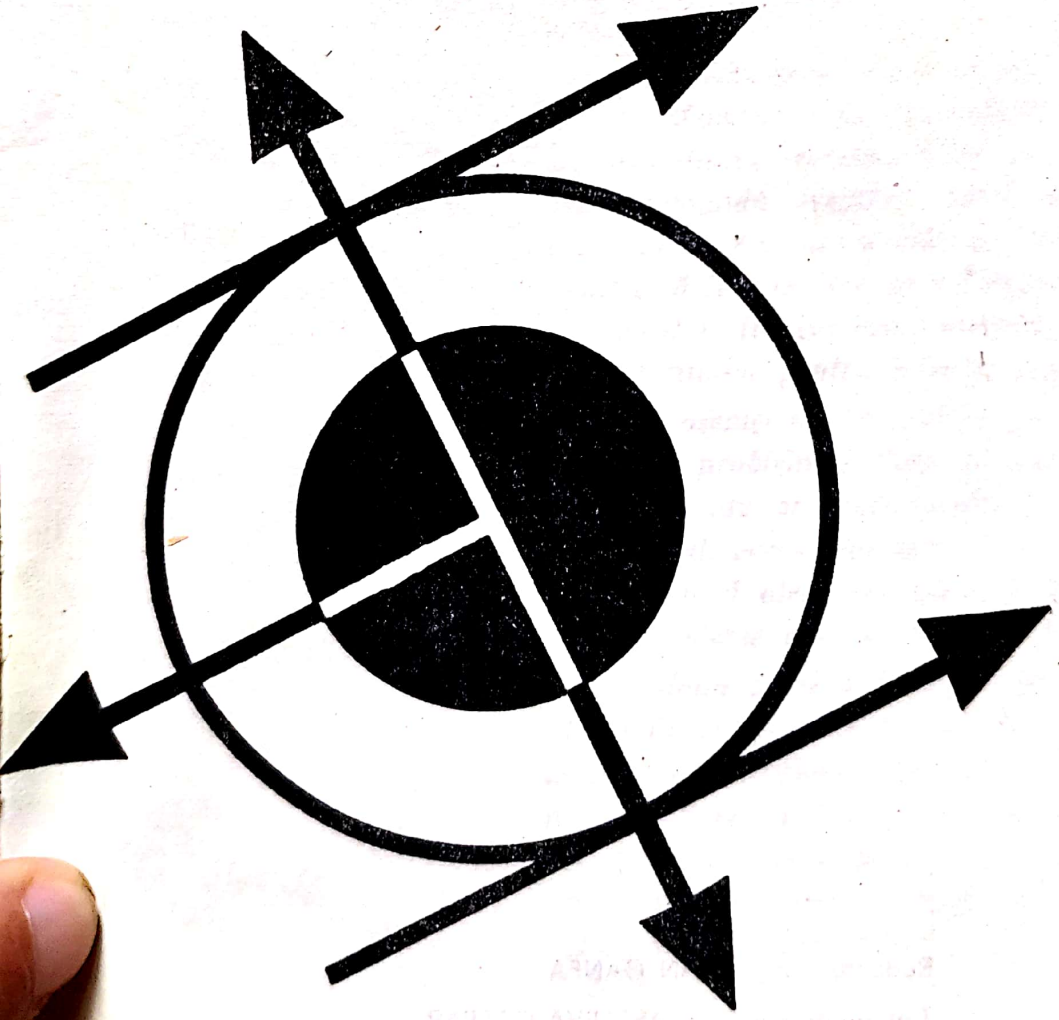
PROBLEME DE MECANICA



Scanned with OKEN Scanner

GABRIELA ȚIȚEICA

PROBLEME DE MECANICA



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

Referent științific : Conf. dr. ing. **MIHAIL ATANASIU**
– Institutul politehnic – București

Redactor : ing. IOAN GANEA
Tehnoredactor : PARASCHIVA GAȘPAR
Coperta : ALEXANDRU FRANCESC

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Lucrarea este compusă din două părți : (I) Statica, (II) Cinematica și Dinamica, avînd enunțurile problemelor grupate separat de rezolvările lor.

Gruparea separată a enunțurilor de rezolvările problemelor a fost concepută în scopul de a da posibilitate rezolvitorului să lucreze creativ (se recomandă aceasta), adică după urmărirea modului de rezolvare a cîtorva probleme din fiecare capitol să le abordeze pe celelalte fără urmărirea rezolvărilor în lucrare, urmînd să apeleze la aceasta numai pentru a se verifica.

De asemenea, în cadrul fiecărui capitol de enunțuri problemele fiind grupate după gradul de dificultate și introducerea de noi noțiuni, rezolvitorul poate parcurge întregul conținut al capitolului și alege cu ușurință pentru rezolvare acele probleme care îl interesează.

A doua parte a lucrării conține puține probleme de cinematică pură, cea mai mare parte din ele fiind probleme de Dinamică în care Cinematica apare ca ajutătoare la rezolvarea problemelor. Acest lucru e mai aproape de realitate, unde relațiile între elementele cinematice (accelerații, viteze, spațiu, timp) și cele dinamice (forțe, cupluri) există în toate cazurile.

Marea majoritate a problemelor (aproape în totalitate) sînt originale. Unele dintre ele au mai

Scanned with OKEN Scanner

multe figuri sau poziții pentru același enunț, fiind probleme date la lucrări scrise pentru studenți ; în acest mod, prezintă aceleași dificultăți la rezolvare și totuși sînt independente unele de altele.

În lucrare s-au dat rezolvările complete astfel încît rezolvitorii să poată urmări deosebirile între diversele aspecte posibile ale aceleiași probleme.

Lucrarea se adresează studenților institutelor tehnice de învățămînt superior și este de un real folos cadrelor didactice, la pregătirea seminariilor, mai ales în cazul unor capitole de curs care de obicei nu sînt ilustrate prin probleme.

GABRIELA ȚIȚEICA

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Partea I
STATICA

	Pagini	
	Enunţuri	Rezolvări
1. Forţe concurente în plan	8	156
2. Forţe oarecare în plan	15	172
3. Articulaţii	21	183
4. Încastrări	33	203
5. Centre de greutate	41	214
6. Răsturnări, rostogoliri	44	218
7. Grinzi cu zăbrele	54	231
8. Metode grafice	58	237
9. Fire	62	245
10. Forţe în spaţiu	70	257
11. Frîne — maşini simple	73	262

Partea a II-a
CINEMATICA ŞI DINAMICA

1. Traiectorii, mişcări	77	268
2. Deplasări virtuale	79	275
3. Lucru mecanic — forţe de inerţie	84	281
4. Forţe centrifuge	92	298
5. Rotaţii, rostogoliri	101	314
6. Moment cinetic, giroscop	108	332
7. Ciocniri	111	334
8. Parabola	120	353
9. Presiuni	126	364
10. Forţe iniţiale	130	372
11. Oscilaţii	135	380
12. Mişcări relative	142	391
13. Compuneri de mişcări, centru instantaneu	146	399
14. Ecuaţiile lui Lagrange	149	408
15. Linii echipotenţiale, potenţial, forţe de atracţie, mişcări pe orbite	153	414
Bibliografie		421

ENUNȚURI

Scanned with OKEN Scanner

Partea I

STATICA

Capitolul I

FORȚE CONCURENTE ÎN PLAN

1. a) Un fir este suspendat în două puncte A și B. Pe el poate luneca fără frecare un inel de greutate G, de care e prins un alt fir, care trece peste un cui D. De capătul firului atîrnă o greutate P (fig. I.1).

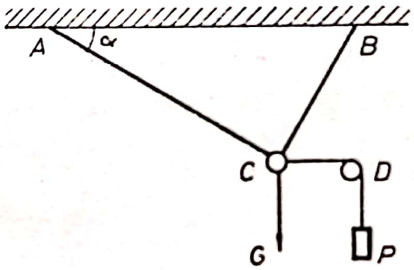


Fig. I.1

Se cere greutatea P pentru ca firul să se aşeze sub unghi drept formînd $\sphericalangle \alpha$ în A și $\sphericalangle (90 - \alpha)$ în B cu orizontala.

b) Se presupune că cele două porțiuni de fir AC și BC sînt legate separat de C. În acest caz nu mai este necesară greutatea P.

Se cer tensiunile T_1 în AC și T_2 în BC.

2. a) Două pendule identice (firele AB) sînt ținute sub $\sphericalangle \alpha$ prin firul punctat, care prinde greutățile G la capete și trece peste două inele fără greutate proprie B. Să se determine $\sphericalangle \alpha$. Discuție.

b) Să se rezolve aceeași problemă presupunînd că inelele au greutatea P (fig. I.2).

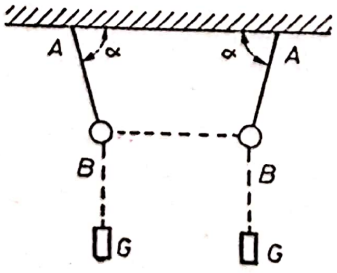


Fig. I.2

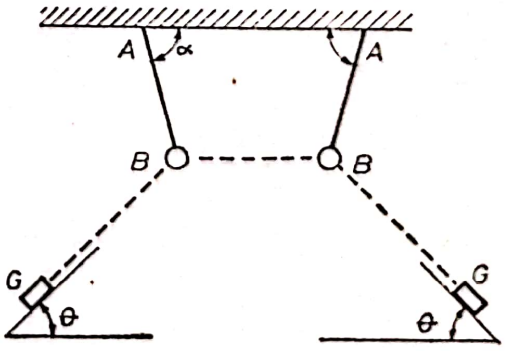


Fig. I.3

3. Două pendule identice AB sînt ţinute sub $\sphericalangle \alpha$ prin firul punctat care prinde greutăţile G la capete. Firul trece prin inelele B de greutate P, iar greutăţile G sînt situate pe plane înclinate sub $\sphericalangle \theta$. Se cere $\sphericalangle \alpha$ şi tensiunea T în firul pendulelor (fig. I.3).

4. a) Pendulele AB sînt ţinute sub $\sphericalangle \alpha$ dat de firul punctat care susţine greutăţi G date (fig. I.4, *a*). Se cere $\sphericalangle \theta$ şi tensiunile în fire (inelele nu au greutate proprie).

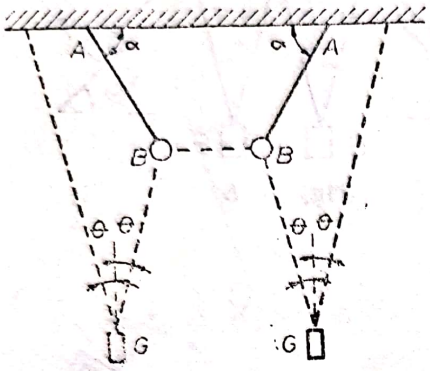


Fig. I.4, *a*

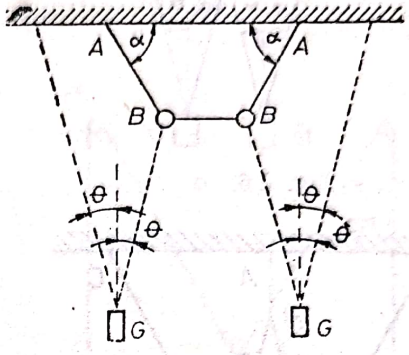


Fig. I.4, *b*

b) $ABBA$ este un fir continuu, iar firele punctate susţin greutăţile sub $\sphericalangle \theta$. Se cere $\sphericalangle \theta$ pentru $\sphericalangle \alpha$ dat şi tensiunile: T în firul $ABBA$ şi T_1 în firele punctate. Inelele B care lunecă pe firul continuu nu au greutate proprie (fig. I.4, *b*).

5. a) Două greutăţi G_1 şi G_2 sînt legate cu un fir BC între ele şi cu alte fire AB respectiv CD. De firul CD atîrnă o greutate P (fig. I.5, *a*).

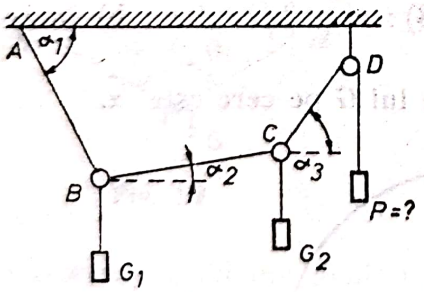


Fig. I.5, *a*

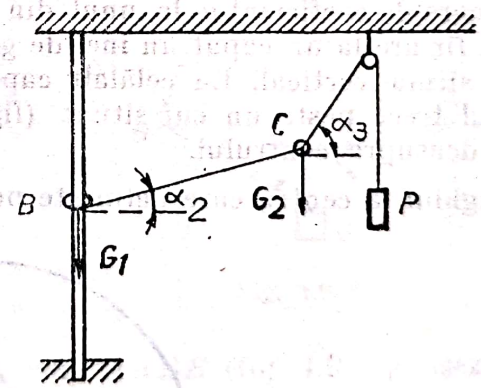


Fig. I.5, *b*

Se cer: greutatea P şi unghiul α_3 la echilibru (unghiurile α_1 şi α_2 fiind date).

b) Aceeaşi problemă, dar se presupune că B lunecă pe o bară fixă verticală (G_1, G_2, α_2 date), se cere P şi $\sphericalangle \alpha_3$ (fig. I.5, *b*).

6. a) Un fir susţine două greutăţi G ca în figura I.6, *a*, care pot luneca pe fir. Un alt fir AB ridică sistemul astfel încît se obţine $\sphericalangle \alpha$. Să se determine tensiunile T_0 în firul AB şi T în firul pe care lunecă greutăţile.

Scanned with OKEN Scanner

b) Se cere P (fig. I.6, *b*) pentru a avea același $\sphericalangle \alpha$ ca la cazul (*a*).

c) În problema (*a*) se presupune că G nu lunecă pe fir ci este legat de două fire separate (CG înclinat cu $\sphericalangle \varphi$ și GB înclinat cu $\sphericalangle \alpha$ față de verticală). Se cer tensiunile T_1 și T_2 din aceste porțiuni de fir (fig. I.6, *c*).

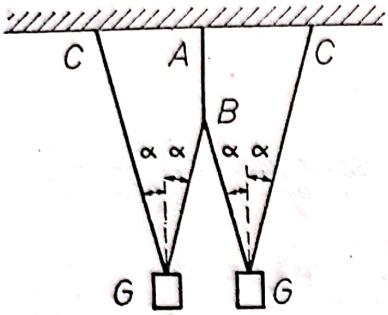


Fig. I.6, *a*

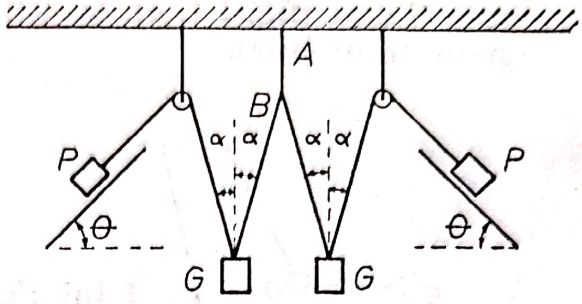


Fig. I.6, *b*

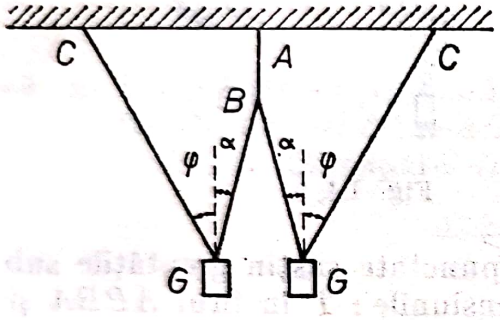


Fig. I.6, *c*

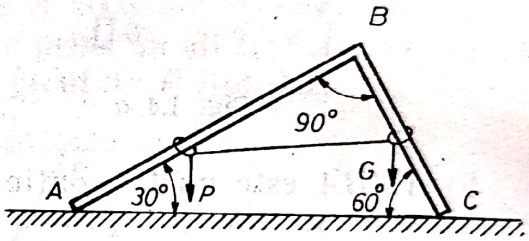


Fig. I.7

7. Pe bara ABC curbată sub 90° ca în figura I.7, lunecă două inele de greutate P respectiv G, unite prin firul de lungime l. Se cere $\hat{\theta} = ?$ între fir și bara AB la echilibru și tensiunea $T = ?$ în fir în cazul fără frecare sau cu frecare de coeficient μ la unul din inele.

8 Un fir are la un capăt un inel de greutate G care poate luneca pe un cerc de sîrmă vertical. La celălalt capăt este o greutate P. Se cere P cînd firul trece peste un cui situat (fig. I.8) : a) sub centru ; b) în centru ; c) deasupra centrului.

Unghiul la centru care definește poziția lui G pe cerc este $\hat{\alpha}$.

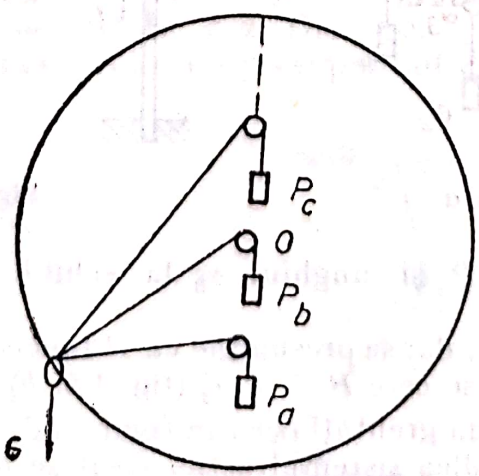


Fig. I.8

9. a) Într-un plan vertical sînt bătute trei cuie ABB (fig. I.9, *a*). Peste ele este trecut un fir care are ambele capete prinse de greutatea G. Firul formează unghiurile $\hat{\alpha}$ și $\hat{\theta}$ cu verticala. Să se determine presiunea pe cuie.

b) Cuiele B, A, B sînt în vîrfurile unui triunghi echilateral $AB = BB$ (fig. I.9, *b*).

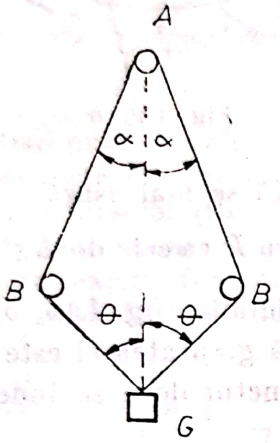


Fig. I.9, *a*

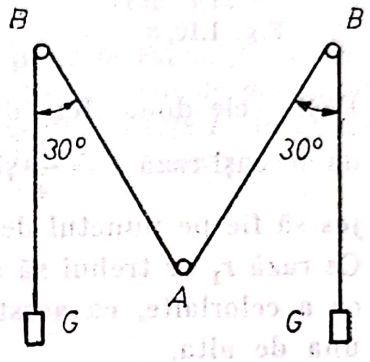


Fig. I.9, *b*

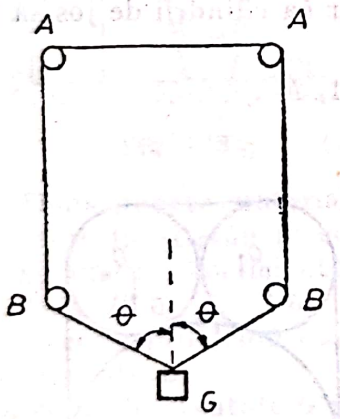


Fig. I.9, *c*

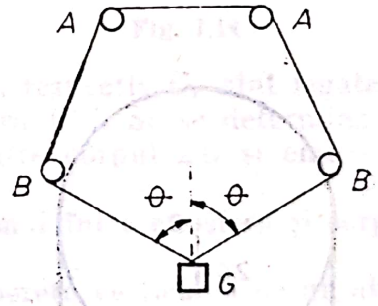


Fig. I.9, *d*

c) Aceeași problemă pentru patru cuie $AABB$ (fig. I.9, *c*) așezate în pătrat ($AB = AA$) ($\hat{\theta}$ dat).

d) Aceeași problemă pentru patru cuie $AABB$ (fig. I.9, *d*) formînd o jumătate de hexagon regulat ($BA = AA$) ($\hat{\theta}$ dat).

10. a) Emisfera de greutate 3 G și rază R are în interiorul ei două sfere mici de greutate G, raza $r = \frac{R}{4}$. Emisfera este susținută de două reazeme A și B, reacțiunile lor făcînd $\measuredangle \theta$ cu verticala. Să se determine grafic și analitic presiunea N_0 între sfere, presiunile N_1, pe emisferă, reacțiunile R_A și R_B (fig. I.10, *a*).

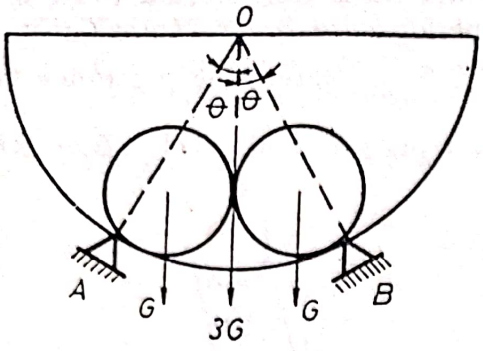


Fig. I.10, *a*

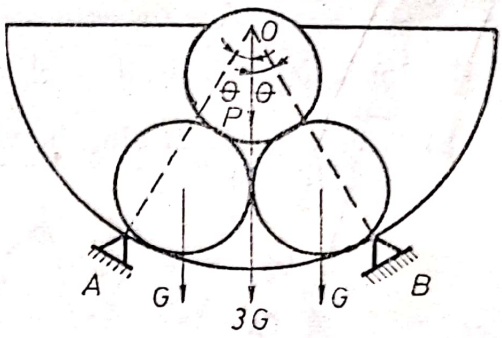


Fig. I.10, *b*

b) Peste cele două sfere din problema precedentă se mai așază o sferă de aceeași rază $r = \frac{R}{4}$ și de greutate P. Se cere P ca cele două sfere de jos să fie pe punctul de a se îndepărta una de alta (fig. I.10, *b*).

c) Ce rază r_1 ar trebui să aibă sfera de sus, dacă greutatea ei este tot G ca a celorlalte, ca acestea două să fie pe punctul de a se îndepărta una de alta.

11. a) Un cilindru de greutate $2G$, rază $2R$ este situat în contact cu doi cilindri (G, R). Sistemul este legat cu un fir și situat pe o masă ca în figura I.11, *a*. Să se determine forța din fir ca cilindrii de jos să fie pe punctul de a se îndepărta unul de altul.

b) Aceeași problemă ca la *(a)* dar figura I.11, *b*.

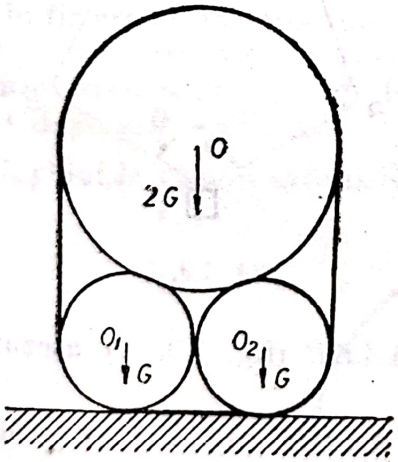


Fig. I.11, *a*

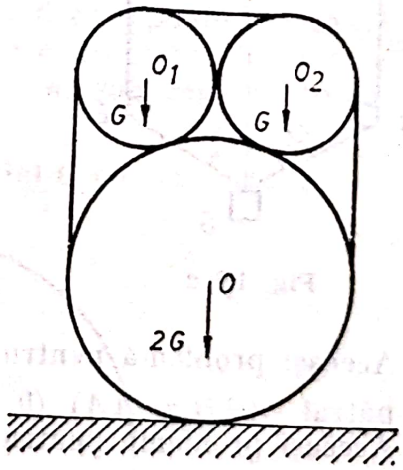


Fig. I.11, b

12. a) Trei cilindri egali (G, R) așezați ca în figura I.12, *a* pe o masă orizontală sînt legați cu un fir. Se cere tensiunea T în fir cînd cei doi cilindri de jos sînt pe punctul de a se îndepărta unul de altul.

b) Aceeași problemă dar figura răsturnată (fig. I.12, *b*).

Scanned with OKEN Scanner

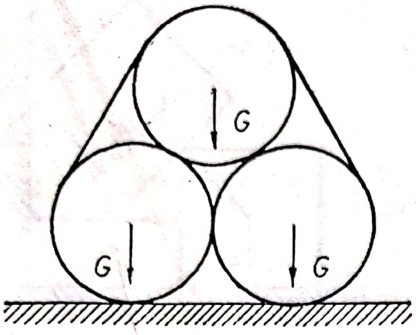


Fig. I.12, *a*

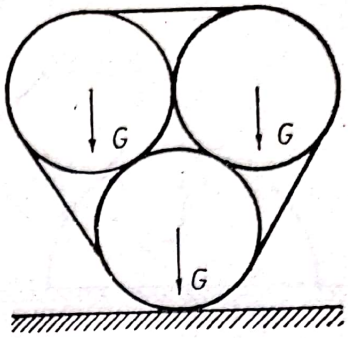


Fig. I.12, *b*

13. Într-o presă de ulei, o piesă A în formă de pană se introduce cu ajutorul unei forțe P între alte două piese B. Nu se ține seama de greutatea proprie a pieselor (fig. I.13). Să se determine grafic forțele $\bar{F}$ de presiune la care sînt supuse semințele din spațiile C cînd între piese :

a) nu există frecare ;

b) există frecare, de unghi φ dat.

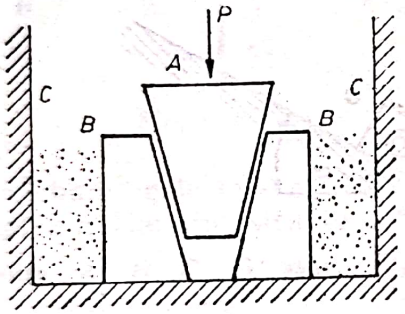


Fig. I.13

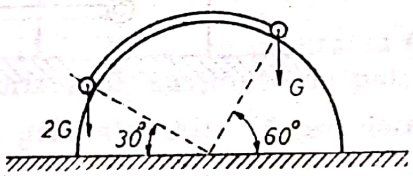


Fig. I.14

14. a) Două puncte materiale de greutate $2G$, respectiv G, sînt legate printr-un fir și stau în echilibru ca în figura I.14. Să se determine grafic și analitic coeficientul μ de frecare între corpul $2G$ și emisfera de rază R.

b) Aceeași problemă dar frecarea este numai între emisferă și corpul de greutate G.

15. Un corp de greutate G se sprijină de un perete vertical și de un alt corp de greutate P legat cu un fir de perete. Se cere, la echilibru în poziția din figura I.15 ($\sphericalangle \alpha$ dat), care este tensiunea T în fir, grafic și analitic, în cazurile (a), (b), (c), (d). La cazurile (c) și (d) : $\alpha = 45°$.

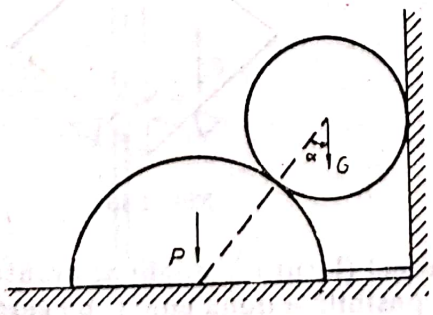


Fig. I.15, *a*

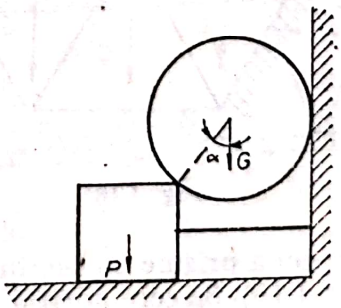


Fig. I.15, *b*

Scanned with OKEN Scanner

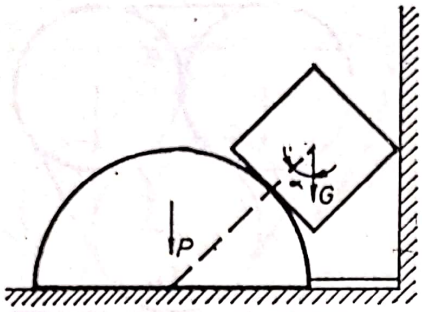


Fig. I.15, c

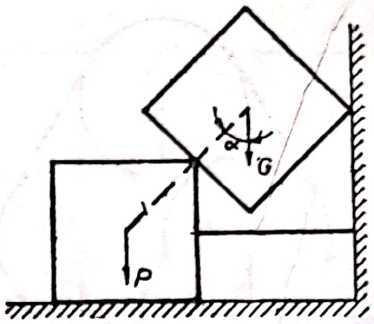


Fig. I.15, *d*

16. Două corpuri de greutate G respectiv P sînt situate pe două plane ca în figura I.16. Greutatea G de pe planul înclinat sub $\sphericalangle \alpha$ este cunoscută. Greutatea P de mărime necunoscută este situată pe planul orizontal. Corpurile sînt legate printr-o bară orizontală fără greutate proprie. Se cere P și forța F din bară, frecare fiind : a) numai la P (μ_P dat) ; b) numai la G (μ_G dat).

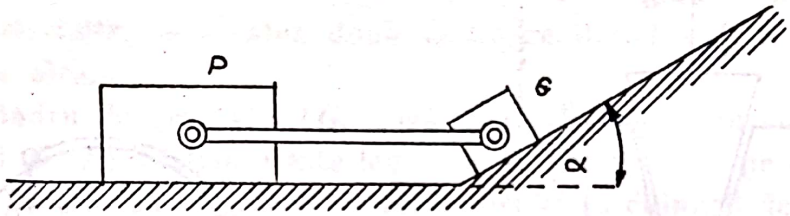


Fig. I.16

17. Să se determine în problema de mai sus greutatea P cînd există frecare $\mu_G = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ și frecare μ_P.

18. Trei prisme cu secțiune triunghi echilateral de latură l și greutate G sînt împachetate ca în figura I.18. Se cere forța F ca să se scoată corpul de jos de sub celelalte în cazul :
a) fără frecare ; b) cu frecare ; grafic și analitic.

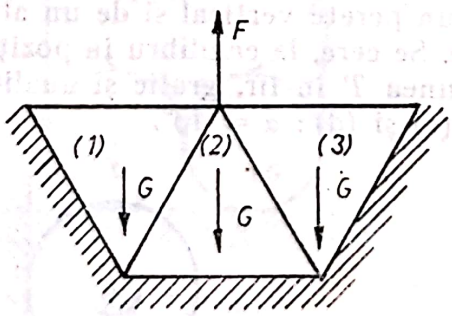


Fig. I.18

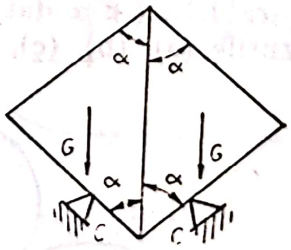


Fig. I.19

19. Fie două prisme cu secțiune triunghi isoscel (latura l, unghi α, greutate G) (fig. I.19). Se cere poziția cea mai de jos posibilă a două cuie C pe care să se rezeme prismele cînd sînt pe punctul de a se îndepărta una de alta.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

FORȚE OARECARE ÎN PLAN

1. Fie o bară BC de greutate G, lungime l, rezemată în A (fig. II.1). Se cere forța F la echilibru în funcție de $BA = x$.

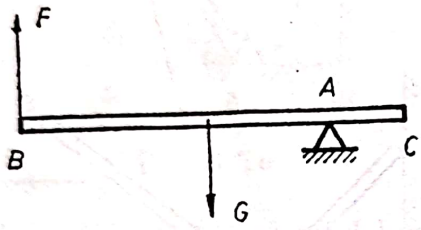


Fig. II.1

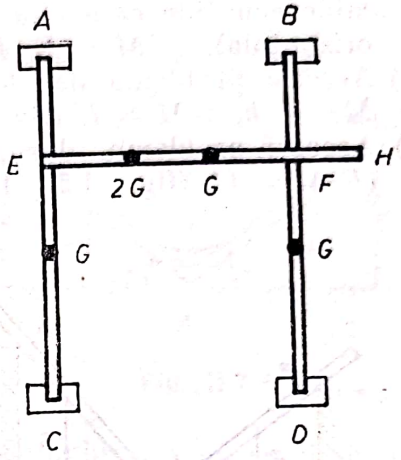


Fig. II.2

2. Trei bare egale se reazemă ca în figura II.2. Barele au greutatea G, lungimea l. Ele sînt situate într-un plan orizontal, susținute de patru reazeme, A, B, C, D. Bara EH are la $\frac{l}{4}$ o greutate $2G$. Să se determine reacțiunile R_A, R_B, R_C, R_D $\left(AE = BF = FH = \frac{l}{4},\ AB = CD = 3\frac{l}{4}\right)$.

3. Două bare egale de greutate G și lungime l sînt situate într-un plan orizontal. Bara AB este rezemată în A și în $C\left(BC = \frac{l}{8}\right)$. Rezemîndu-se pe BA în B este cealaltă bară DE. Cît poate fi DB pentru ca bara DE apăsată cu forța F verticală în D, să fie pe punctul de răsturnare în același timp cu bara AB (fig. II.3).

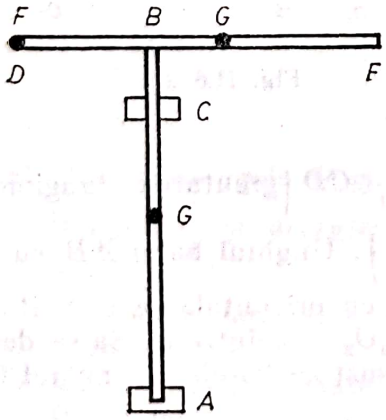


Fig. II.3

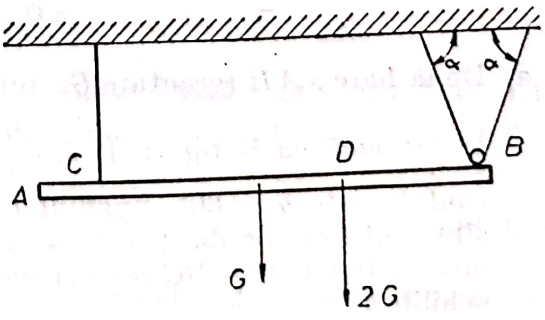


Fig. II.4

4 Fie bara AB de greutate G, lungime l, susținută în $C\left(AC=\frac{l}{8}\right)$ de un fir vertical și în B de un fir care trece printr-un inel B (fig. II.4). Se cere $x = DB$ unde trebuie pusă o greutate $2G$ ca tensiunile în firul vertical și în cel care trece prin inel să fie egale.

5. a) Două bare: AC (greutate P, lungime a) și AE (greutate G și lungime l) se reazemă în B respectiv D pe două trepte de înălțime h_1 respectiv h_2 situate la distanță L una de alta (fig. II.5, a). Să se determine ecuațiile care dau poziția barelor (unghiurile α, respectiv θ cu orizontala). ($KM = L$, $KB = h_1$, $MD = h_2$).

b) Aceeași problemă dar bara AC se reazemă de un perete vertical: $MD = h$, $KM = L$ (fig. II.5, b).

c) Aceeași problemă, dar ambele bare se reazemă de pereți verticali ($K\,M = L$) (fig. II.5, c).

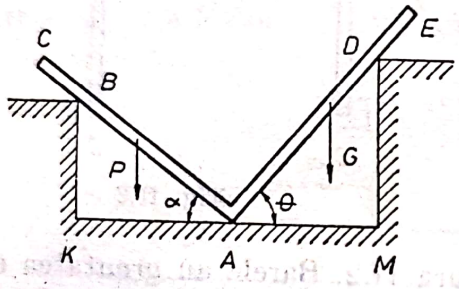


Fig. II.5, a

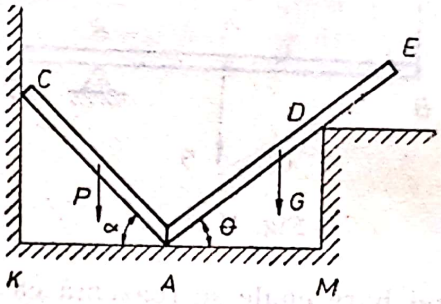


Fig. II.5, b

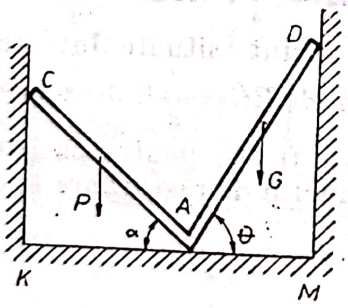


Fig. II.5, c

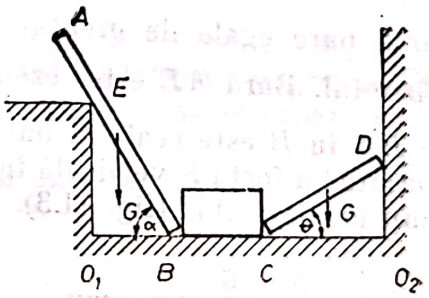


Fig. II.6, a

6. a) Două bare: AB (greutate G, lungime l) și CD (greutate G, lungime $\frac{l}{2}$) se reazemă ca în figura II.6, a $\left(EA=\frac{l}{4}\right)$. Unghiul barei AB cu orizontala este $\alpha = 60°$, unghiul barei CD cu orizontala este θ. Barele sînt susținute de doi pereți la distanța $O_1O_2 = l$, între ei. Să se determine lățimea $x = BC$ a unei piese care susține barele și unghiul θ la echilibru.

b) Aceeași problemă dar ambele bare se reazemă pe pereți verticali.

Scanned with OKEN Scanner

7. a) Sfera de greutate G, rază $R = \frac{l}{4}$ se reazemă pe două bare AB. Acestea se reazemă între ele, pe sol şi pe două trepte ca în figura II.7, *a*. Barele au greutate P şi lungime l. Se cere G ca barele să fie pe punctul de a se despărţi. Distanţa între cei doi pereţi verticali este $O_1O_2 = l$, înălţimea treptelor $CO_1 = CO_2 = h$.

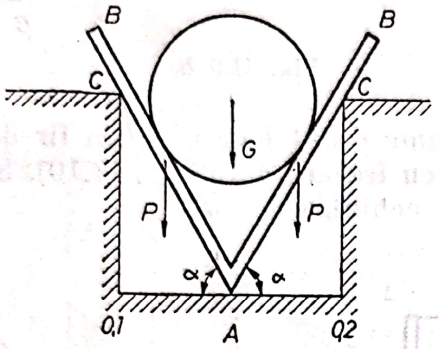


Fig. II.7, *a*

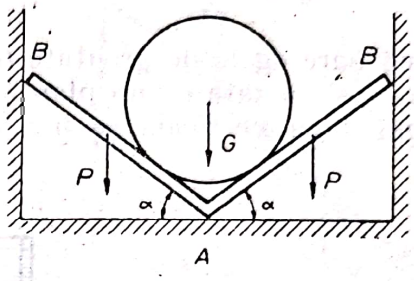


Fig. II.7, *b*

b) Aceeaşi problemă cînd barele care fac unghiuri α cu solul se reazemă pe pereţii verticali (fig. II.7, *b*).

8. Fie bara de greutate G, lungime l ţinută în echilibru sub 60° de un fir pe care poate luneca o greutate P. Se cere P ca firul să facă 30° cu orizontala (fig. II.8).

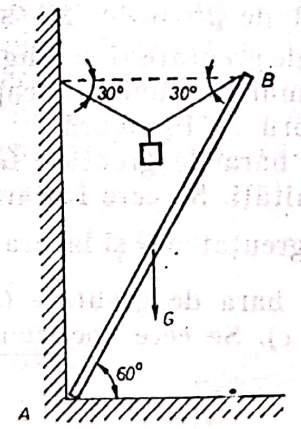


Fig. II.8

9. a) Două bare egale de greutate G, lungime l sînt legate prin firul AA de lungime $\frac{l}{2}$ şi aşezate în echilibru peste stîlpul de lăţime $BB = l$ (fig. II.9, *a*).

Să se determine unghiul θ al barelor cu verticala la echilibru şi tensiunea în fir.

b) Unde trebuie aşezate reazemele C ale celor două bare legate cu un fir pe care lunecă greutatea P pentru ca la echilibru atît barele cît şi firele să facă 60° cu verticala (fig. II.9, *b*). Se cere P şi $AC = x$. *Discuţie.*

Scanned with OKEN Scanner

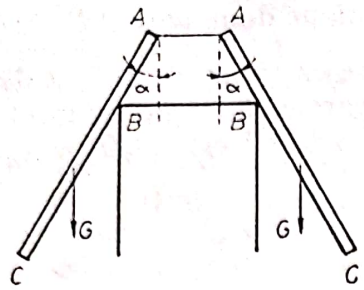


Fig. II.9, *a*

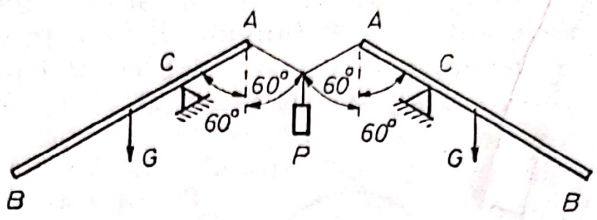


Fig. II.9, *b*

10. Două bare egale de greutate G şi lungime l sînt legate cu un fir de lungime a şi aşezate pe un plan orizontal cu frecare dată (fig. II.10). Sub ce unghi θ cu verticala se pot aşeza la echilibru?

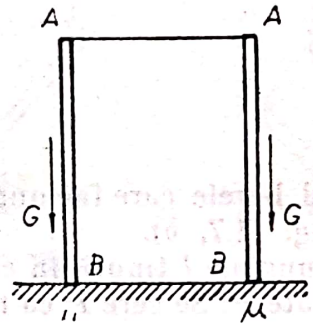


Fig. II.10

11. a) Într-un cilindru culcat de greutate $2G$ şi rază R este aşezată ca în figura II.11, *a* o bară de greutate G şi lungime $l = R\sqrt{2}$. Se cere coeficientul de frecare numai la unul din capetele barei (μ_C sau μ_D) ca bara să stea la echilibru ca în figură.

b) Aceeaşi problemă dar bara de greutate G, lungime a se află într-un cub rezemat la extremităţi. Se cere frecarea (μ_C sau μ_D) şi reacţiunile R_A şi R_B cubul avînd greutatea G şi latura l, iar $CB = \frac{l}{2}$ (fig. II.11, *b*).

c) Aceeaşi problemă dar bara de greutate G are lungime egală cu raza cilindrului (fig. II.11, *c*). Se cere coeficientul de frecare, fie în A, fie în B.

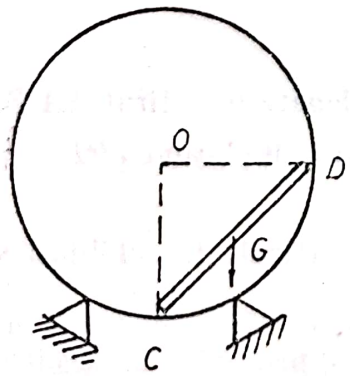


Fig. II.11, *a*

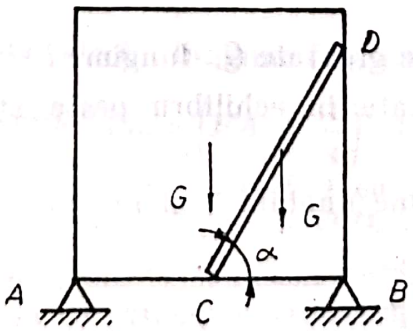


Fig. II.11, *b*

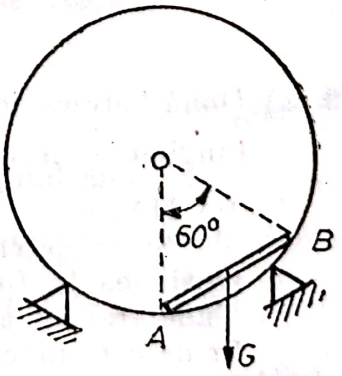


Fig. II.11, *c*

Scanned with OKEN Scanner

12. De un cub de latură l și greutate $2G$ se reazemă două bare: AB (de greutate G, lungime $2l$ înclinată sub 60°) și CD (de greutate $\frac{G}{4}$, lungime l, rezemată la jumătatea laturii cubului). Se cere la echilibru coeficientul μ la baza cubului, μ_A și μ_D între bare și sol ca să nu alunece (fig. II.12).

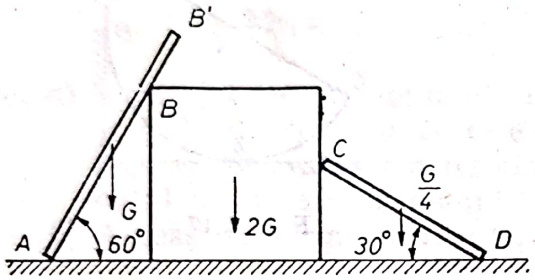


Fig. II.12

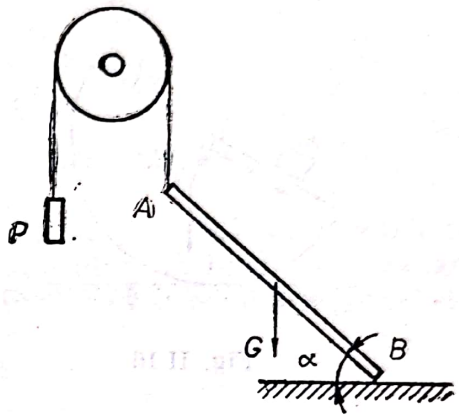


Fig. II.13

13. Să se determine greutatea P pentru echilibrul barei de greutate G, lungime l, sub $\hat{\alpha}$ (fig. II.13):
a) fără frecare în B; b) cu frecare în B.

14. a) O bară în unghi drept unde porțiunile sînt AB (greutate $2G$, lungime $2\,l$) și BC (greutate $4G$, lungime $4l$) e prinsă prin două inele de o bară orizontală DE de lungime $10\,l$ ($DA = AB = 2\,l$; $BE = 6l$) și greutate $10\,G$. Să se determine reacțiunile R_D și R_E (fig. II.14).
b) Se înlătură unul din inele. Să se determine poziția barei la echilibru (unghiul α al lui AB cu orizontala) și reacțiunile R_D și R_E în acest caz.

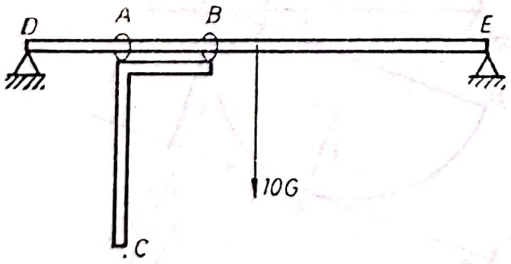


Fig. II.14

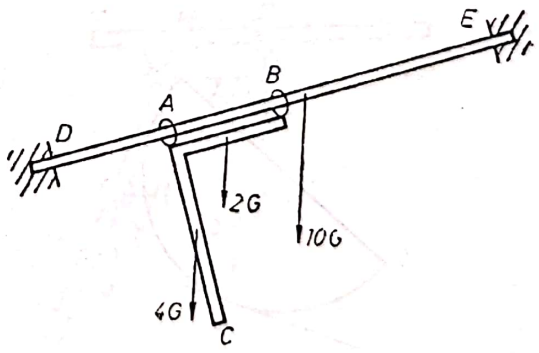


Fig. II.15

15. Pe o bară fixă DE e prinsă prin două inele bara cotită ABC dată în problema 14. Bara DE face $\neq 0$ cu orizontala. Frecare este la un singur inel ($\mu = ?$). Se presupune că s-a înlăturat inelul fără frecare. Se întreabă dacă frecarea (μ) calculată mai sus e suficientă pentru echilibru în noua poziție de echilibru (fig. II.15).

Scanned with OKEN Scanner

16. Pe o emisferă de greutate G şi rază R se aşază un punct material A de aceeaşi greutate G şi frecare de coeficient μ dat. Să se determine unghiul α faţă de orizontală cu care se aşază emisfera la echilibru ştiind că centrul C de greutate e la distanţa $OC = \frac{3R}{8}$ de O. Să se determine distanţa maximă $x = OA$ la care poate fi aşezat punctul material (fig. II.16).

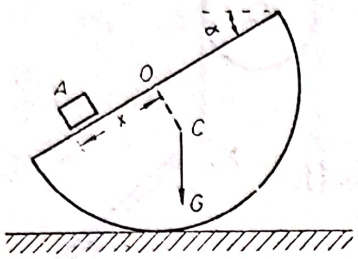


Fig. II.16

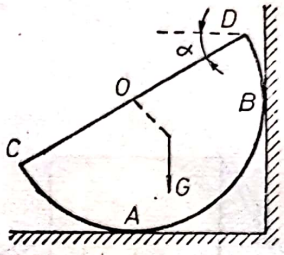


Fig. II.17

17. Un semicilindru de greutate G şi rază R se reazemă de sol şi de un perete vertical (fig. II.17). Diametrul CD are $\hat{\alpha}$ cu orizontala şi frecare numai în A. Se cere :

a) μ_A coeficientul de frecare ca funcţie de $\hat{\alpha}$; b) Dacă μ_A nu este suficient pentru acest $\hat{\alpha}$ se cere μ_B pentru acest $\hat{\alpha}$.

Exemplu numeric : Fie $\mu_A = \frac{1}{\pi}$ şi se cere ca α să fie dat de $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Să se determine μ_B.

18. Semicilindrul de greutate G şi rază R este aşezat pe planul înclinat sub $\hat{\alpha}$. Se cere frecarea ($\mu = ?$) între el şi plan, şi $\hat{\theta} = ?$ unghiul diametrului BD cu orizontala (fig. II.18).

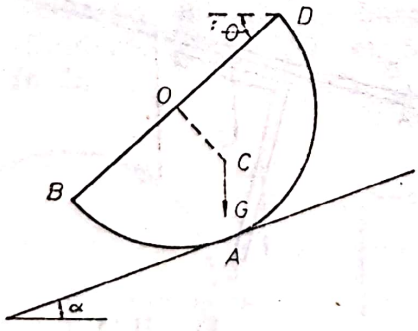


Fig. II.18

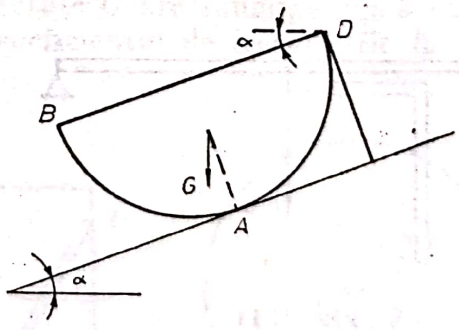


Fig. II.19

19. Pentru a avea diametrul BD paralel cu planul înclinat se prinde în D un fir perpendicular pe plan. Se cere tensiunea T în fir şi coeficientul de frecare μ cu planul (fig. II.19).

Scanned with OKEN Scanner

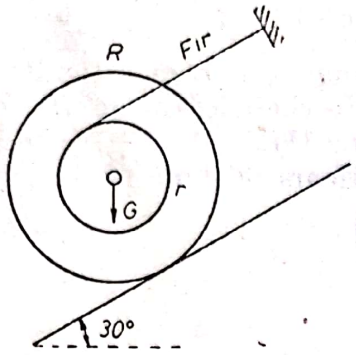


Fig. II.20, *a*

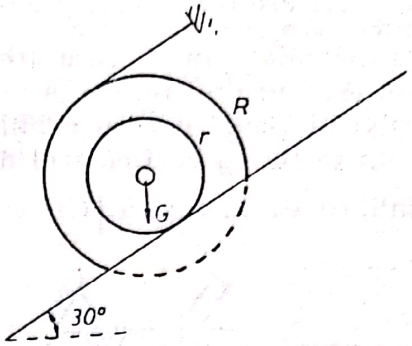


Fig. II.20, *b*

20. a) Un troliu format din două roţi solidare unde $R = 0{,}7$ m, $r = 0{,}5$ m şi greutate $G = 20$ N este situat pe un plan înclinat cu $\alpha = 30°$ (fig. II.20, *a*). Să se determine forţa în fir $T = ?$ la echilibru şi coeficientul de frecare cu planul înclinat μ.

b) Aceeaşi problemă pentru figura II.20, *b*.

Capitolul III

ARTICULAŢII

1. Bara AB de greutate G şi lungime l e simplu rezemată în A şi se reazemă în C $\left(CB = \frac{l}{4}\right)$ de bara CD de greutate G şi lungime l articulată în E $\left(DE = \frac{l}{4}\right)$. Se cere coeficientul de frecare μ_E la articulaţia E pentru echilibru ca în figura III.1 ($\hat{\alpha}$ dat).

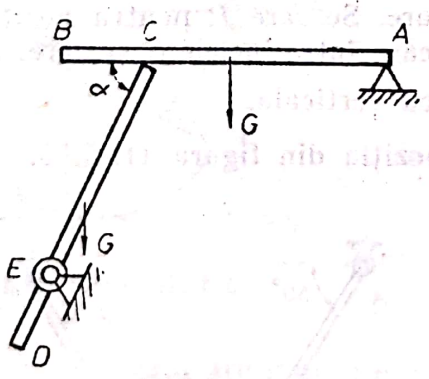


Fig. III.1

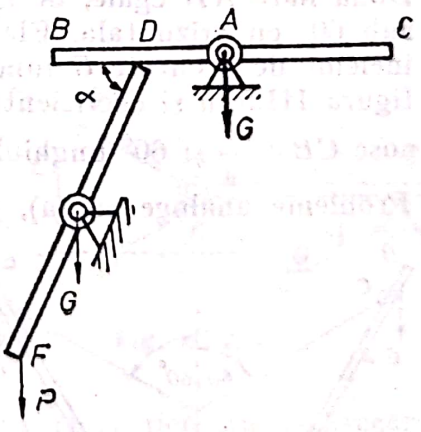


Fig. III.2

2. Cele două bare din figura III.2 au greutate G, lungime l şi sînt articulate la mijloc. Bara orizontală are frecare (μ_A dat) la articulaţia A de rază r_A. Ce greutate P poate fi prinsă la extremitatea barei înclinate ca să rămînă în echilibru (la articulaţia E este frecare, μ_E dat, r_E dat $\ast$ α dat).

Scanned with OKEN Scanner

3. Bara AB are lungime l, greutate G, se reazemă la $CB = \frac{l}{4}$ de bara verticală articulată în E, care are greutate G, lungime l, raza articulației r_E. Bara AB nu are frecare la articulație. Se cere coeficientul de frecare μ_E la articulația E pentru echilibru ca în figura III.3. Dacă $\mu_E = 0$ cît ar trebui să fie μ_A coeficientul de frecare în articulația A de rază r_A pentru echilibru ca în figură $\left(CE = \frac{l}{2},\ \sphericalangle\ \alpha \text{ dat}\right)$.

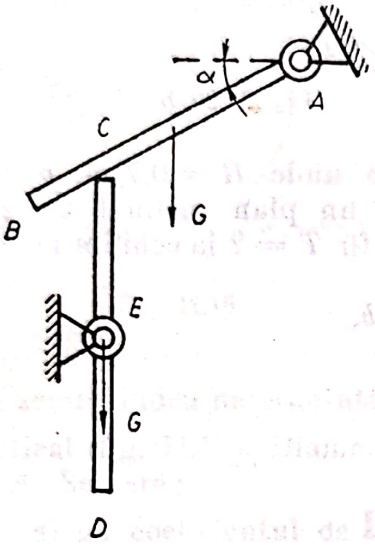


Fig. III.3

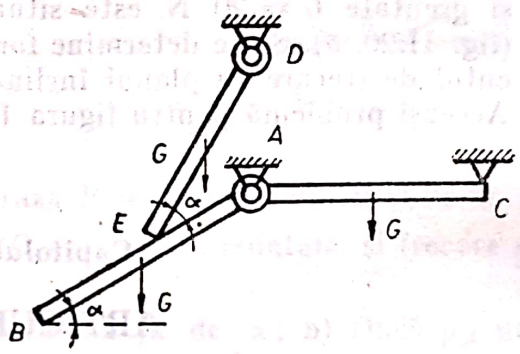


Fig. III.4

4. Bara ED are lungime l și greutate G, ea se reazemă la $EB = \frac{l}{4}$ pe bara cotită BAC articulată în A și rezemată în C ($AB = l$, $AC = l$ și fiecare din aceste porțiuni are greutate G). Să se determine reacțiunea la cuiul C (fig. III.4).

5. a) Două bare AB egale, de greutate $2G$ și lungime l, stau la echilibru sub 60° cu orizontala. Ele sînt susținute de un fir care cu ajutorul inelelor de greutate G lunecă pe bare. Se cere P pentru poziția din figura III.5, a și coeficientul de frecare între inelele G și bară. Se cunosc $CB = \frac{l}{4}$ și 60° unghiul firului cu verticala.

b) Probleme analoge cu (a), pentru poziția din figura III.5, b.

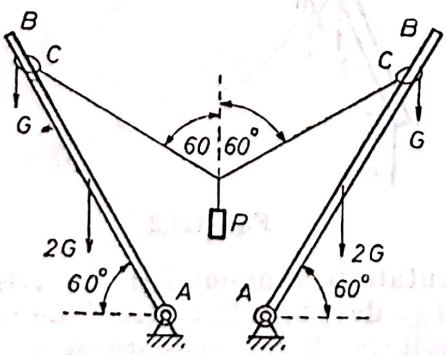


Fig. III.5, a

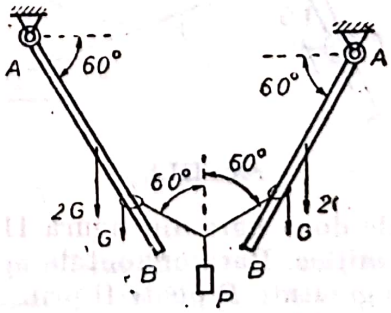


Fig. III.5, b

Scanned with OKEN Scanner

6. Două bare sînt articulate și rezemate ca în figura III.6. Bara AB are greutate G, lungime l, distanța $CB = \frac{l}{4}$, înclinată sub $\sphericalangle \alpha$. Bara CD, greutate G, lungime l are la un cap greutatea P, și e articulată la mijloc în E. Se cere P pentru echilibrul din figură și diferența între cele două moduri de reazem din figurile III.6, *a* și III.6, *b*.

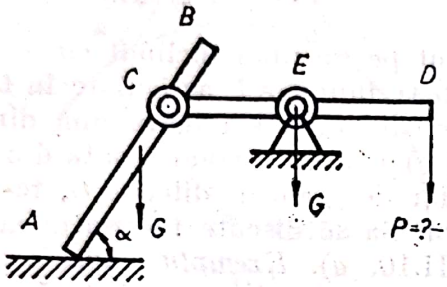


Fig. III.6, *a*

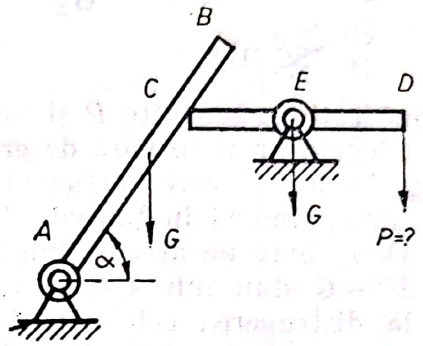


Fig. III.6, *b*

7. a) Emisfera de greutate G și rază R trebuie să stea înclinată sub $\sphericalangle \alpha$. Pentru aceasta se aplică forța P la bara AB de greutate $\frac{G}{2}$ și lungime l, rezemată în C $\left(CB = \frac{l}{4}\right)$ și articulată în A. Se cere $P = ?$ pentru această poziție de echilibru (fig. III.7, *a*) $\left(OC = \frac{3R}{8}\right.$, C fiind centrul de greutate al emisferei).

b) Problema analoagă, dar bara e articulată în D (fig. III.7, *b*).

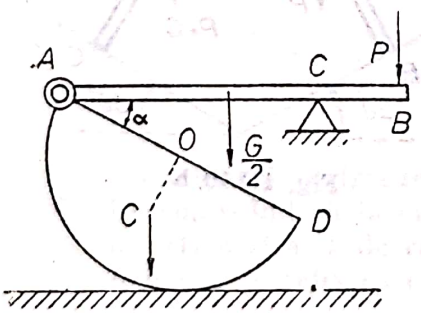


Fig. III.7, *a*

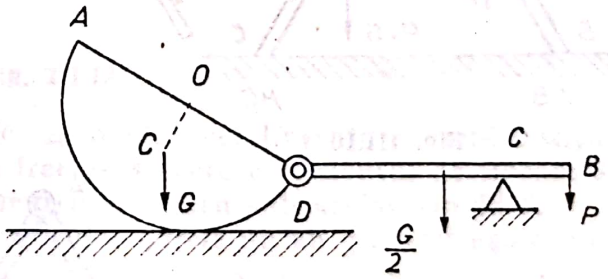


Fig. III.7, *b*

8. a) Bara cotită are greutate γ N/ml. Se cere coeficientul de frecare μ_A la articulația de rază r_A pentru echilibru ca în figura III.8.

Date: $DC = CA = 2\ l$, $AB = 6\ l$, $BE = 4\ l$.

b) Presupunînd că nu ar fi frecare la articulație, să se determine poziția de echilibru ($\sphericalangle \alpha$ al lui CAB cu verticala).

Scanned with OKEN Scanner

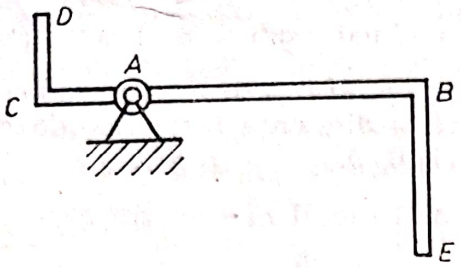


Fig. III.8

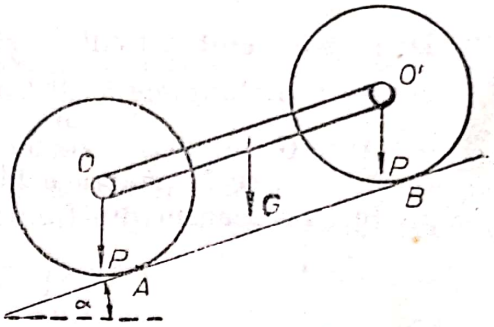


Fig. III.9

9. Două roți de greutate P și rază R sînt pe un plan înclinat cu $\sphericalangle \alpha$. Ele sînt legate printr-o bară de greutate G și lungime l, articulate în O și O' (fig. III.9). Se cere coeficientul de frecare cînd e frînată una din roți: a) μ_A cînd e frînată roata din față ; b) μ_B cînd e frînată roata din spate.

10. a) Două bare de aceeași lungime l, dar de greutăți diferite G, respectiv $P + G$ stau sub $\sphericalangle 2\theta$ la echilibru. Să se discute începutul mișcării la distrugerea echilibrului (fig. III.10, *a*). *Exemplu numeric.* Să se presupună $\theta = 30°$, $P = G$ și $\mu_B = \mu_C = 1$. Să se vadă dacă această frecare e suficientă pentru echilibru.

b) Se presupun barele de mai sus, așezate pe două plane înclinate sub 30°. Să se deducă μ_B și μ_C (fig. III.10, *b*). *Exemplul numeric* de mai sus, adică $P = G$; $\mu_B = \mu_C = 1$.

c) Aceeași problemă ca (b) dar planele înclinate în sens invers. Același exemplu numeric (fig. III.10, *c*).

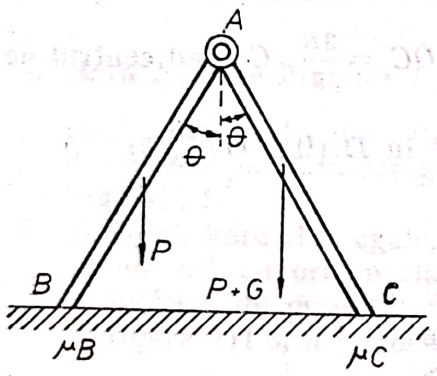


Fig. III.10, *a*

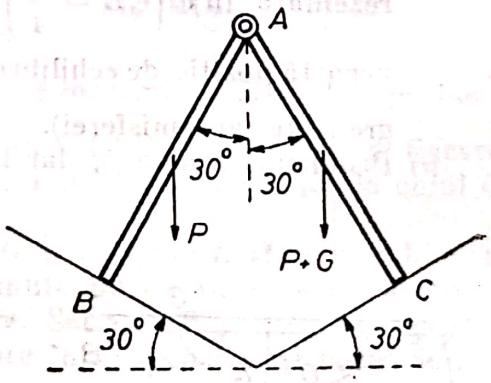


Fig. III.10, *b*

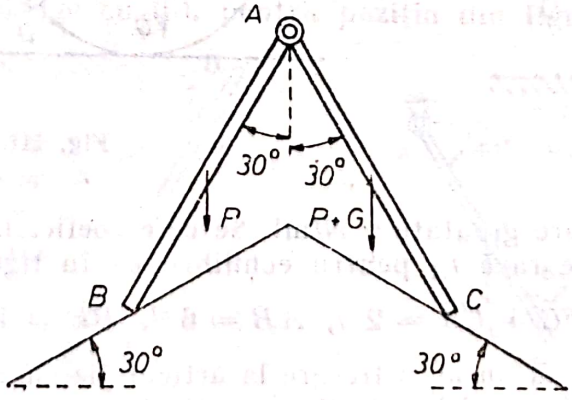


Fig. III.10, *c*

11. a) Două bare egale AB (fig. III.11, a) de greutate G și lungime l, articulate în A stau la echilibru sub 60° pe o emisferă de rază $R = l$. Să se determine coeficientul de frecare μ_B pentru echilibru în această poziție.

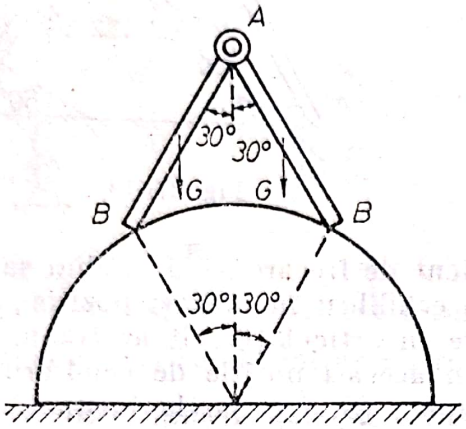


Fig. III.11, a

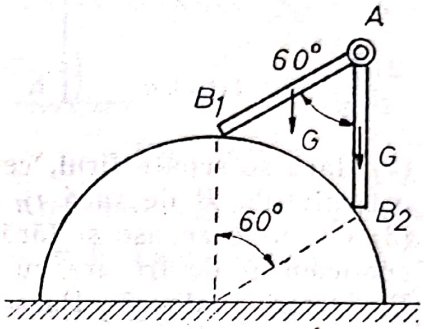


Fig. III.11, c

b) Se presupune că nu există frecare în B ci în articulația A de rază r_A (v. fig. III.11, a). Se cere coeficientul de frecare μ_A.

c) În cazul cînd sistemul de bare stă în echilibru ca în figură să se determine μ_1 și μ_2 în B_1 și B_2 (fig. III.11, c).

12. Două bare egale articulate între ele în A, de greutate G și lungime l, se reazemă pe două cuie C și C la distanța $CC = 2a$. Barele fac $\sphericalangle \theta$ dat cu verticala (fig. III.12). Se cere :

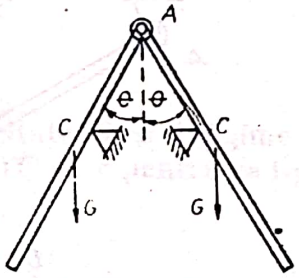


Fig. III.12

a) coeficientul de frecare la cuie, μ_C pentru echilibru în această poziție ;

b) Presupunînd că la cuie nu e frecare se cere coeficientul de frecare μ_A la articulația A de rază r_A pentru echilibru sub același unghi θ.

c) Aceleași întrebări ca la (a) și (b) dar barele nu au greutăți egale. Presupunem că cea din dreapta are greutate $3G$, $\theta = 30°$, $a = \frac{l}{4}$, iar coeficientul de frecare la cuie este $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. a) Fie trei bare din care cea orizontală are greutate $2G$, lungime $2l$. Cele care fac 60° cu orizontala au greutate G, lungime l și sînt prinse de sol cu cîte un fir perpendicular pe bară, la distanța $\frac{l}{4}$ de A (fig. III.13. a). Se cere :

(1) tensiunea în fir la echilibru ;

Scanned with OKEN Scanner

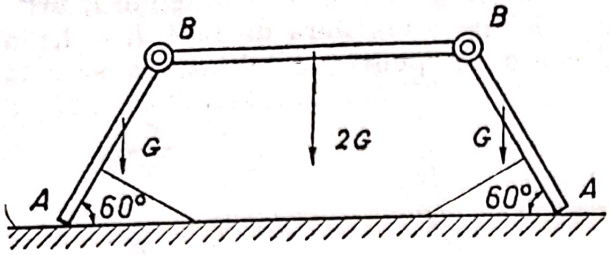


Fig. III.13, *a*

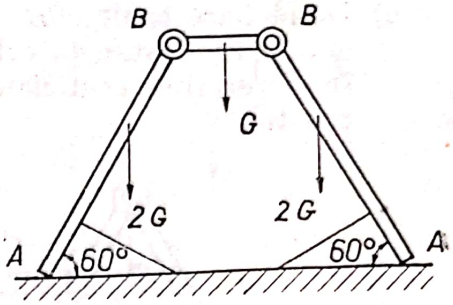


Fig. III.13, *b*

(2) dacă se scoate firul, ce coeficient de frecare μ_B ar trebui să fie la articulaţiile B de rază r_B pentru echilibru în aceeaşi poziţie;
(3) cu firele scoase şi fără frecare în articulaţii, cît ar trebui să fie coeficientul de frecare cu solul în aceeaşi poziţie de echilibru?

b) Problemă analoagă. Bara orizontală: (G, l); barele înclinate: $(2G, 2l)$; firul la $\frac{l}{2}$ de A (fig. III.13, *b*).

14. a) Se dă sistemul de bare articulate, fără greutate proprie, din figura III.14, *a*. Forţa P dată ($BE = BC = CA = BD = DH = l$). Să se determine forţele în articulaţii.

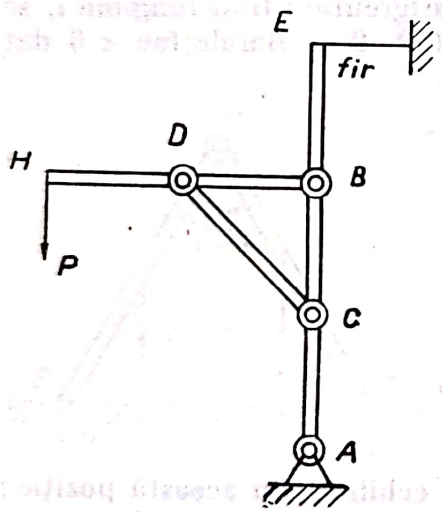


Fig. III.14, *a*

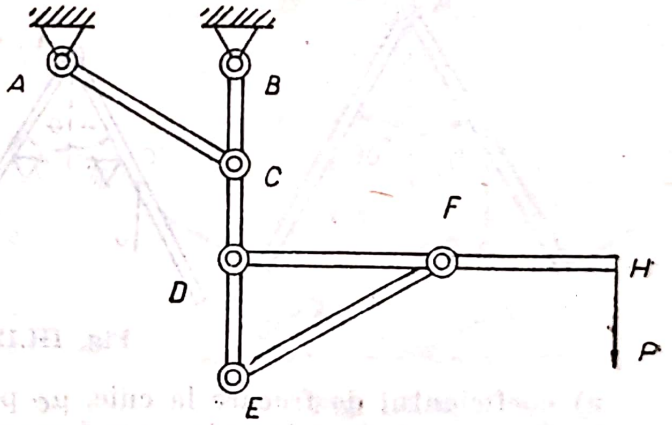


Fig. III.14, *b*

b) Problemă analoagă (fig. III.14, *b*). Date: $AB = DF = FH = 2l$; $BC = CD = DE = l$; şi greutatea P.

15. Trei bare fără greutate proprie: AC (lungime $4l$), BD (lungime $2l$), CE (lungime $4\,l\sqrt{2}$) stau în echilibru ca în figura III.15 acţionate de $2P$ orizontal la $\frac{DE}{2}$ şi de P la jumătatea barei BD. Această bară e articulată la jumătatea celorlalte două. Se cer forţele în articulaţii în cazurile (a) şi (b). În cazul (a) reazem simplu este în E. În cazul (b) reazem simplu este în A.

Scanned with OKEN Scanner

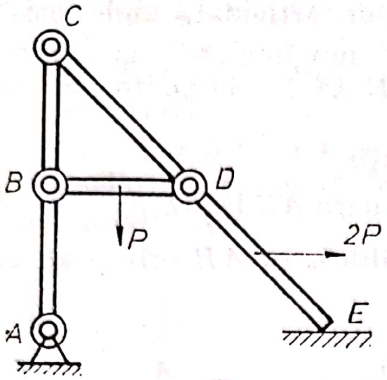


Fig. III.15, *a*

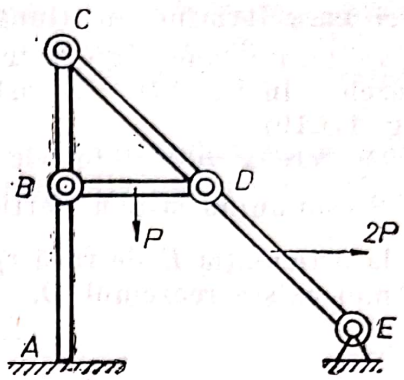


Fig. III.15, *b*

16. Fie un triunghi echilateral format din trei bare egale de greutate G şi lungime l, articulate între ele şi rezemate pe două cuie C la distanţa $\frac{l}{3}$ de A. Să se determine forţele în articulaţii. Notînd $CB = x$ să se determine forţele în articulaţii în funcţie de x, în cazurile din figurile III.16, *a* şi *b*.

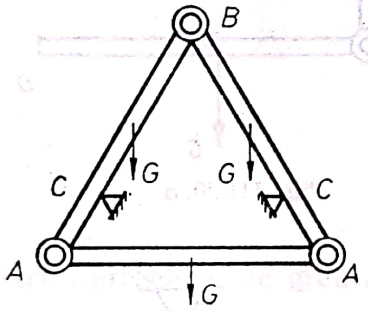


Fig. III.16, *a*

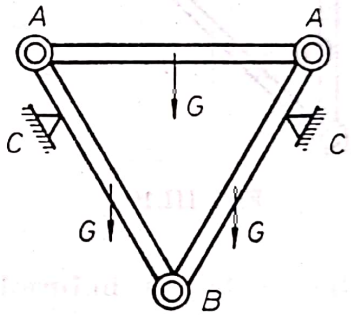


Fig. III.16, *b*

17. Patru bare egale de greutate G şi lungime l sînt suspendate pe două cuie C. Se cere distanţa $AC = x$ pentru ca figura III.17, să fie un pătrat.

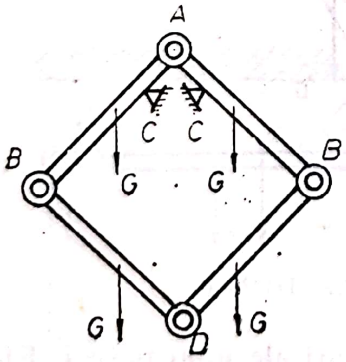


Fig. III.17

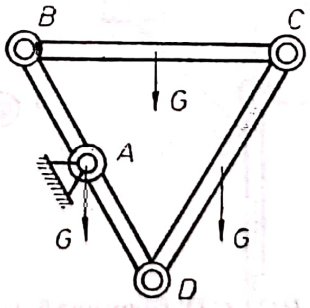


Fig. III.18, *a*

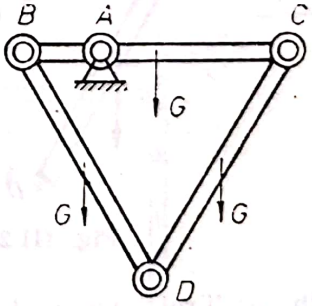


Fig. III.18, *b*

18. a) Triunghiul articulat format din trei bare egale de greutate G, lungime l, e articulat cu frecare de coeficient μ_A în articulaţia A de rază r_A şi stă în poziţia din figura III.18, *a*. Se cere μ_A şi forţele din articulaţii.

b) Aceeaşi problemă. Articulaţia este la $AB = \frac{l}{4}$ de bara orizontală (fig. III.18, *b*).

Scanned with OKEN Scanner

19. Trei bare formînd un triunghi dreptunghic articulat, unde barele AB și AC au lungime l, greutate G, iar BC are lungime $l\sqrt{2}$, greutate $2G$, se reazemă în D, $AD = x$, astfel încît AB să fie orizontal la echilibru (fig. III.19).

a) Se cere $x = ?$ și forțele din articulații.

b) Presupunînd sistemul articulat în E pe bara AC la $AE = \frac{3l}{8}$ se cere μ_E la articulația E de rază r_E pentru echilibru cu AB orizontal, cînd nu mai există reazemul D.

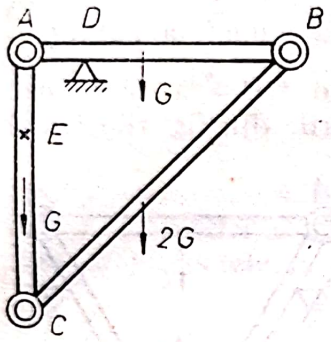


Fig. III.19

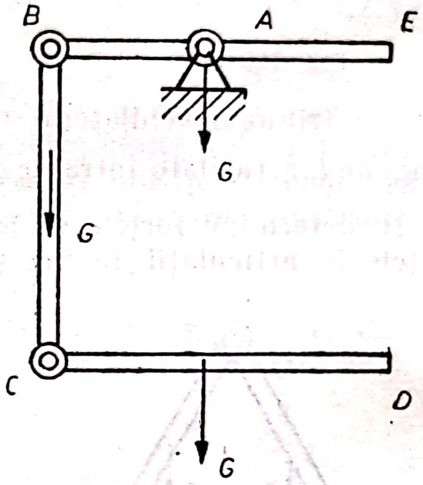


Fig. III.20, *a*

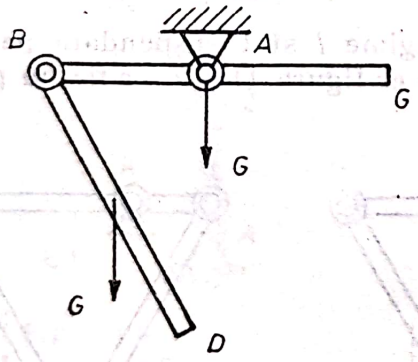


Fig. III.20, *b*

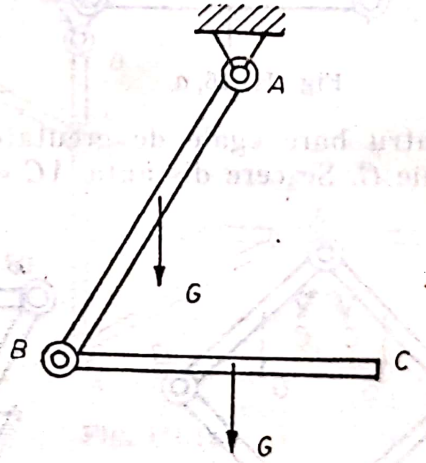


Fig. III.20, *c*

20. a) Trei bare egale BE, BC, CD formează trei laturi ale unui pătrat. Ele au greutate G și lungime l și sînt articulate între ele în B și C. În A la $\frac{BE}{2}$ sistemul e articulat fix (fig. III.20, *a*).

Se cer coeficienții de frecare în articulațiile de rază r ca barele să rămînă în echilibru în poziția din figură.

b) Aceeași problemă pentru un triunghi echilateral căruia i s-a scos o latură (fig. III.20, *b* și *c*).

Scanned with OKEN Scanner

21. Trei bare de greutate G şi lungime l, formează trei laturi ale unui pătrat, situat într-un plan vertical şi suspendat prin firul din C (fig. III.21).

a) Să se determine tensiunea T din firul vertical în C, ca pătratul să nu se deformeze.

b) Dacă nu ar fi fir, cît ar trebui să fie coeficientul de frecare în una din articulaţiile A sau B de rază r (μ_A, respectiv μ_B) pentru echilibru în aceeaşi poziţie.

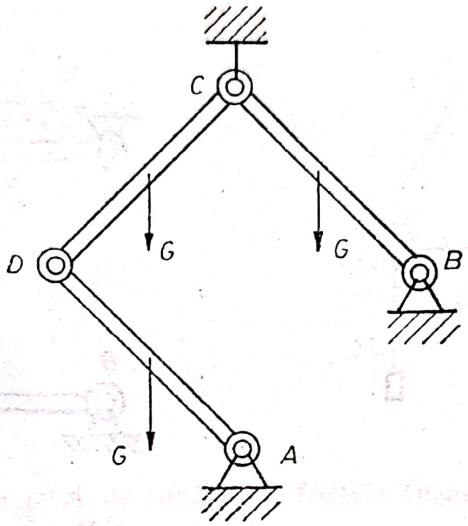


Fig. III.21

22. Patru bare egale de greutate G, lungime l, formînd un pătrat sînt susţinute prin două fire formînd $\alpha = 45°$, prinse în C $\left(AC = \frac{l}{4}\right)$. Să se determine tensiunea T din fir şi forţele în articulaţii în cazul figurilor III.22, *a* şi *b*. Să se generalizeze pentru un $\sphericalangle \alpha$ oarecare.

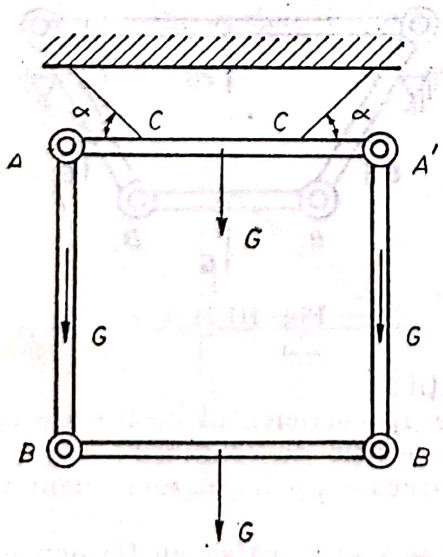


Fig. III.22, *a*

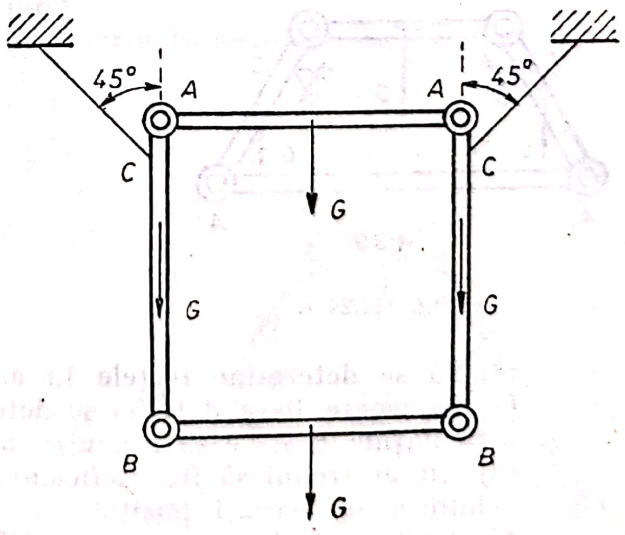


Fig. III.22, *b*

Scanned with OKEN Scanner

23. Trei bare egale de greutate G și lungime l articulate de un perete fix în A și B, formează trei laturi ale unui pătrat. Sistemul e acționat de o greutate $2G$ care legată de un fir trece peste un scripete și prinde jumătatea barei CD. Sistemul nu se poate deforma din cauza altui fir care unește mijloacele laturilor AC și CD. Se cere:
(1) tensiunea în firul oblic ($T = ?$);
(2) Se scoate firul cu $2G$ la capăt și bara BD. Se cere unghiul lui AC cu orizontala și tensiunea în fir în acel ' z pentru figurile III.23, *a* și *b*.

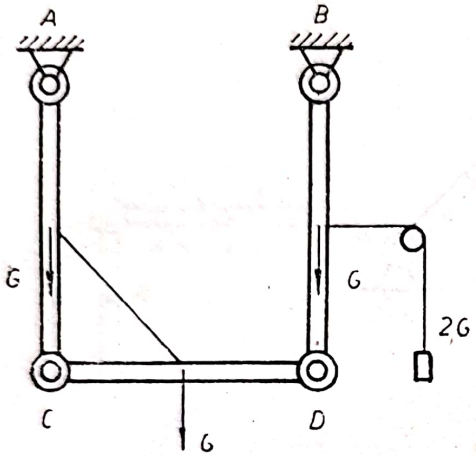


Fig. III.23, *a*

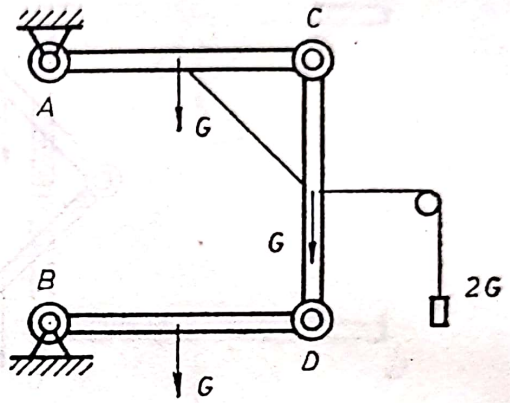


Fig. III.23, *b*

24. a) Patru bare articulate între ele formează laturile unei jumătăți de hexagon regulat. Barele AB și BB au greutate G și lungime l. Bara AA are greutatea $2G$ și lungimea $2l$ (fig. III.24, *a*). Sistemul se reazemă pe cuiele C $\left(BC = \frac{l}{4}\right)$.

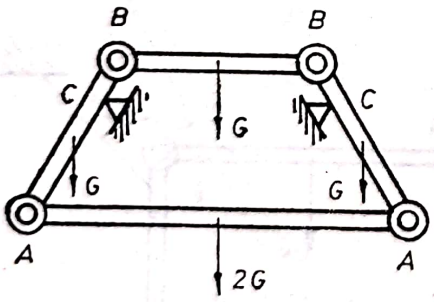


Fig. III.24, *a*

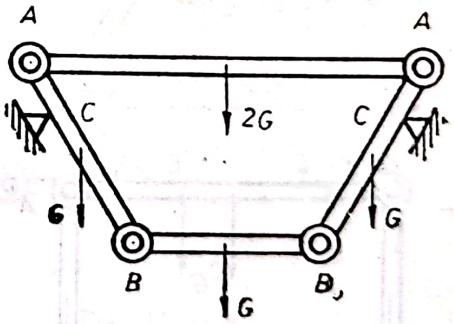


Fig. III.24, *b*

(1) Să se determine forțele în articulații;
(2) Se scoate bara AA. Să se determine μ_B coeficientul de frecare la articulațiile B de rază r pentru aceeași poziție de echilibru;
(3) Cît ar trebui să fie coeficientul de frecare μ_C la reazeme pentru echilibru în aceeași poziție;
(4) Unde ar trebui pus reazemul C ($BC = x = ?$) ca să nu fie nevoie de frecare la cuie în această poziție de echilibru?

Scanned with OKEN Scanner

b) Aceeaşi problemă dar sistemul suspendat ca în figura III.24, *b* $\left(AC = \frac{l}{4}\right)$.

La (2) se scoate BB.

25. a) Patru bare formează laturile unui hexagon ca în problema precedentă. Pentru echilibru ca în figura III.25, *a* sistemul e articulat în A la $AB = \frac{l}{2}$.

Se cere :

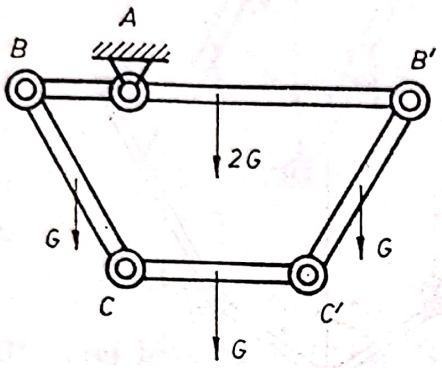


Fig. III.25, *a*

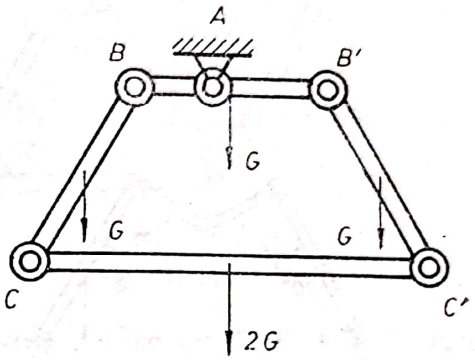


Fig. III.25, *b*

(1) μ_A în articulaţia A de rază r_A şi forţele în articulaţii. Date : $BC = CC' = C'B' = l$; $BB' = 2\ l$.

(2) Se scoate bara CC'. Să se determine μ_A în acest caz şi μ_B şi μ'_B în articulaţiile B şi B' pentru echilibru în aceeaşi poziţie, razele în B şi B' fiind r_B respectiv $r_{B'}$.

b) Aceeaşi problemă, avînd figura III.25, *b* $\left(AB = \frac{l}{4}\right)$.

26. Se dau barele AB şi CE articulate între ele în D şi rezemate în N ($CD = DE = 3$ m, $AD = DB = 4$ m). În E este un scripete peste care trece un fir cu P la capete (fig. III.26). Barele nu au greutate proprie. Să se determine forţele în articulaţii cînd :

a) N este la mijlocul lui DB ; b) N este la mijlocul lui AD.

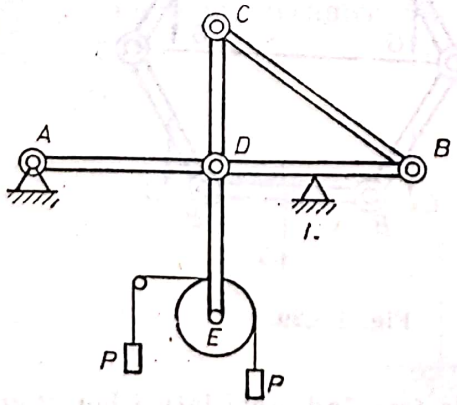


Fig. III.26

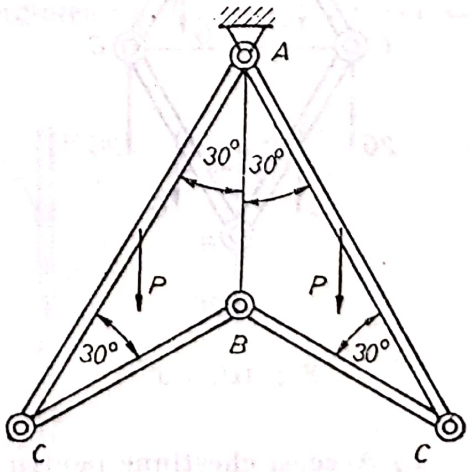


Fig. III.27

27. Patru bare sînt articulate în A de tavan. Barele BC au greutatea G, lungimea l; barele AC au greutatea P, lungimea $l\sqrt{3}$; firul care ține sistemul în echilibru are lungimea l. Să se determine forța T în fir la echilibru (fig. III.27).

28. a) Fie patru bare articulate: AB de greutate $2G$, lungime $2l$, și BC de greutate G, lungime l, susținute printr-un fir vertical în poziția din figura III.28, *a*. Să se determine forța T din fir.

b) Aceeași problemă pentru figura III.28, *b*.

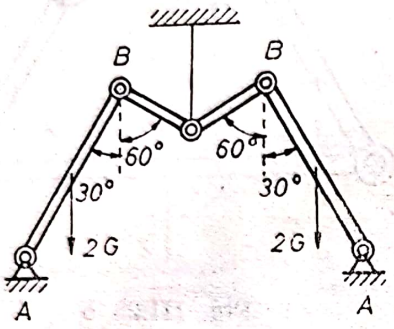


Fig. III.28, *a*

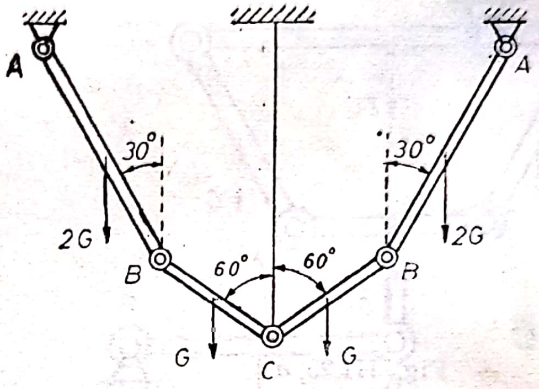


Fig. III.28, *b*

29. a) Patru bare egale de greutate G și lungime l sînt articulate între ele ca în figura III.29, *a*. Ele sînt ținute sub $\sphericalangle \alpha$ printr-o bară fără greutate proprie CC. Să se determine forța în această bară.

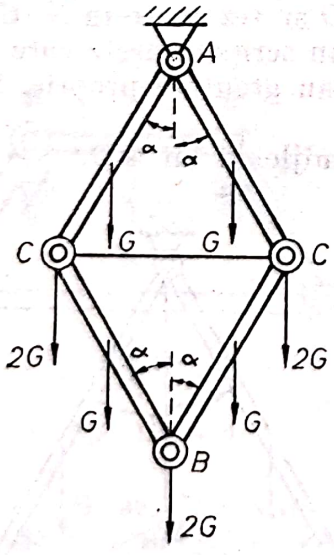


Fig. III,29, *a*

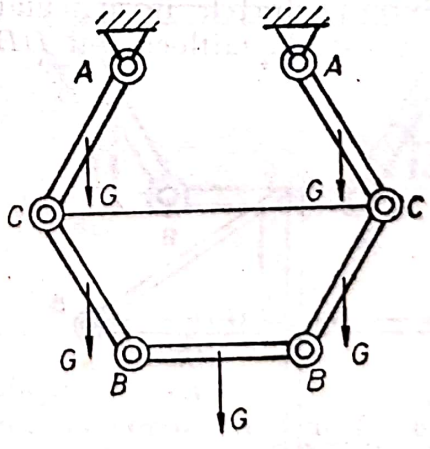


Fig. III.29, *b*

b) Aceeași chestiune pentru cinci bare egale formînd cinci laturi lae unui hexagon regulat deschis, articulat de tavan în A și A (fig. III.29, *b*).

Scanned with OKEN Scanner

30. Trei bare AB, CD (greutate $2G$, lungime $2l$) și BD (greutate G, lungime l), sînt ținute ca în figura III.30 prin firul vertical. Să se determine forța în acest fir.

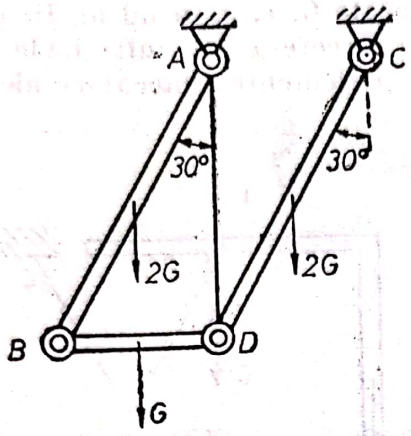


Fig. III.30

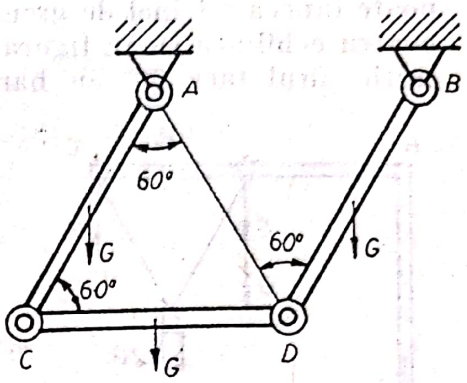


Fig. III.31

31. Trei bare egale (greutate G, lungime l) sînt prinse cu firul AD de lungime l, pentru echilibru ca în figura III.31. Se cere tensiunea în acest fir.

Capitolul IV

ÎNCASTRĂRI

1. O sferă de greutate G și rază R se reazemă de cubul de greutate $P = 2G$, latură $l = 2R$ (fig. IV.1).

a) Cubul este legat cu un fir de bară la $\frac{a}{4}$ de $B\left(AB = \frac{3R}{2}\right)$, iar bara este încastrată în A și are greutatea $\frac{G}{2}$, lungimea a și $DE = \frac{a}{4}$. Se cer elementele mecanice ale încastrării.

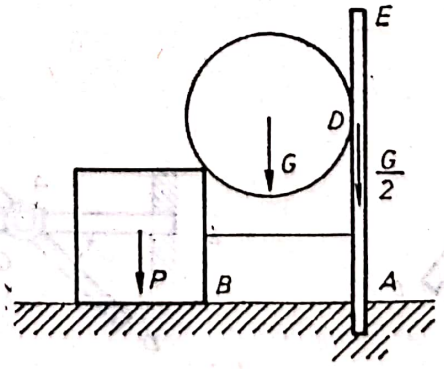


Fig. IV.1

b) Care sînt elementele mecanice ale încastrării cînd cubul are coeficient de frecare cu solul μ și nu mai e legat cu fir. Să se determine μ, pentru aceeași poziție ca la a).

2 a) Pe bara îndoită în unghi drept unde AB și BC au greutate G, lungime l, lunecă sistemul de două inele de greutate G, care prind un fir pe care poate luneca alt inel de greutate $2G$. Se cere $\mu = ?$ între inele și bară pentru echilibru ca în figura IV.2, *a* și elementele mecanice ale încastrării (firul face 60° cu bara).

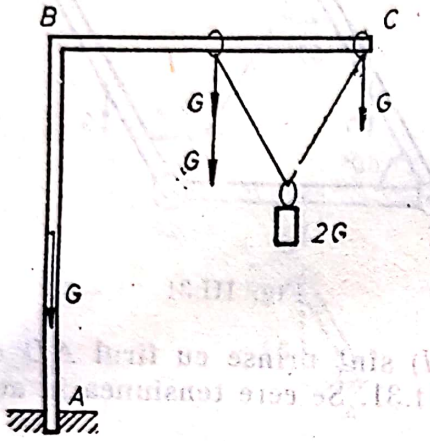


Fig. IV.2, *a*

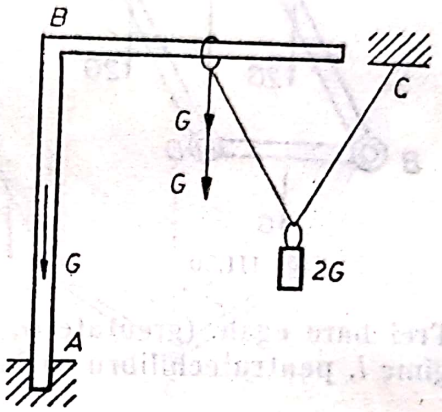


Fig. IV.2, *b*

b) Aceeași situație ca la a) dar firul din dreapta e prins de tavan nu de bară (fig. IV.2, *b*). Să se determine și în acest caz μ și elementele mecanice ale încastrării.

3. Două bare egale BC și DE de greutate G și lungime l sînt articulate cu frecare ($\mu_A = ?$) în articulația A, de rază r_A, unde $AB = AD = \frac{l}{4}$. Barele stau sub $\hat{\alpha}$ ca în figura IV.3, *a* și *b*, iar BC este încastrată în B. Se cere:

(1) Coeficientul de frecare μ_A;

(2) Elementele mecanice ale încastrării în cazurile figurilor IV.3, *a* și *b*.

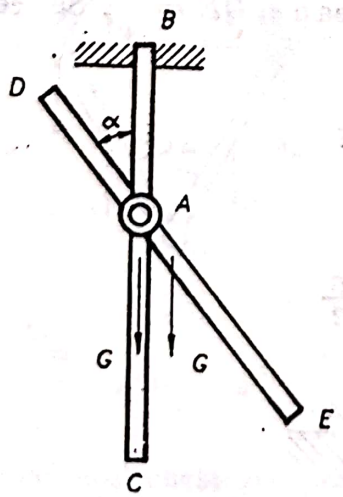


Fig. IV.3, *a*

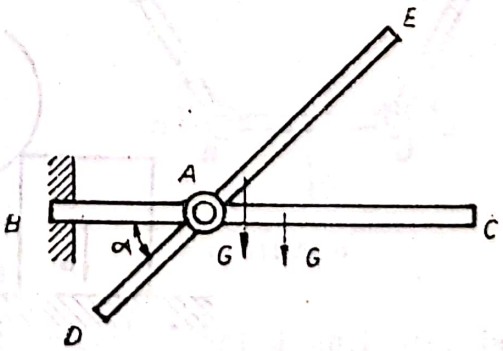


Fig. IV.3, *b*

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie trei bare AC $(3l)$; DC (l), DE $(2l\sqrt{2})$ unde bara DE este articulată la jumătate în B, de bara AC, sub 45°. Sistemul este acţionat în E de $P\sqrt{2}$ perpendicular pe ED (fig. IV.4).

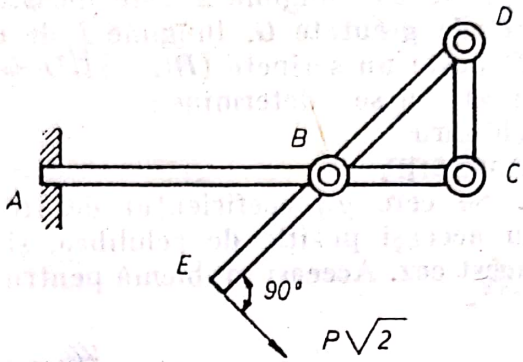


Fig. IV.4

a) Se cer forţele în articulaţii şi elementele mecanice ale încastrării;
b) Se scoate bara verticală DC. Se cere μ_B în articulaţia B de rază r_B şi elementele încastrării în acest caz. Barele nu au greutate proprie.

5. Se dau barele din figurile IV.5, *a*—*d*, unde ABC e o bară cotită în unghi drept, articulată în A de bara AD încastrată în D. Porţiunile de lungime l au greutate G, cele de lungime $2l$ au greutate $2G$. Se cere: (1) Coeficientul de frecare μ_A în articulaţia A de rază r_A pentru echilibru ca în figură;

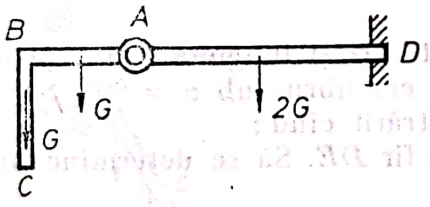


Fig. IV.5, *a*

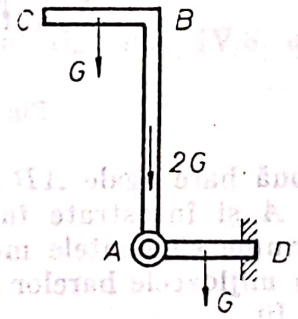


Fig. IV.5, *b*

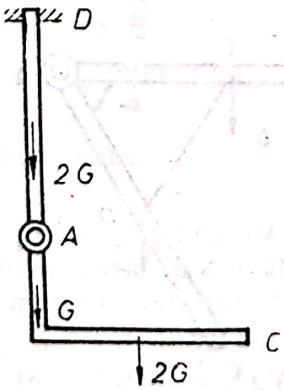


Fig IV.5, *c*

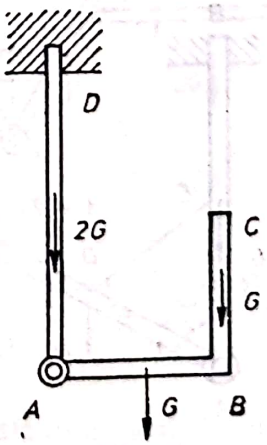


Fig. IV.5, *d*

Scanned with OKEN Scanner

(2) Elementele mecanice ale încastrării ;
(3) Presupunînd în A frecare nulă să se determine poziția barei cotite ($\sphericalangle\theta = ?$) ($\theta$ este unghiul porțiunii AB cu verticala).
(4) Elementele mecanice ale încastrării în acest caz.

6. O bară AB de greutate $2G$, lungime $2l$ este încastrată în A. În B este articulată bara BC de greutate G, lungime l de care e prins în C un fir care trece în D peste un scripete ($BC = BD = l$). Unghiul $\alpha = 60°$, (CDP este același α). Să se determine :
(1) Forța P la echilibru ;
(2) Elementele încastrării ;
(3) Se rupe firul. Se cere μ_B coeficientul de frecare în articulația B de rază r_B pentru aceeași poziție de echilibru, și elementele mecanice ale încastrării în acest caz. Aceeași problemă pentru figurile IV.6, *a* și *b*.

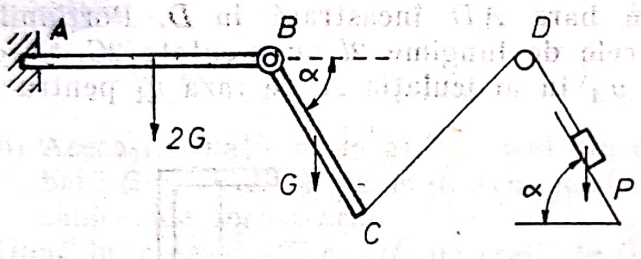


Fig. IV.6, *a*

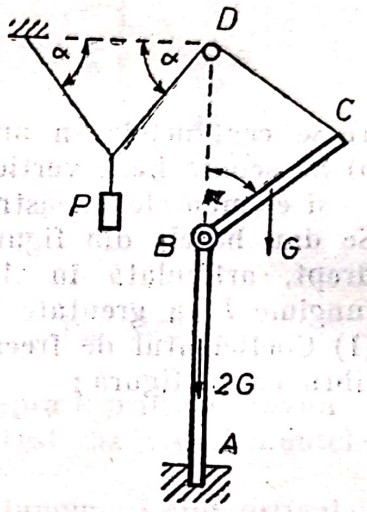


Fig. IV.6, *b*

7. Două bare egale AB și AC de greutate G și lungime l sînt articulate în A și încastrate în B. Ele stau în echilibru sub $\alpha = 60°$. Să se determine elementele mecanice ale încastrării cînd :
(1) mijloacele barelor sînt legate cu un fir DE. Să se determine forța T în fir.

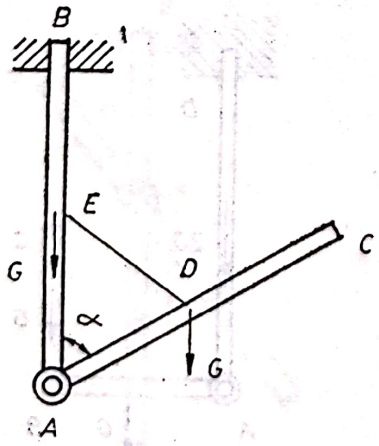


Fig. IV.7, *a*

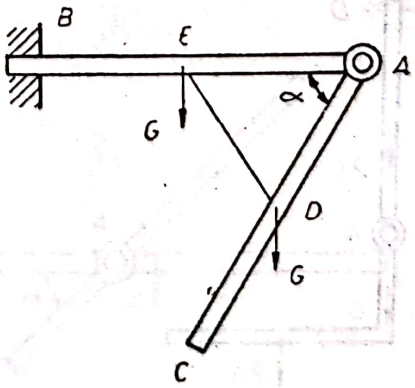


Fig. IV.7, *b*

Scanned with OKEN Scanner

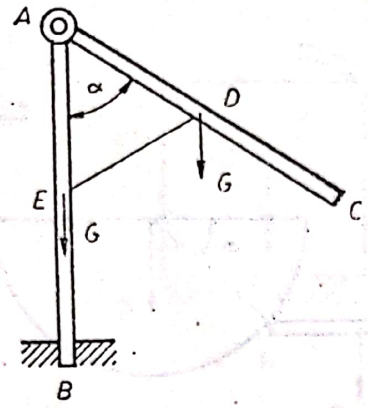


Fig. IV.7, c

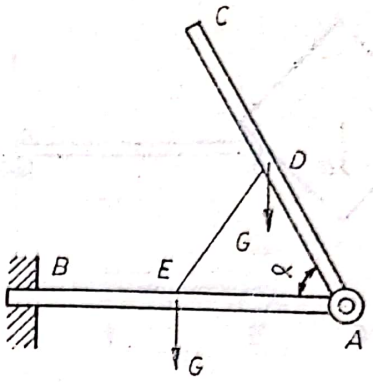


Fig. IV.7, d

(2) Se scoate firul, iar în D se înlocuieşte cu un reazem. Să se determine forţa de sprijin la acest reazem.

(3) Nu există nici un fir, nici reazem. Echilibrul sub $\hat{\alpha}$ este datorit frecării de coeficient μ_A la articulaţia A de rază r_A. Să se rezolve problema pentru cazurile din figurile IV.7, *a*, *b*, *c* şi *d*.

8. Două bare egale AB, articulate în A, de greutate G şi lungime l sînt ţinute sub $\theta = 60°$, printr-o bară fără greutate proprie $\left(DA = \frac{l}{4}\right)$ şi se reazemă în C pe două bare încastrate în E de greutate $2G$ şi lungime $l\left(CA = \frac{3l}{4}\right)$. Să se determine forţa din bara DD la echilibru şi elementele mecanice ale încastrării în cazul figurilor IV.8, *a* şi *b*.

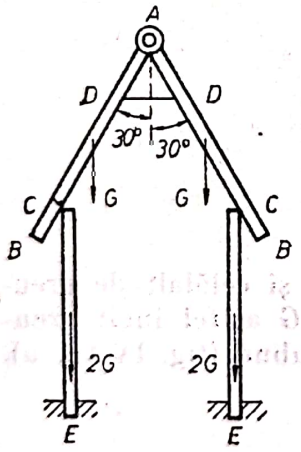


Fig. IV.8, a

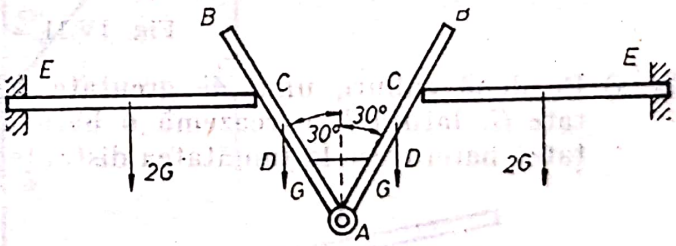


Fig. IV.8, b

9. O placă pătrată de greutate G şi latură l se reazemă în B şi D de cîte o bară încastrată de greutate $2G$ şi lungime $2l$ (fig. IV.9). Se cer elementele mecanice ale încastrării şi coeficientul de frecare:
a) μ_D în D; b) μ_B în B.
Date: $AB = \frac{l}{2}$; $CD = \frac{l}{4}$. Să se determine grafic unghiurile de frecare.

Scanned with OKEN Scanner

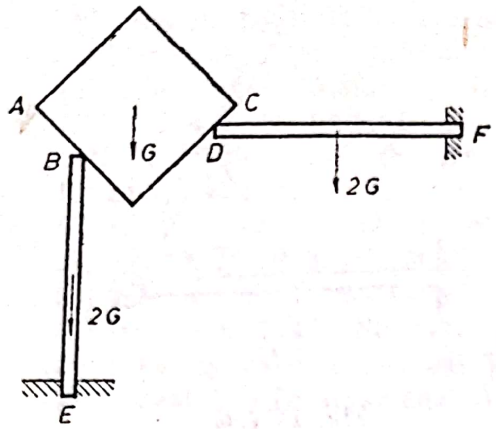


Fig. IV.9

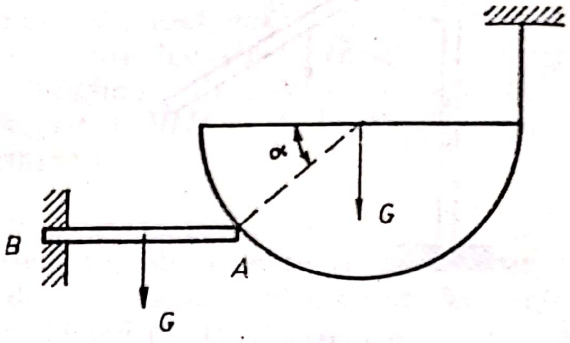


Fig. IV.10

10. Emisfera de greutate G și rază R e prinsă cu un fir vertical și rezemată de bara AB încastrată, de greutate G și lungime R. Să se determine coeficientul de frecare μ_A în A și elementele mecanice ale încastrării pentru poziția din figura IV.10.

11. Fie sistemul de trei bare EF, CA, BD fără greutate proprie, $CD = CB = DF = BA = l$; $EF = 4\,l$; $CA = 2\,l$; $DB = l\sqrt{2}$; asupra căruia acționează forțele $2P$ și P. În A este încastrare (fig. IV.11). Să se determine forțele în articulații și elementele mecanice ale încastrării.

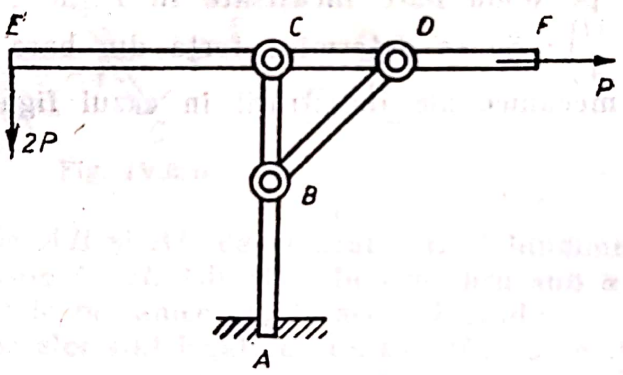


Fig. IV.11

12. a) Pe două cuburi, unul de greutate $2G$, latură $2l$ și celălalt de greutate G, latură l se reazemă o bară de greutate G astfel încît greutatea barei trece la jumătatea distanței $2l$ dintre cuburi (fig. IV.12, *a*).

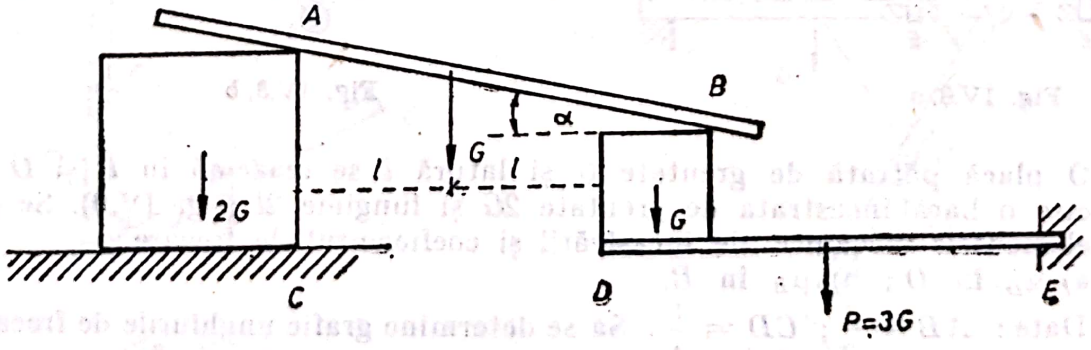


Fig. IV.12, *a*

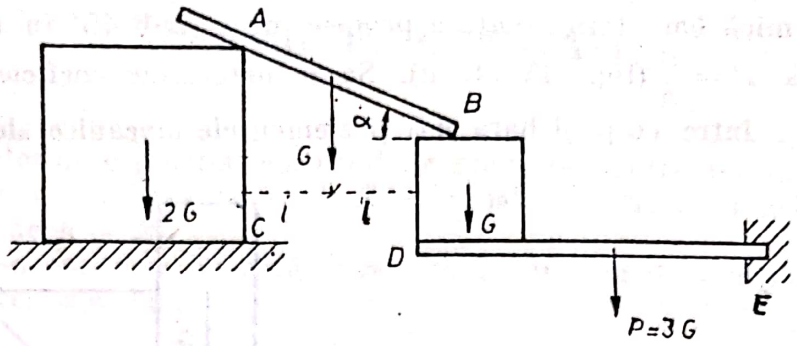


Fig. IV.12, *b*

Se cere în această poziție:
(1) frecarea în A ($\mu_A = ?$) ca să nu lunece bara;
(2) μ_1 și μ_2 la baza cuburilor;
(3) Elementele mecanice ale încastrării barei de greutate $P = 3G$ și lungime $4l$, pe care e situat cubul mic.

b) Aceeași problemă pentru figura IV.12, *b* unde B este la jumătatea laturii cubului mic, frecare numai la A.

13. Pe bara încastrată în A, de greutate $2G$ și lungime l, poate luneca un inel de greutate G, cu frecare $\mu = \frac{1}{2}$, astfel încît se află la jumătatea barei. Inelul e legat cu un fir de care atîrnă P (fig. IV.13). Firul este sub $\sphericalangle \alpha = 60°$ la echilibru. Se cere P și elementele mecanice ale încastrării.

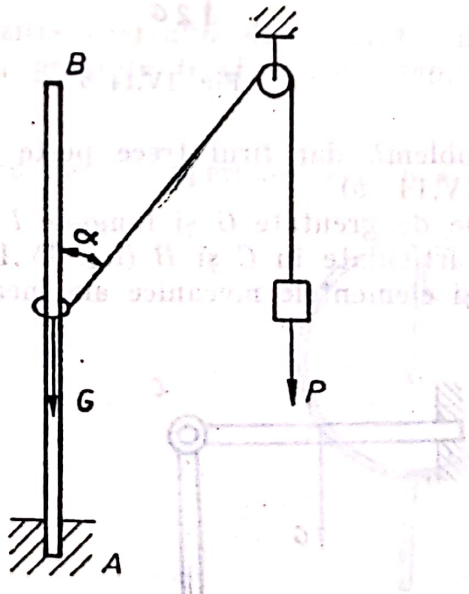


Fig. IV.13

14. a) Pe bara orizontală AB de greutate $2G$ și lungime $2l$ este situat un corp de greutate G, lățime a bazei $\frac{l}{4}$ și înălțime $\frac{l}{2}$ situat la $CB = \frac{l}{4}$ de B. Corpul e legat cu un fir la jumătatea înălțimii. Firul se reazemă

de o mică bară fără greutate proprie prinsă sub 45° în B și de care atîrnă $P = \frac{G}{2}$ (fig. IV.14, *a*). Să se determine coeficientul de frecare μ între corp și bara AB și elementele mecanice ale încastrării.

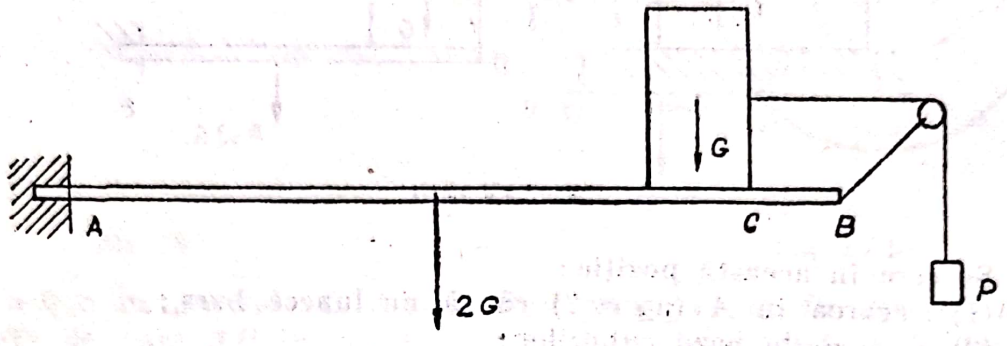


Fig. IV.14, *a*

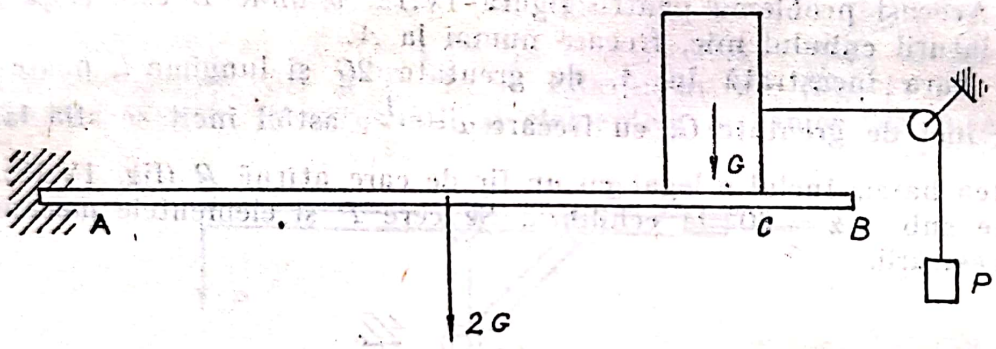


Fig. IV.14, *b*

b) Aceeași problemă dar firul trece peste un scripete nerezemat de bară (fig. IV.14, *b*).

15. Trei bare egale de greutate G și lungime l sînt rezemate în A, încastrate în D și articulate în C și B (fig. IV.15). Să se determine forțele din A, B, C și elementele mecanice ale încastrării.

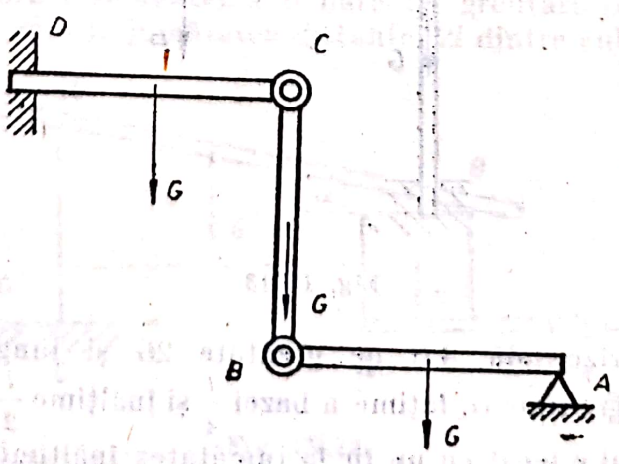


Fig. IV.15

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

CENTRE DE GREUTATE

1. Să se determine poziţia centrului de greutate pentru figura V.1, unde:
a) Dintr-un semicerc se rază R se scoate un triunghi echilateral de înălţime $h = R$.
b) Dintr-o emisferă de rază R se scoate un con de înălţime R şi deschiderea $\alpha = 60°$.

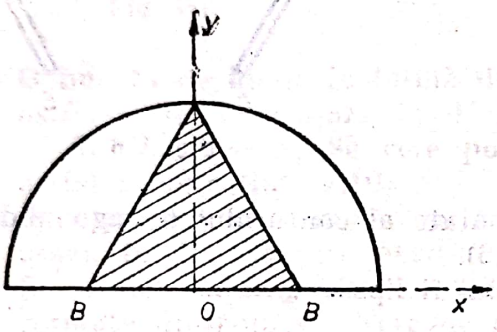


Fig. V.1

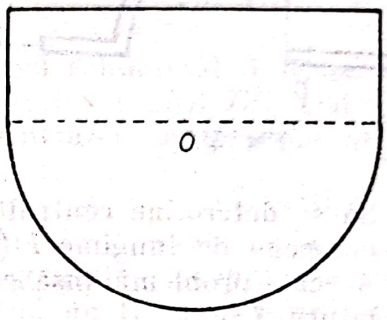


Fig. V.2

2. a) Să se determine înălţimea h a unui dreptunghi avînd cealaltă latură $l = 2R$ care împreună cu un semicerc de rază R să aibă centrul de greutate comun în O (fig. V.2).
b) Aceeaşi problemă cînd cele două corpuri sînt: o emisferă şi un cilindru.

3. a) Să se determine poziţia centrului de greutate al corpului format dintr-un semicerc de greutate G şi o bară semicirculară de greutate $\frac{G}{4}$ (fig. V.3).
b) Aceeaşi problemă cînd partea superioară este o emisferă.

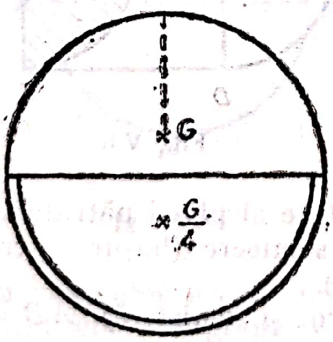


Fig. V.3

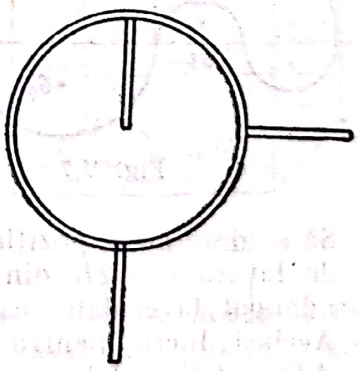


Fig. V.4

4. Să se determine poziţia centrului de greutate al figurii formată din trei bare de lungime R şi greutate G, şi un cerc de rază R şi greutate $2G$ (fig. V.4).

Scanned with OKEN Scanner

5. Să se determine poziția centrului de greutate al barei curbe din figura V.5 (semicerc de rază R, două bare egale de lungime $l = R$).

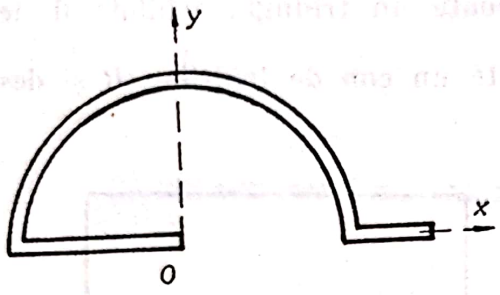


Fig. V.5

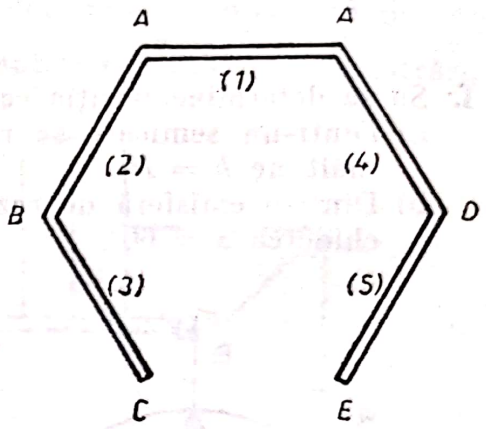


Fig. V.6

6. a) Să se determine centrul de greutate al conturului hexagonal de bare omogene de lungime l (fig. V.6).
Aceeași problemă însă conturului îi lipsesc:
b) latura *3*;
c) laturile *3* și *5*;
d) laturile *2*, *3*, *5*.

7. Să se determine poziția centrului de greutate la:
a) suprafața din figura V.7 (formată din semicercuri, cele mici cu raza R, cel mijlociu cu raza $2R$).
b) conturul din figura V.7.

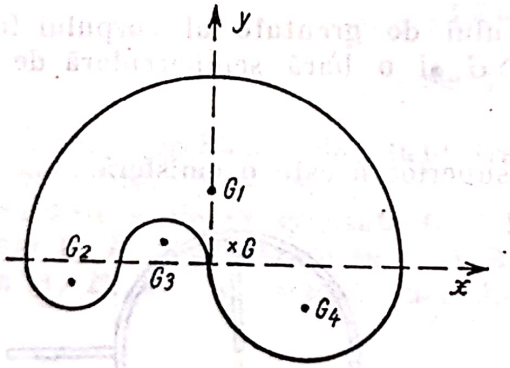


Fig. V.7

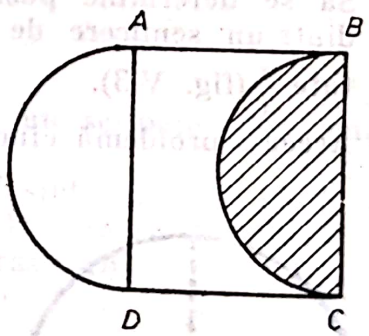


Fig. V.8

8. a) Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii pătrate $ABCD$ de latură $l = 2R$ din care s-a scos un semicerc (haşurat) care s-a adăugat la cealaltă extremitate (fig. V.8).
b) Același lucru pentru volume: (cilindru și emisferă) $AB = 2R$; $AD = BC = 2R$.

9. a) În vîrfurile unei plăci de greutate G și latură l în formă de triunghi echilateral se află puncte materiale de greutate $2G$, $3G$ și $4G$ (fig. V.9). Să se determine poziția centrului de greutate.
b) Să se determine centrul de greutate cînd se scot pe rînd punctele materiale (întîi $4G$, apoi $3G$).

Scanned with OKEN Scanner

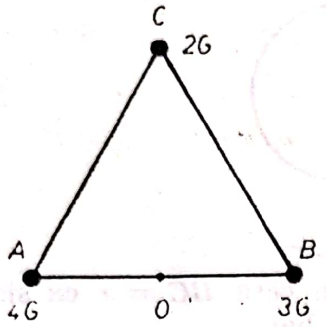


Fig. V.9

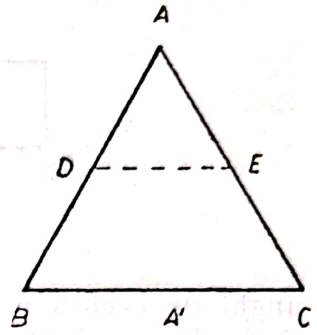


Fig. V.10

10. a) O bucată de hîrtie în formă de triunghi echilateral ABC se îndoaie astfel încît A se așază în A' la jumătatea laturii BC. Date $AB = BC = CA = 2l$. Se cere poziția centrului de greutate al hîrtiei astfel îndoite (fig. V.10).

b) Presupunem că îndoim și triunghiul $CA'E$ peste celelalte (C se așază în D). Se cere poziția centrului de greutate și în acest caz.

11. a) Să se determine poziția centrului de greutate al suprafeței omogene formate dintr-un semicerc de rază R și un triunghi isoscel de înălțime R (fig. V.11).

b) Să se determine poziția centrului de greutate al conturului $ABCBA$.

c) Presupunem figura V.11 formată dintr-o emisferă și un con. Se cere poziția centrului de greutate.

d) În cazul că figura V.11 este o placă plană, se presupune că ea se îndoaie pe diametru astfel încît A coincide cu C. Unde se află centrul de greutate în acest caz ?

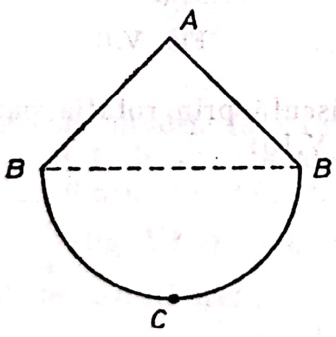


Fig. V.11

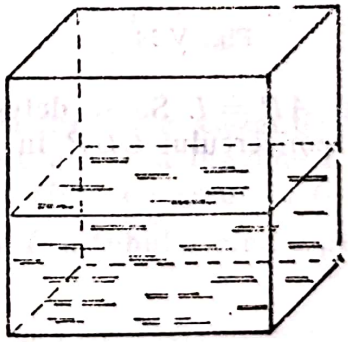


Fig. V.12

12. Un vas cubic are o mică gaură în capac prin care se poate turna apă. Vasul gol are greutate G, iar apa, cînd vasul este plin, are greutate tot G. Cubul are latura l. Să se determine poziția cea mai joasă a centrului de greutate al vasului cu apă și nivelul apei în acea poziție (fig. V.12).

13. a) Un disc în formă de semicerc de greutate specifică γ [N/m²], rază R, este prins de o bară avînd aceeași valoare numerică pentru γ și de lungime $4R$ (fig. V.13). În partea cealaltă a barei este un drept-

Scanned with OKEN Scanner

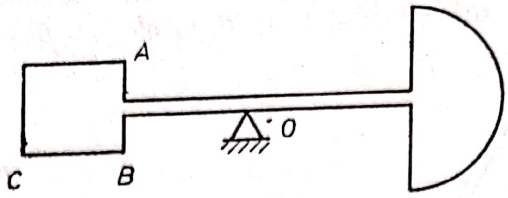


Fig. V.13

unghi de același γ și latură $AB = R$. Se cere $BC = x$ ca sistemul să fie în echilibru, susținut la jumătatea barei.

b) Aceeași problemă dar în loc de semicerc este o emisferă iar ABC este un cilindru.

14. a) Să se determine prin teorema lui Guldin suprafața de încălzire a tubului din figura V.14 obținut prin rotația a trei semicercuri de rază R, în jurul axei OO'.

b) Aceeași problemă dar se cere volumul apei din acest tub.

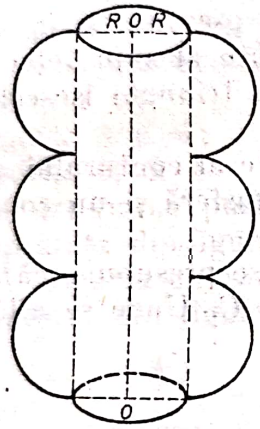


Fig. V.14

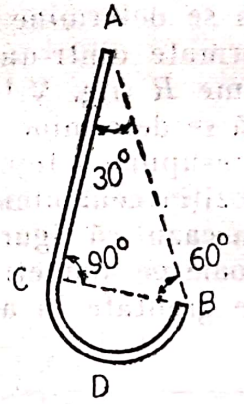


Fig. V.15

15. Dat $AB = l$. Să se determine suprafața născută prin rotația barei AC și semicercului CDB în jurul lui AB (fig. V.15).

Capitolul VI

RĂSTURNĂRI, ROSTOGOLIRI

1. Pe un plan înclinat sub $\sphericalangle \alpha$ este situat un corp de greutate $2G$, lățime l, înălțime $\frac{l}{2}$ în care este încastrată, la jumătatea laturii, o bară de greutate G și lungime h (fig. VI.1). Să se determine coeficientul de frecare μ între corp și plan, elementele mecanice ale încastrării și $h = ?$ ca sistemul să fie pe punctul de răsturnare. Discuție.

Scanned with OKEN Scanner

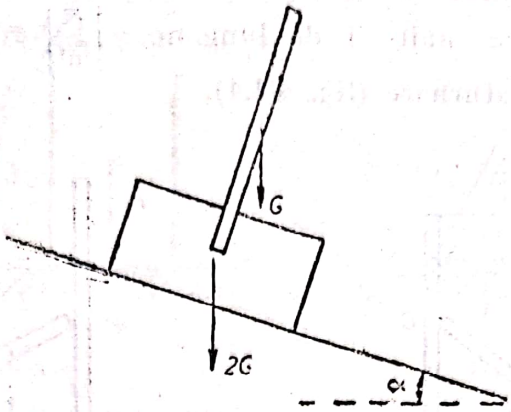


Fig. VI.1

2. Un cub de greutate $2G$, latură l este apăsat de două bare articulate: AB (de greutate G, lungime $3l$ înclinată sub 30°) și CD (de greutate P, lungime a și înclinată sub 60°). Se cere greutatea P astfel încît cubul să fie pe punctul de răsturnare și μ coeficientul de frecare între cub și sol ca el să se afle pe punctul de lunecare $\left(MD = \frac{a}{3}\right)$ (fig. VI.2).

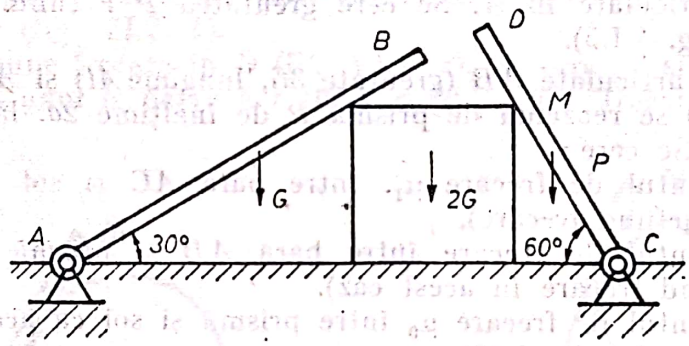


Fig. VI.2

3. Un tub cilindric fără fund, de greutate P și rază R e așezat pe un plan orizontal. În el este așezată o bară de greutate G și lungime l situată la echilibru sub 30°. Pe bară se reazemă o sferă de greutate G și rază $r = \frac{l}{4}$ (fig. VI.3). Să se determine greutatea P a tubului cînd e pe punctul de răsturnare.

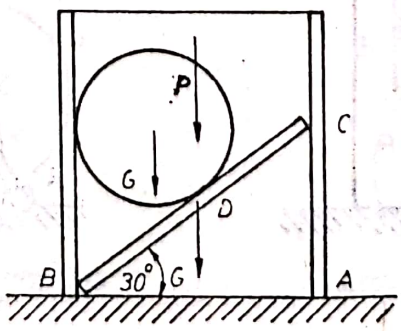


Fig. VI.3

4. În tubul de greutate P și rază R este așezată o bară de lungime l. Se cere greutatea unității de lungime $\gamma \left[\frac{N}{ml}\right]$ a barei ca tubul să fie pe punctul de răsturnare (fig. VI.4).

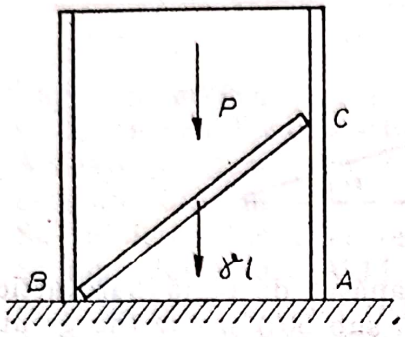


Fig. VI.4

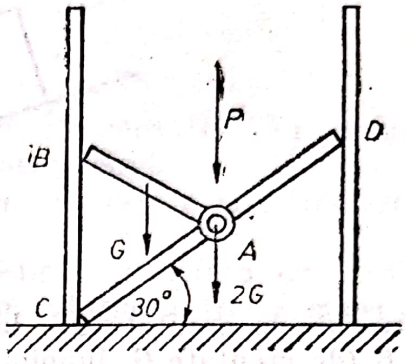


Fig. VI.5

5. În tubul fără fund este situat sistemul de două bare AB (G, l) și CD $(2G, 2l)$ articulate în A. Se cere greutatea P a tubului la limita răsturnării (fig. VI.5).

6. Două bare articulate AB (greutate $3G$, lungime $4l$) și AC (greutate $2G$, lungime $2l$) se reazemă de prisma P de înălțime $2a$, lățime a, sub $60°$ $(BD = l)$. Se cere:

(1) Coeficientul de frecare μ_1, între bara AC și sol (între bara AB și prismă nefiind frecare),

(2) Coeficientul de frecare între bara AB și prismă (între bara AC și sol nefiind frecare în acest caz).

(3) Coeficientul de frecare μ_0 între prismă și sol ca aceasta să nu lunece în cazurile (1) și (2).

(4) Greutatea $P = ?$ a prismei ca ea să nu se răstoarne. Problema se va rezolva pentru figurile VI.6, *a*—*d*. La (*b*) și (*d*) se va lua $DB = \frac{2a}{3}$.

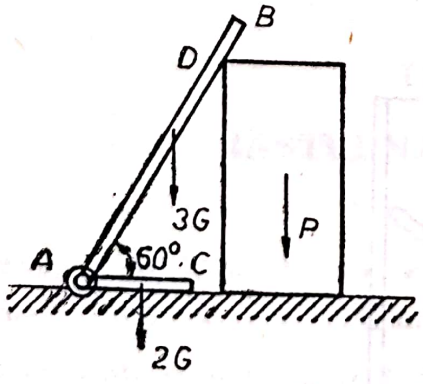


Fig. VI.6, *a*

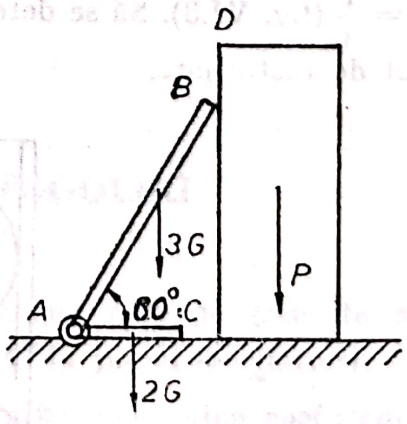


Fig. VI.6, *b*

Scanned with OKEN Scanner

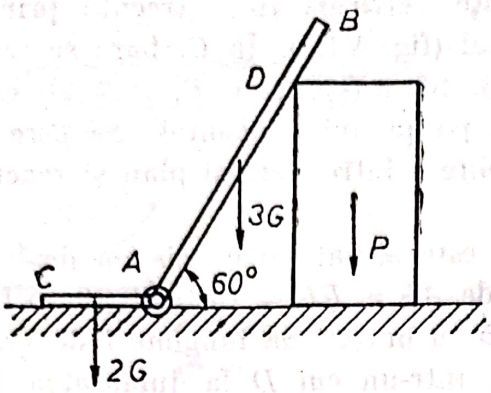


Fig. VI.6, c

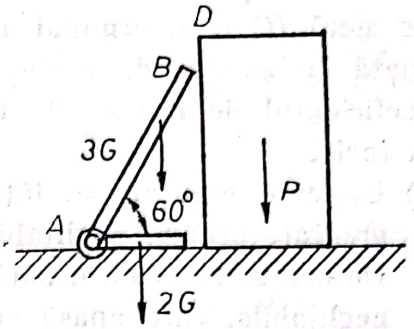


Fig. VI.6, d

7. a) O bară AB de greutate $2G$ și lungime $2l$ este articulată în A de o bară AC (greutate G, lungime l) în contact cu solul (fig. VI.7, *a*). Bara AB se reazemă sub 60° de un disc circular (greutate $3G$, rază R, $DB = \frac{l}{2}$). Se cere:

(1) Coeficientul de frecare μ_0 între bara AC și sol.

(2) Coeficientul de frecare de lunecare μ' și cel de rostogolire s între disc și sol.

b) La punctul (2) se cere coeficientul de frecare μ' în articulația O de rază r (fig. VI.7, *b*).

c) Se presupune frecare în D (fig. VI.7, *c*). Se cere μ_D și coeficientul de frecare la axul O de rază r (la bara AC nu e frecare cu solul).

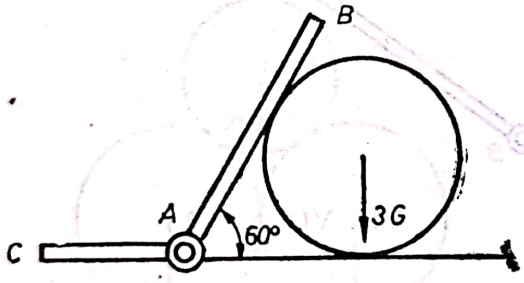


Fig. VI.7, a

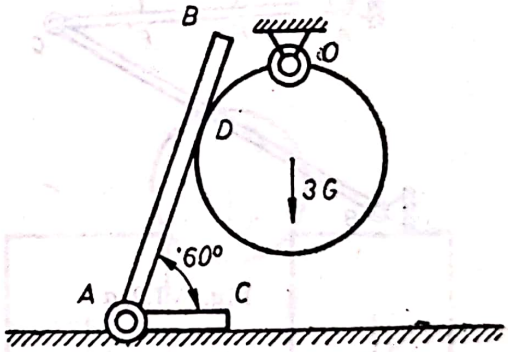


Fig. VI.7, b

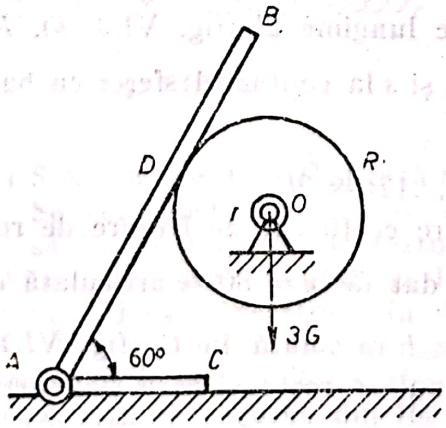


Fig. VI.7, c

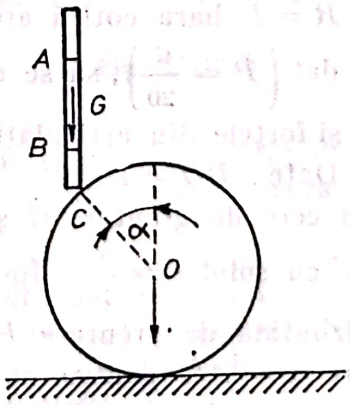


Fig. VI.8

Scanned with OKEN Scanner

8. Bara (greutate G, lungime l) este verticală fiind trecută prin două inele A, B prinse în planul vertical (fig. VI.8). În C, bara se reazemă pe sferă (C e determinat de $\sphericalangle \alpha$). Sfera (greutate P, rază R) este situată cu frecare de coeficient μ_0 pe planul orizontal. Se cere μ_0 și coeficientul de frecare de rostogolire s între sferă și plan și reacțiunile la inele.

9. a) Un cub (greutate G, lățime l) este situat pe un sistem de bare de greutate proprie neglijabilă, unde $AF = FE = EC = l$ (fig. VI.9, *a*). De cub se reazemă o bară cotită cu brațele de lungime l de greutate neglijabilă, care apasă cubul printr-un cui D la jumătatea laturii cubului și la extremitatea cealaltă lucrează o forță P.

(1) Se cere: P astfel încît cubul să fie pe punctul de răsturnare.

(2) Se cere: μ coeficientul de frecare între cub și bara AC ca să nu lunece.

(3) Forțele în articulații știind că $AB = 2l$.

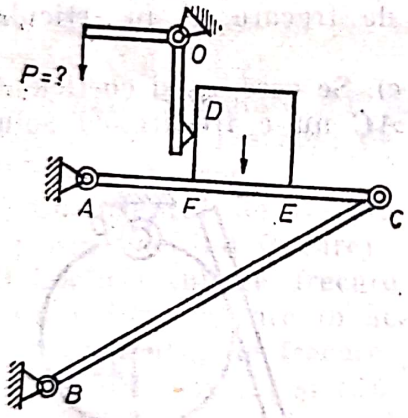


Fig. VI.9, *a*

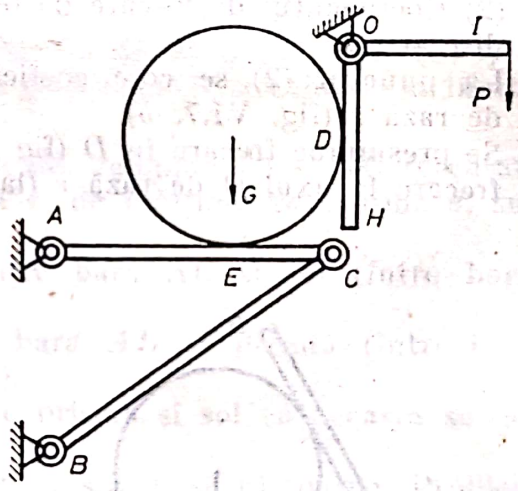


Fig. VI.9, *b*

b) Problemă analoagă dar în loc de cub e o sferă de greutate G, rază $R = l$, bara cotită are brațele de lungime $2l$ (fig. VI.9, *b*). P fiind dat $\left(P = \frac{G}{20}\right)$, să se determine μ și s la contactul sferei cu bara AC și forțele din articulații.

Date: $DO = l$, $EC = l$, $AC = 3l$, $AB = 2l$.

10 Un cerc de greutate G și rază R are coeficient de frecare de rostogolire cu solul $s = \frac{R}{10}$. În punctul A dat de $\alpha = 30°$ e articulată o bară orizontală de greutate P și lungime l rezemată în C (fig. VI.10). Se cere $x = AC$ pentru ca roata să nu se rostogolească și valoarea pe care o poate avea P.

Scanned with OKEN Scanner

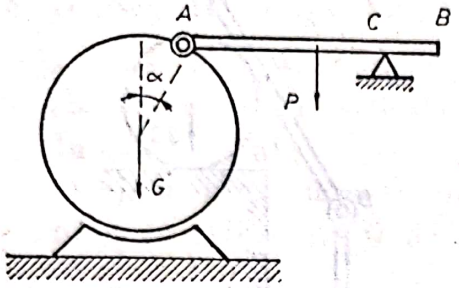


Fig. VI.10

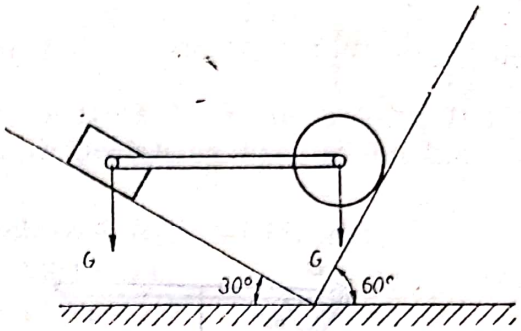


Fig. VI.11

11. a) Două corpuri: un cub și o sferă de aceeași greutate G au centrele legate printr-o bară fără greutate proprie și sînt situate pe două plane înclinate sub 30° respectiv 60°, bara fiind orizontală (fig. VI.11). Să se determine frecarea necesară cînd a') e frecare numai între cub și planul înclinat ($\mu_1 = ?$) sau a'') e frecare numai între sferă și plan ($\mu_2 = ?$) $s = ?$).

b) Aceeași problemă dar sfera este pe planul înclinat cu 30° și cubul pe cel înclinat cu 60°.

12. a) O sferă de rază r și greutate P este așezată pe două sfere egale de greutate G și rază R (fig. VI.12, a). Se cere coeficientul de frecare μ și cel de frecare de rostogolire s între sferele de jos și sol pentru echilibru la limită. (Sferele de jos pe punctul de despărțire).

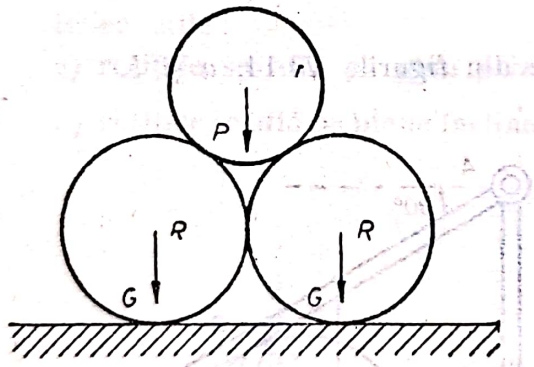


Fig. VI.12, a

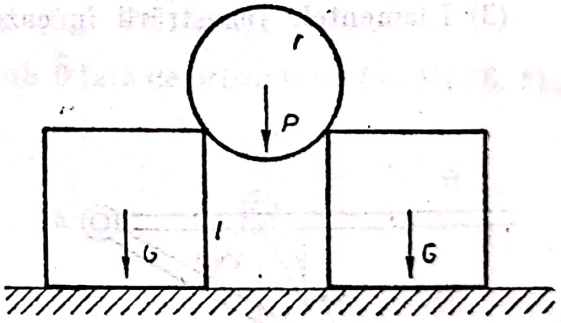


Fig. VI.12, b

b) Sfera de greutate P și rază r e așezată pe două cuburi (fig. VI.12, b). Se cere distanța d între cuburile de greutate G și latura l ca ele să fie pe punctul de răsturnare.

13. Două bare egale (greutate G, lungime $4l$), sînt articulate între ele în B. Bara AB este încastrată în A, iar bara BC se reazemă în D ($DC=l$) de sfera de greutate $3G$, rază R și face 60° cu orizontala. Să se determine: μ și s la baza sferei la echilibru și elementele mecanice ale încastrării în cazurile din figurile VI.13, a și b.

Scanned with OKEN Scanner

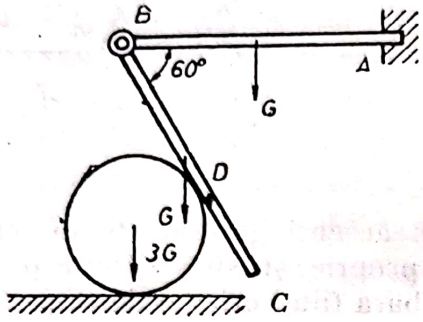


Fig. VI.13, *a*

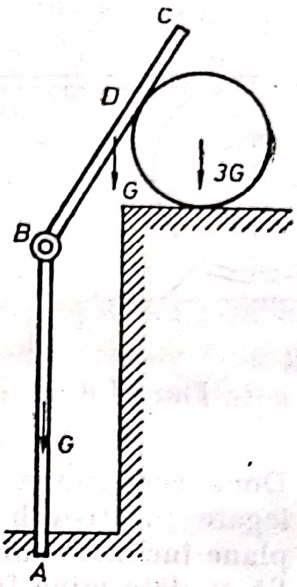


Fig. VI.13, *b*

14. Sfera de greutate G și rază R este situată pe planul înclinat cu 30° cu frecare $\left(\mu_0 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$. Se frînează sfera cu ajutorul barei AC paralelă cu planul înclinat de greutate $3G$, lungime $l\left(DC = \frac{l}{4}\right)$, articulată de AB ($3G$, l) care e încastrată în B.
Se cere:
(1) $\mu_D = ?$ la echilibru;
(2) $s = ?$ între sferă și plan;
(3) Elementele încastrării în cazurile din figurile VI.14, *a* și *b*.

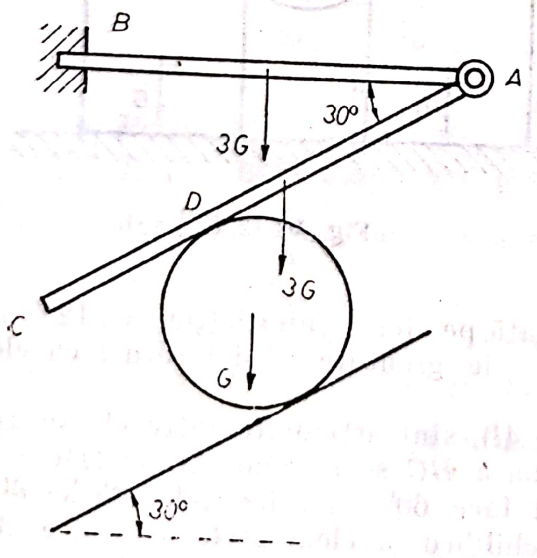


Fig VI.14, *a*

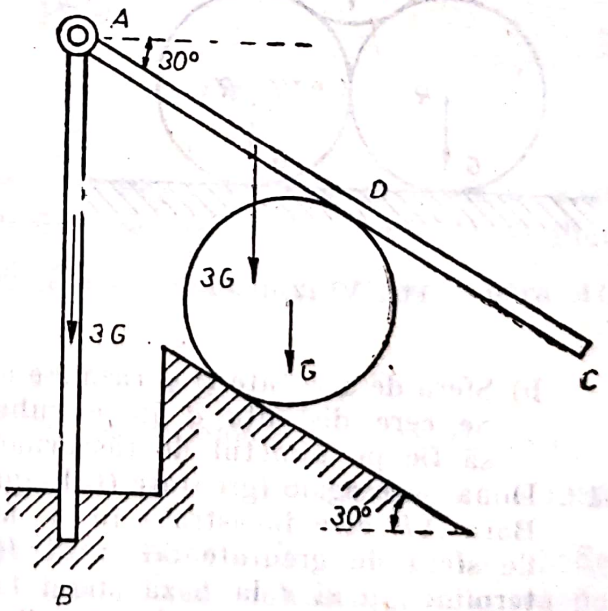


Fig. VI.14, *b*

Scanned with OKEN Scanner

15. O bară AC de greutate $3G$ și lungime l se sprijină în $B\left(BC=\frac{l}{4}\right)$ de o sferă de rază R, greutate G. Bara e trasă în A, de o forță P înclinată cu 60° cu verticala. Se cer: P; μ_B pentru ca bara să nu lunece. În cazul:

a) μ_D și s_D ca sfera să nu se rostogolească (fig. VI.15, *a*);

b) μ_0 în articulația O de rază r_0 (fig. VI.15, *b*).

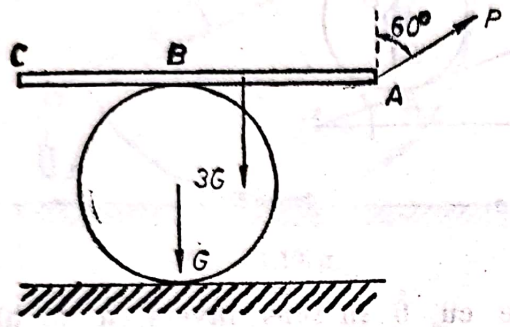


Fig. VI.15, *a*

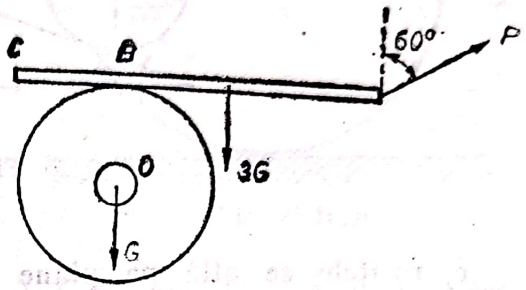


Fig. VI.15, *b*

16. Două bare egale de greutate G și lungime l sînt articulate între ele în A și montate articulat în B pe axele a două rotițe de greutate $4G$ și rază r. Barele se află sub $\sphericalangle\,\theta$ la echilibru. Se cere coeficientul de frecare μ_0 și coeficientul de frecare de rostogolire s la baza rotițelor în cazurile:

a) rotițele se află pe plan orizontal (fig. VI.16, *a*);

b) rotițele se află pe plane înclinate sub $\hat{\theta}$ față de orizontală (fig. VI.16, *b*);

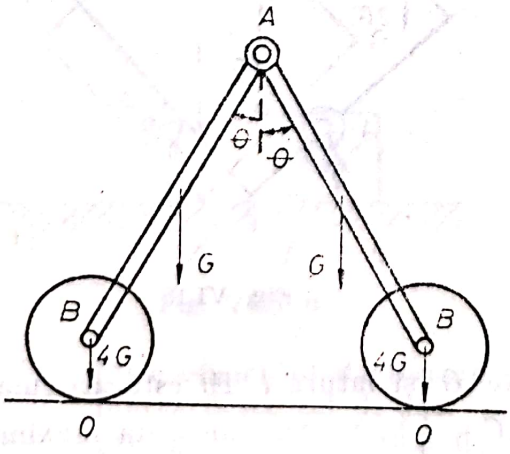


Fig. VI.16, *a*

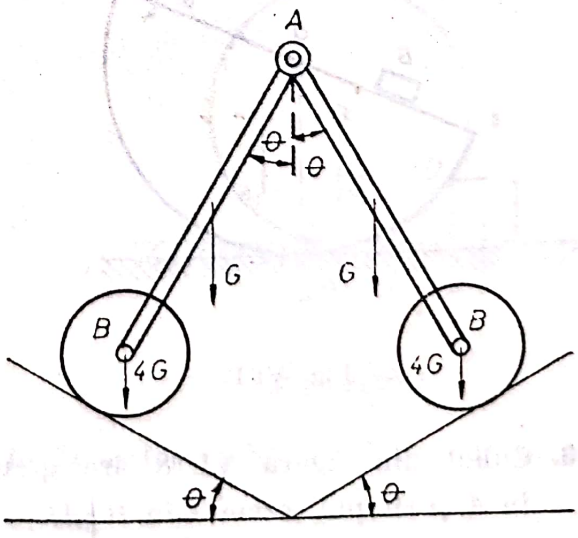


Fig. VI.16, *b*

Scanned with OKEN Scanner

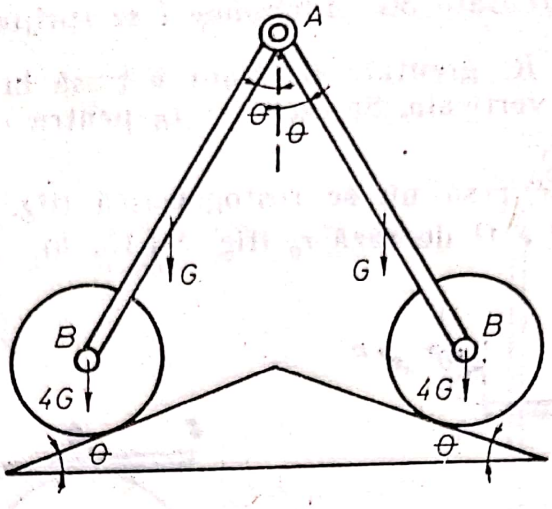


Fig. VI.16, *c*

c) rotițele se află pe plane înclinate cu $\hat{\theta}$ în sens invers ca în b) (fig. VI.16, *c*).

17. Pe emisfera de greutate G, rază R, frecare s de rostogolire cu planul, se așază un mic corp de greutate G cu frecare μ dată $\left(OC = \frac{3R}{8}\right)$ · C este centrul de greutate al emisferei (fig. VI.17). Să se determine distanța maximă $OB = x$ unde se poate așeza corpul și unghiul α al planului CD de secțiune al emisferei cu orizontala (v. II.16).

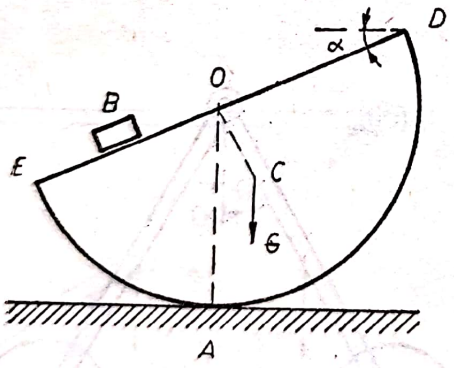


Fig. VI.17

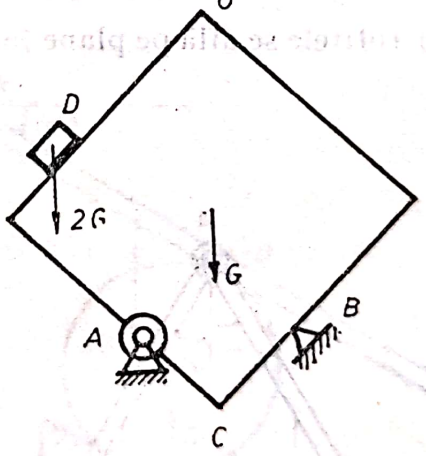


Fig. VI.18

18. Cubul din figura VI.18 are greutate G și latură l. El este articulat în A și simplu rezemat în $B\left(AC = BC = \frac{l}{4}\right)$. Se cere distanța maximă la care se poate așeza un mic corp de greutate $2G$ pe el. ($OD = x = ?$) și μ coeficientul de frecare între acest corp și cub.

Scanned with OKEN Scanner

19. a) Un mic corp de greutate G este prins cu un fir de o greutate $P = \frac{3}{5}\ G$ ca în figura VI.19, *a*. Corpul G este așezat cu frecare de coeficient μ pe o emisferă de greutate $2G$, rază R, la distanța $\frac{R}{2}$ de O. Să se deter-

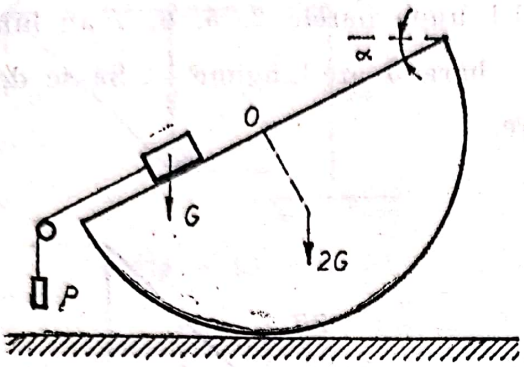


Fig. VI.19, *a*

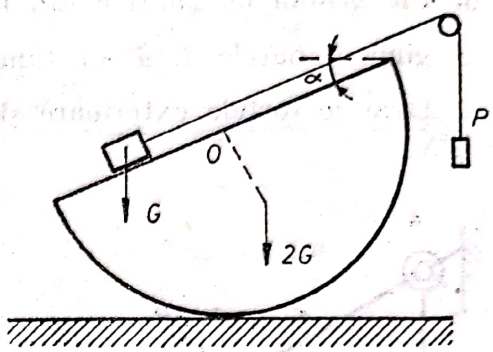


Fig. VI.19, *b*

mine coeficientul de frecare μ_0 și cel de frecare de rostogolire s între emisferă și sol pentru echilibru sub $\alpha = 30°$.

b) Aceeași problemă dar firul trece peste scripete în partea cealaltă (figura VI.19, *b*).

20. Un cub de greutate $P = 2G$, latură $l_1 = \frac{l\sqrt{2}}{4}$ susține un cub de greutate G, latură l sub $45°$ $\left(AD = \frac{l}{2}\right)$. Să se determine grafic și analitic:

a) (1) Forța $\bar{F}$ astfel încît cubul de sus să fie ridicat peste cel de jos (fig. VI.20, *a*).

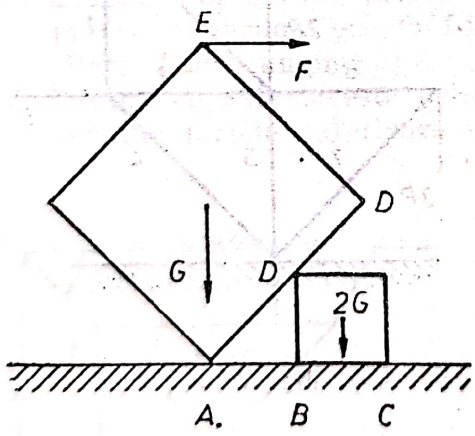


Fig. VI.20, *a*

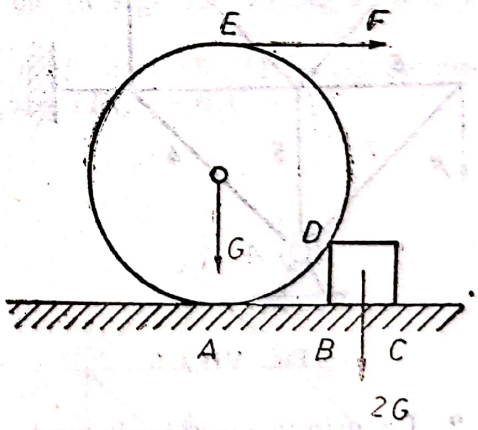


Fig. VI.20, *b*

(2) coeficientul de frecare μ_D în D astfel încît cubul de sus să nu lunece peste cel de jos.

(3) $\mu_0 = ?$ între cubul de jos și sol.

b) Analog, dar $\sphericalangle AOD = 60°$, $l = \frac{R}{2} = BC$ (fig. VI.20, *b*).

Scanned with OKEN Scanner

GRINZI CU ZĂBRELE

1. Fie grinda cu zăbrele din figura VII.1 unde barele *2*, *5*, *6*, *7* au lungime *l*, barele *1*, *4* au lungime $l\frac{\sqrt{3}}{2}$, bara *3* are lungime $\frac{l}{2}$. Să se determine forţele exterioare şi interioare.

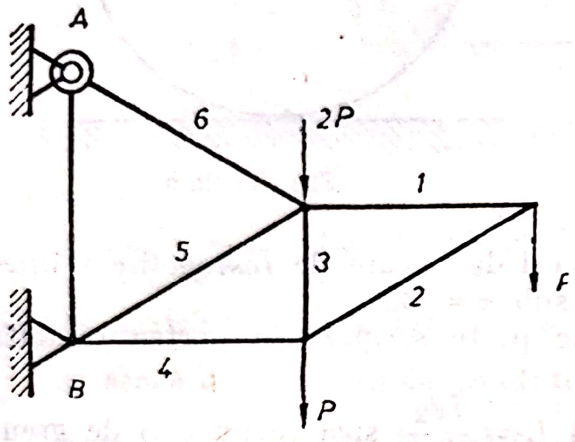


Fig. VII.1

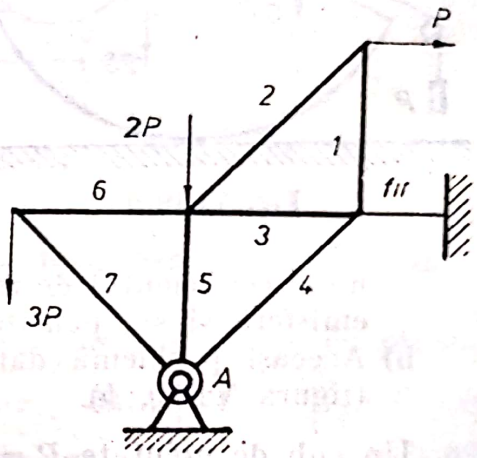


Fig. VII.2, *a*

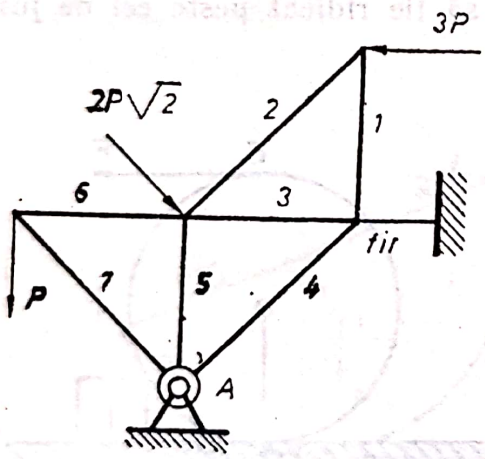


Fig. VII.2, *b*

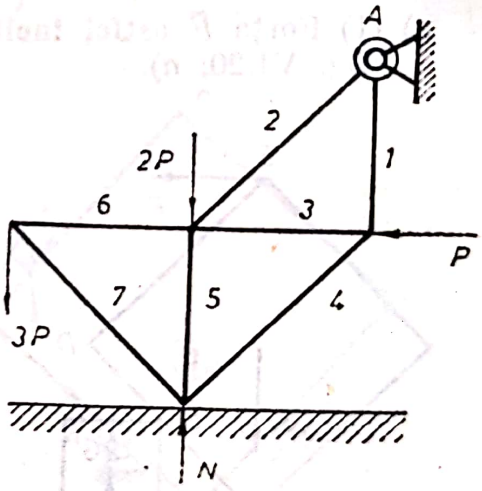


Fig. VII.2, *c*

2. La grinda cu zăbrele unde barele *1*, *3*, *5*, *6* au lungime *l*, iar barele *2*, *4*, *7* au lungime $l\sqrt{2}$, să se determine forţele interioare şi exterioare cînd grinda este rezemată şi încărcată ca în figurile VII.2, *a*, *b* şi *c*, $2P\sqrt{2}$ făcînd unghiul de 45° cu *6*.
3. Să se determine prin metoda Ritter forţa din bara *5*, la grinda cu zăbrele din figura VII.3 unde barele *2*, *4*, *5*, *6* au lungime *l*, iar unghiurile au valori de 45° respectiv 90°.

Scanned with OKEN Scanner

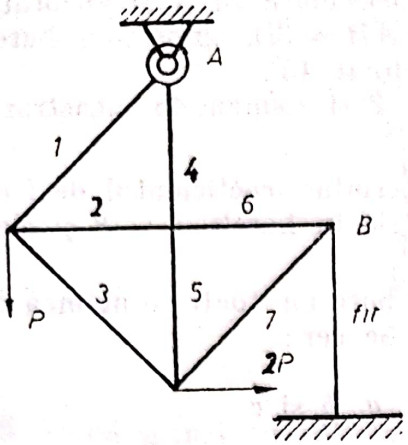


Fig. VII.3

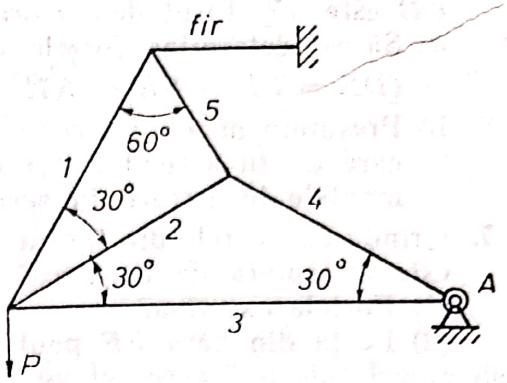


Fig. VII.4, *a*

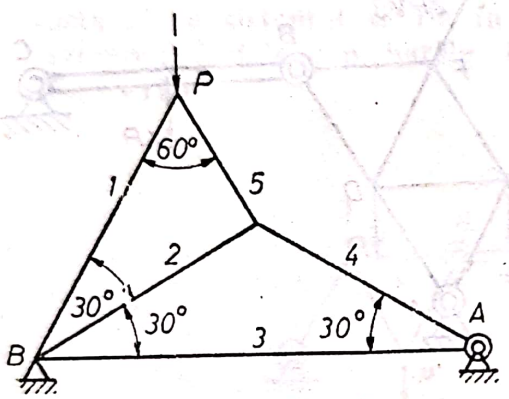


Fig. VII.4, *b*

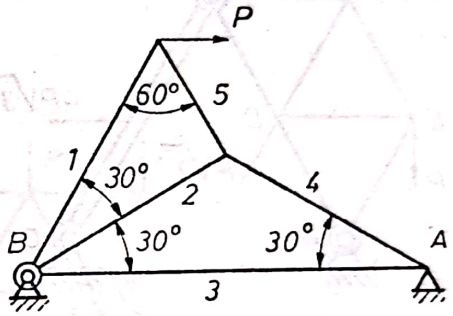


Fig. VII.4. c

4. Să se determine forţele exterioare la grinda cu zăbrele din figura VII.4 şi forţa din bara *4* prin metoda Ritter, să se verifice prin metoda separării nodurilor, grinda fiind încărcată ca în figurile VII.4, *a*, *b* şi *c* (Bara *1* are lungime *l*).
5. Grinda cu zăbrele este prinsă prin firele *a*, *b*, *c* (fig. VII.5). Să se determine forţele exterioare şi cele interioare ($BC = BA = l$).

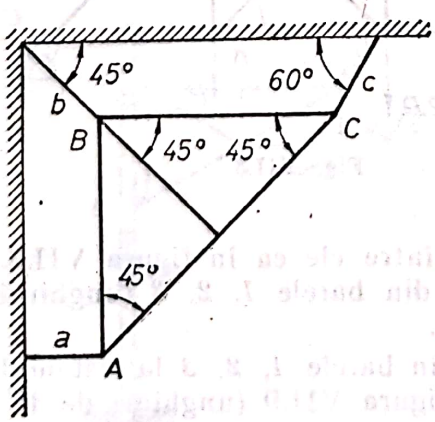


Fig. VII.5

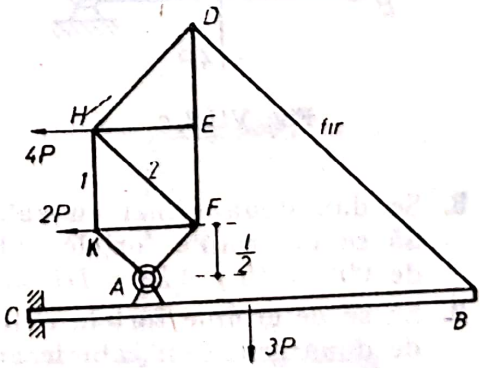


Fig. VII.6

Scanned with OKEN Scanner

6. Se dă grinda cu zăbrele din figura VII.6 articulată în A și ancorată în B de bara CB încastrată în C ($AC = l$, $AB = 3l$), greutatea barei CB este $3P$. Firul de ancorare BD este înclinat 45°.
   a) Să se determine forțele din barele *1* și *2* și elementele încastrării ($DE = EF = FK = KH = HE = l$).
   b) Presupunem că se rupe firul, să se determine coeficientul de frecare μ_A în articulația A de rază r_A, forțele în barele *1* și *2* și elementele încastrării în acest caz.

7. Grinda cu zăbrele din figura VII.7 (ale cărei bare au toate lungimea l) este articulată de bara BC de lungime $2l$. Se cer:
   (1) Forțele exterioare
   (2) Forța din bara EF pentru figurile VII.7, *a*, *b* și *c*.

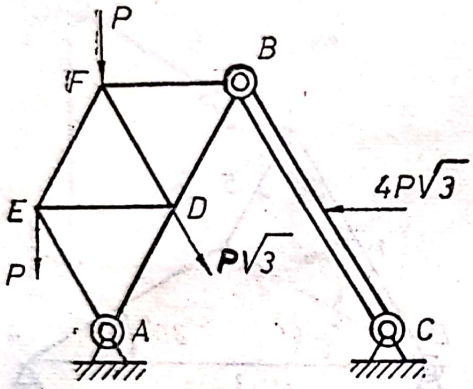


Fig. VII.7, *a*

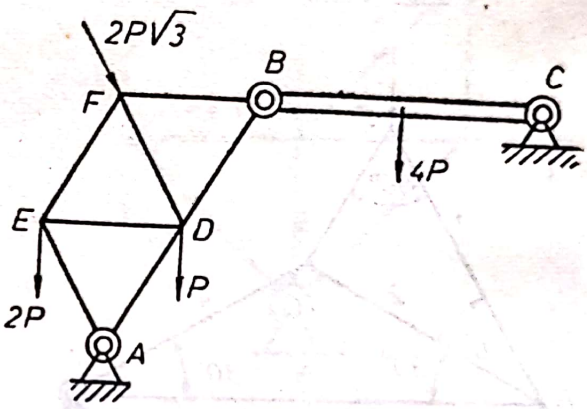


Fig. VII.7, *b*

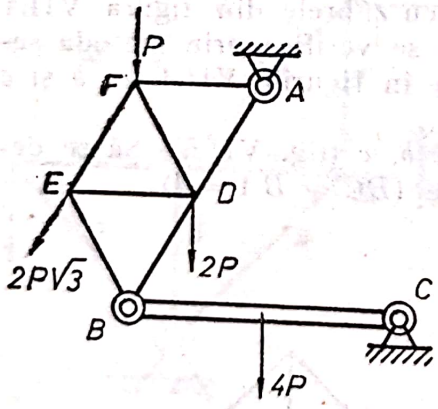


Fig. VII.7, *c*

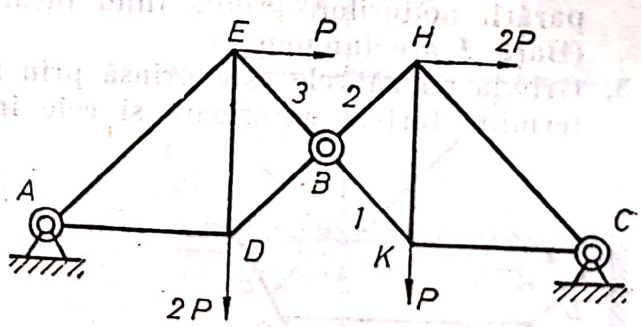


Fig. VII.8

8. Se dau două grinzi cu zăbrele articulate între ele ca în figura VII.8. Să se determine forțele exterioare și cele din barele *1*, *2*, *3* (unghiuri de 90° și 45°) $AD = DE = HK = KC = l$.
9. Să se determine forțele exterioare și cele din barele *1*, *2*, *3* la sistemul de două grinzi cu zăbrele articulate ca în figura VII.9 (unghiuri de 45° respectiv 90°). $AD = DB = BE = EC = l$.

Scanned with OKEN Scanner

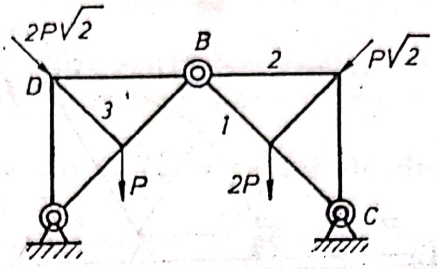


Fig. VII.9

10. Două grinzi cu zăbrele au toate barele de lungime l și sînt legate de bara BC de lungime $3\frac{l}{2}$ încărcată cu $3P$ în H $\left(BH = \frac{l}{2}\right)$. Se cere: forța F ca sistemul să fie în echilibru; forțele exterioare; forțele interioare; forțele din barele *1* și *2* și felul de solicitare al barei CB (fig. VII.10).

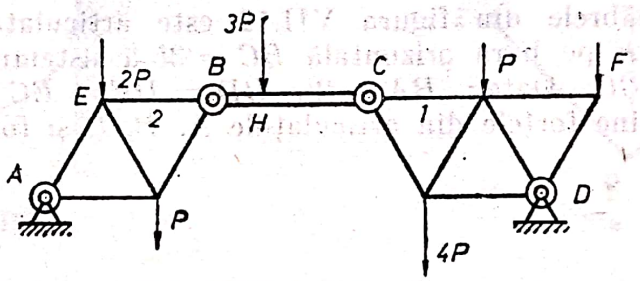


Fig. VII.10

11. Grinda cu zăbrele din figura VII.11 este articulată în A și rezemată în B de o bară de greutate $2P$ și lungime $4l$ încastrată în E. (Barele $AB = BC = CA = CD = l$). Să se determine: forța din bara AC; forțele exterioare grinzii cu zăbrele din A și B; elementele încastrării. Problema se rezolvă pentru figurile VII.11, *a* și *b*, unde la: a) $BE = 2l$; b) $AE = 2l$.

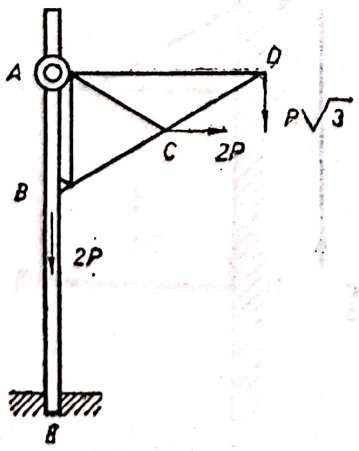


Fig. VII.11, *a*

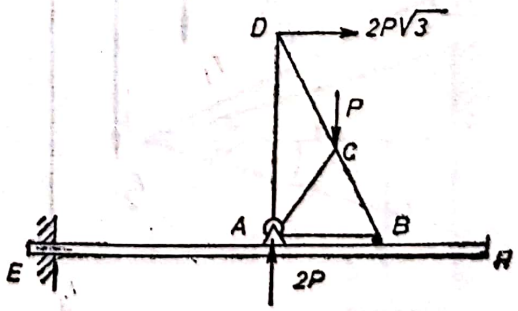


Fig. VII.11, *b*

Scanned with OKEN Scanner

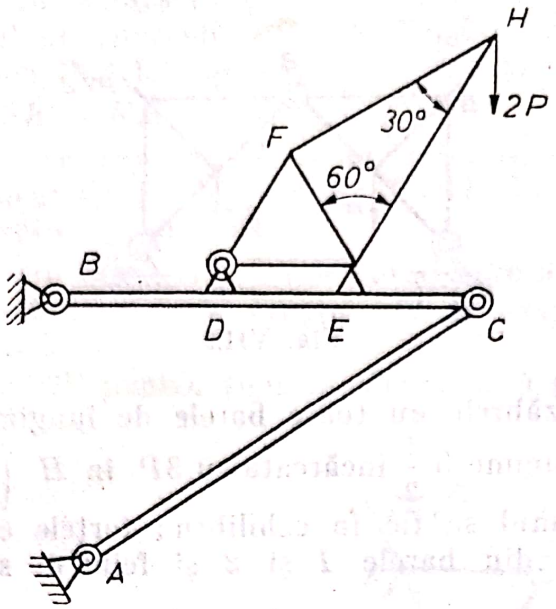


Fig. VII.12

12. Grinda cu zăbrele din figura VII.12 este articulată în D şi simplu rezemată în E pe bara orizontală $BC = 3l$ a sistemului de două bare articulate ABC. Date: $BA = 2l$, $BD = DE = EC = DF = FE = l$. Să se determine forţele din articulaţiile A, B, C şi forţa din bara FH.

Capitolul VIII

METODE GRAFICE

1. a) Să se determine forma firului care uneşte greutăţile din figura VIII.1 ştiind că porţiunea din fir dintre F_2 şi F_3 face 30° cu orizontala şi tensiunea din el este $f_3 = 3P$.

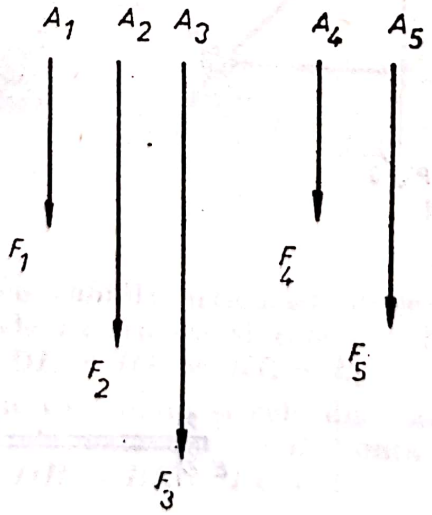


Fig. VIII.1

Date: $F_1 = F_4 = P$; $F_2 = F_5 = 2P$; $F_3 = 3P$; $A_1A_2 = A_2A_3 = A_4A_5 = l$; $A_3A_4 = 2l$.

Să se determine grafic poziția rezultantei forțelor F_i și să se verifice analitic. Să se determine tensiunea maximă și cea minimă din porțiunile de fir (f_i).

b) Aceeași problemă, dar se cere ca forțele din porțiunile extreme de fir să aibă valorile $f_1 = 9P$ și $f_6 = 9P$.

c) Aceeași problemă cu condiția ca porțiunea extremă de fir din stînga să fie înclinată cu 30°, iar cea din dreapta 60° cu verticale.

2. Să se găsească punctul de aplicare, mărimea și direcția forței F minime care ține în echilibru sfera în contact cu peretele vertical cu frecare (μ dat). Sfera are greutatea G și raza R (fig. VIII.2). *Discuție.*

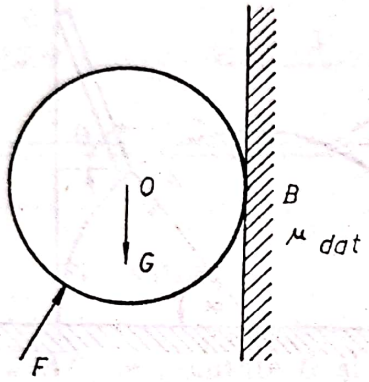


Fig. VIII.2

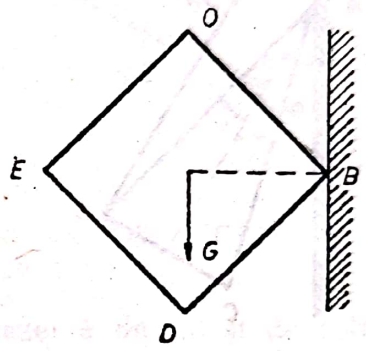


Fig. VIII.3

3. Fie un pătrat de greutate G și latură l rezemat cu frecare pe peretele vertical (μ dat). Să se determine forța F minimă ca poziție, direcție și mărime ca să țină pătratul în echilibru ca în figura VIII.3.

4. Să se determine tensiunea în firul care prinde placa pătrată de greutate G și latură l, de peretele cu frecare (μ dat), la limita răsturnării. Să se determine lungimea HE a firului cînd tensiunea în fir este minimă (fig. VIII.4).

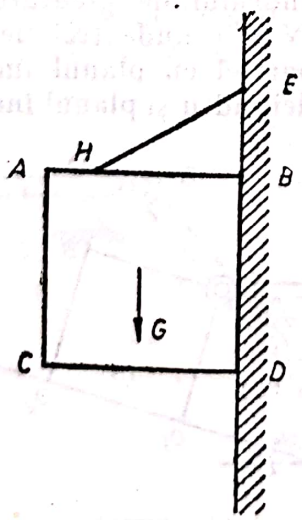


Fig. VIII.4

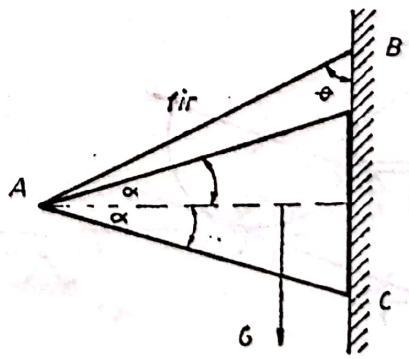


Fig. VIII.5

Scanned with OKEN Scanner

5. Un con de greutate G, înălțime h, deschidere la vîrf 2α, se sprijină ca în figura VIII.5. Să se determine θ unghiul firului care leagă conul cu peretele vertical, astfel încît el să fie la limita echilibrului. Se cere tensiunea T în fir (fără frecare).

6. Conul de greutate G, înălțime h, deschidere 2α este legat cu firul BD astfel încît să stea sub $\hat{\beta}$ față de perete, fără frecare. Se cere tensiunea T în fir și $\sphericalangle\theta$ al firului cu verticala (fig. VIII.6).

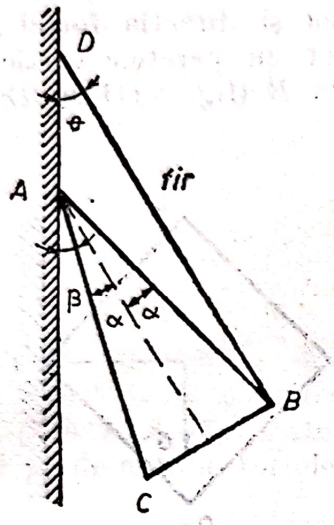


Fig. VIII.6

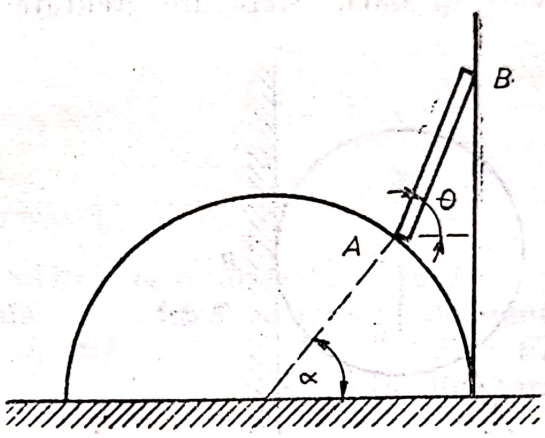


Fig. VIII.7

7. a) Bara AB de greutate G și lungime l se reazemă fără frecare de o emisferă de rază R și de un perete vertical (fig. VIII.7). Să se determine $\hat{\theta}$ cunoscînd pe $\hat{\alpha}$.

b) Aceeași problemă dar bara are frecare fie în A, fie în B, să se discute tendințele de lunecare ale barei.

8. O bară AA' de lungime l și greutate P poate fi articulată într-un punct oarecare al diametrului AB al semicilindrului de greutate G și rază R din figura VIII.8. Se cere distanța $AN = x$ unde trebuie rezemată bara ca ea să fie orizontală, iar AB paralel cu planul înclinat. Se cere coeficientul de frecare $\mu_C = ?$ între semicilindru și planul înclinat. *Discuție.*

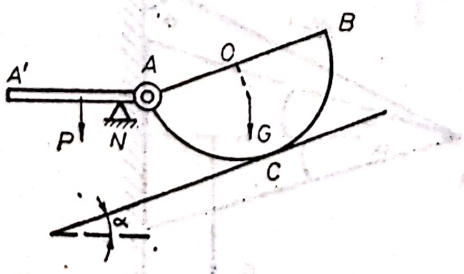


Fig. VIII.8

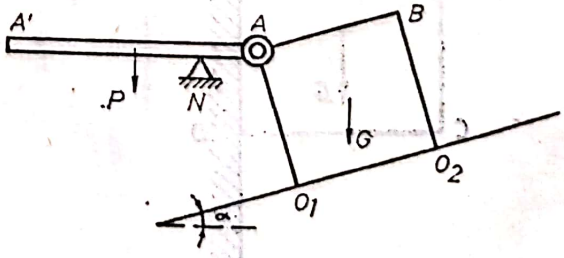


Fig. VIII.9

Scanned with OKEN Scanner

9. Bara AA' de greutate P și lungime a poate fi articulată într-un punct oarecare al laturii AB a cubului de greutate G și latură l care e situat pe planul înclinat (fig. VIII.9). Bara trebuie să rămînă orizontală. Să se determine unde ($AN = x$) trebuie rezemată astfel încît cubul să nu se răstoarne. Se cere frecarea ca el să nu lunece pe planul înclinat. *Discuție.*

10. Să se determine pe cale grafică forțele din firele fără greutate proprie care țin grinda din figura VIII.10, de greutate P, lungimea $8l$, unde $AB = 5l$; $BC = 3l$, iar firele fac unghiurile din figură. Să se verifice analitic.

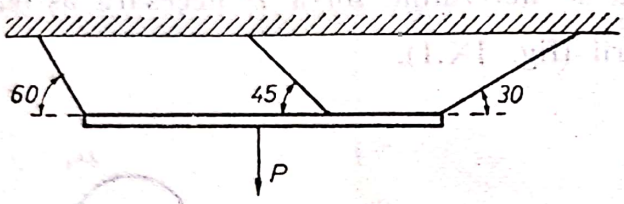


Fig. VIII.10

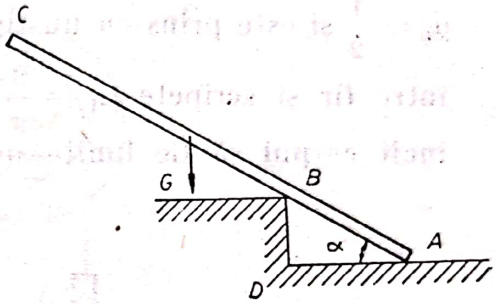


Fig. VIII.11

11. Bara AC de greutate G și lungime l se reazemă de sol și de colțul B. La echilibru stă sub $\sphericalangle \alpha$. Înălțimea $BD = h$ (fig. VIII.11). Se cere grafic frecarea fie în A, fie în B pentru echilibru în cazurile cînd l este astfel încît:

a) G este la stînga lui B;

b) G este chiar în B;

c) G este la dreapta lui B.

12. Două bare: AB de greutate G și lungime l, și BC de greutate P și lungime a, sînt articulate între ele în B. În A este articulație fixă. Bara AB face unghiul α cu orizontala iar BC e rezemată în D astfel încît este orizontală. Se cere poziția reazemului D astfel încît bara BC să fie orizontală atît în cazul din figura VIII.12, *a* cît și în cazul din figura VIII.12, *b*.

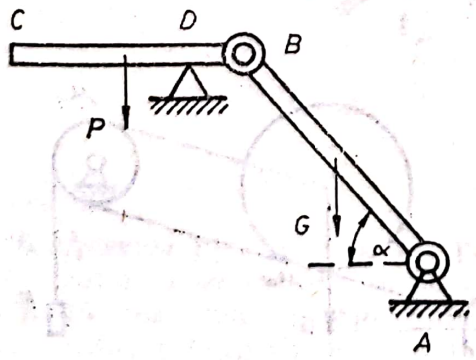


Fig. VIII.12, *a*

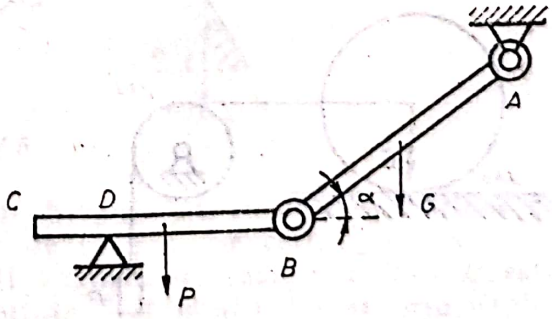


Fig. VIII.12, *b*

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

FIRE

A. FIRE CU FRECARE

1 Un corp de greutate G este situat pe un plan orizontal cu frecare $\mu_0 = \frac{1}{2}$ și este prins cu un fir care trece peste un scripete fix cu frecare între fir și scripete $\mu_1 = \frac{3}{\pi}$. Să se determine forța P necesară astfel încît corpul să fie limita mișcării (fig. IX.1).

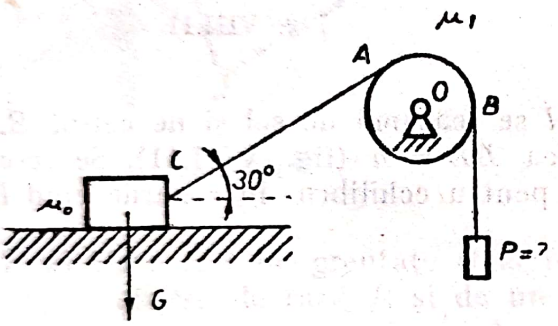


Fig. IX.1

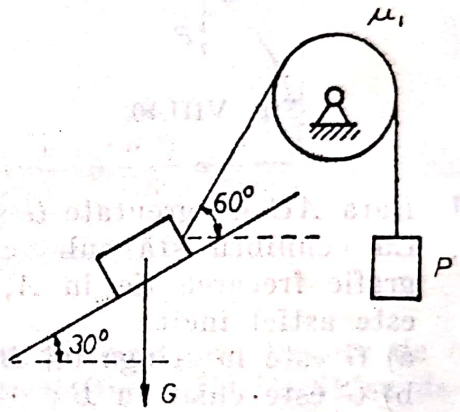


Fig. IX.2

2. Aceeași problemă dar corpul G este situat pe plan înclinat cu 30° față de orizontală (fig. IX.2).

3. a) O roată de greutate G și rază R e situată pe un plan orizontal cu coeficient de frecare μ_0 și cu frecare de rostogolire $s = \frac{R}{10}$ (fig. IX.3, *a*).

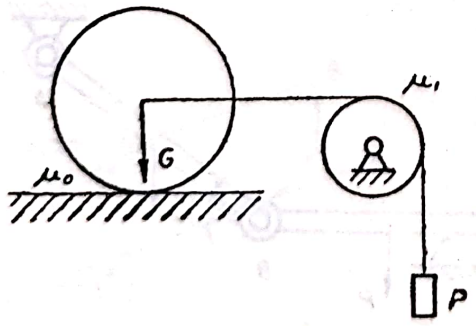


Fig. IX.3, *a*

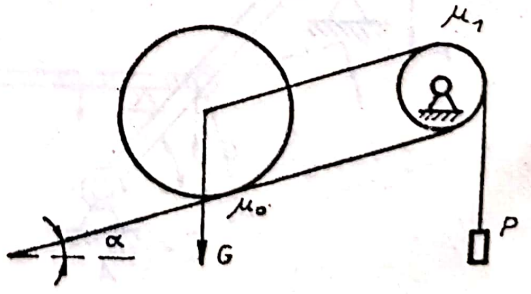


Fig. IX.3, *b*

Scanned with OKEN Scanner

Se cere forţa P care prinde firul care trece cu coeficientul de frecare $\mu_1 = \frac{2}{\pi}$ peste scripete astfel încît roata să înceapă să se rostogolească. Se cere $\mu_0 = ?$ ca să nu lunece în acest timp.

b) Aceeaşi problemă pe plan înclinat cu $\sphericalangle \alpha$, şi firul paralel cu planul (fig. IX.3, *b*).

4. Peste troliul din figura IX.4 compus din două roţi solidare de raze r şi $R = 2r$ şi de care atîrnă un fir cu G la capăt, este trecut un fir care se freacă de scripetele A cu frecare $\mu = \frac{2}{\pi}$ şi de care atîrnă P. Să se determine P la echilibru.

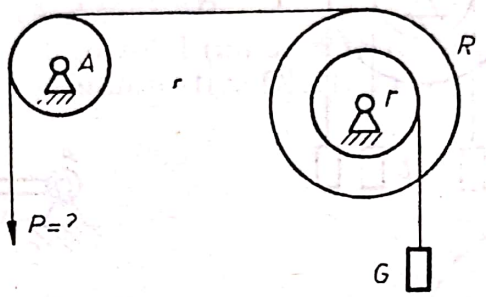


Fig. IX.4

5. O roată de greutate neglijabilă şi rază R susţine un cablu cu frecare $\mu = \frac{1}{\pi}$. De cablu sînt prinse greutăţile G (dat) şi P (fig. IX.5). Se cere: P la limita mişcării; s (coeficientul de frecare de rostogolire între roată şi sol); μ_0 (coeficientul de frecare de lunecare la sol). Să se rezolve problema în cazurile ambelor sensuri de mişcare posibile.

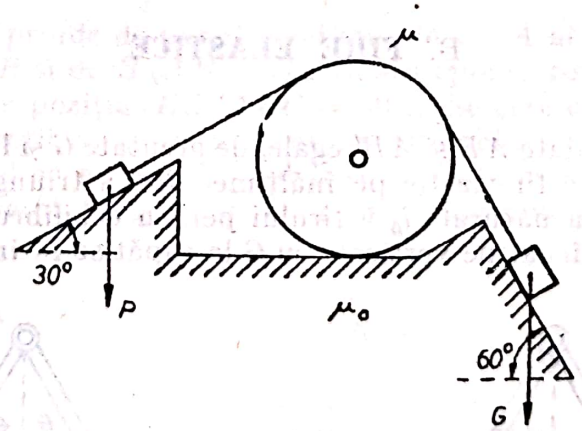


Fig. IX.5

6. Aceeaşi problemă 5 dar presupunem că roata nu se află în contact cu solul ci se roteşte în jurul unui ax de rază r_0. Se cere μ_0 la ax.

7. Pe un troliu compus din două roţi solidare de raze r şi $R = 2r$ este înfăşurat un fir de care atîrnă o greutate G. Troliul e frînat prin cablul cu coeficientul de frecare $\mu = \frac{2}{\pi}$ de care atîrnă P. Se cere: P pentru

Scanned with OKEN Scanner

frînarea troliului și forța $\bar{F}$ la capătul barei articulate de greutate neglijabilă și lungime l, pentru echilibru, pentru :
a) cazul din figura IX.7 ; b) cazul cînd firul care susține pe G e înfășurat în sens contrar (punctat pe figură) $\left(AC = 3\,\frac{l}{4};\ CB = \frac{l}{4}\right)$.

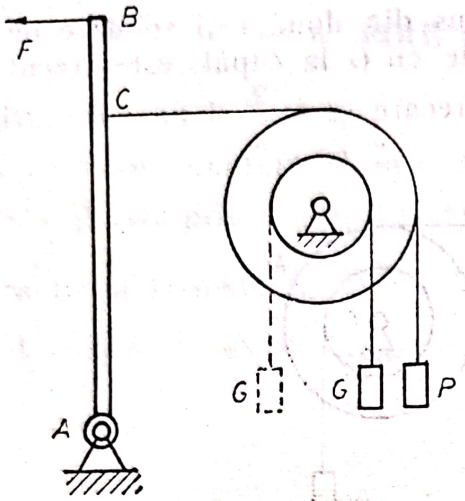


Fig. IX.7

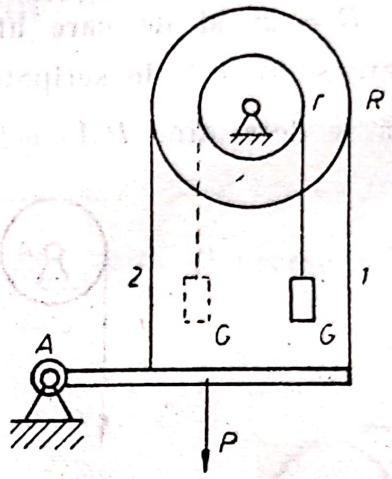


Fig. IX.8

8. Un troliu de raze r și $R = 2r$ susține greutatea G și este frînat prin cablul cu frecare $\mu = \frac{1}{\pi}$ care are capetele prinse de bara articulată, de greutate P și lungime $3R$. Se cere P pentru frînare pentru cele două sensuri de rotație posibile date de G (cazul G la dreapta sau G la stînga, punctat pe figura IX.8).

B. FIRE ELASTICE

9. Două bare articulate AB și AB' egale, de greutate G și lungime l sînt ținute sub 60° printr-un fir elastic pe înălțimea BC a triunghiului (fig. IX.9). Se cere lungimea naturală l_0 a firului pentru echilibru în această poziție știind că firul atîrnat pe verticală cu G la capăt se întinde cu l.

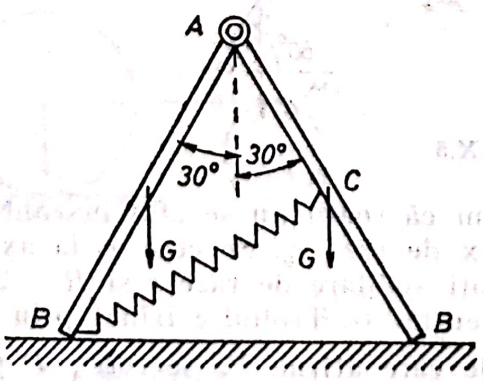


Fig. IX.9

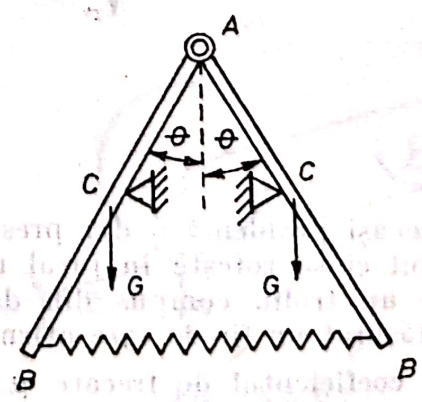


Fig. IX.10

Scanned with OKEN Scanner

10. Un fir elastic în care $K = \frac{G}{l}$ având $l_0 = \frac{l}{2}$ e prins de capetele B ale barelor AB de greutate G și lungime l care stau sub $\theta = 30°$ ca în figura IX.10. Se cere:

a) poziția reazemelor ($AC = x = ?$) pentru echilibru în această poziție;

b) cît ar trebui să fie l_0, cînd reazemele sînt la $AC = \frac{l}{4}$ pentru ca θ să fie tot 30°.

11. a) Un fir elastic de lungime naturală $l_0 = R$ având $K = \frac{3G}{R}$ e prins ca în figura IX. 11, *a* de o roată de greutate $20G$, rază R, care se poate roti în jurul axei de rază r. Se cere coeficientul de frecare μ la ax pentru echilibru știind că $AB = 2R$.

b) Roata e în contact cu solul (nu se rotește în jurul axului). Se cere μ_0 și s la sol pentru echilibru (fig. IX.11, *b*).

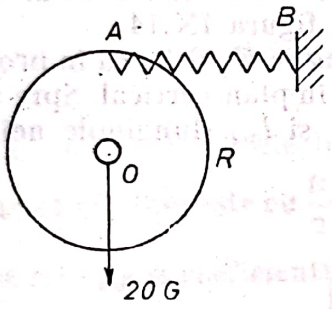


Fig. IX.11, *a*

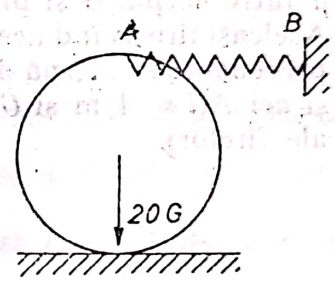


Fig. IX.11, *b*

12. a) Un fir elastic neîntins are lungimea naturală $l_0 = R$. Dacă este atîrnat vertical cu greutate G la capăt se întinde cu $\Delta l_0 = \frac{R}{3}$ (fig. IX. 12). Acest fir se prinde de punctul cel mai de sus A al unei roți de greutate $4G$ și rază R și de B ($AB = R$). Roata apoi se rotește astfel încît firul se întinde în poziția BC ($ABC = 30°$). Se cere coeficientul de frecare μ_0 la axul roții ca aceasta să nu se rotească.

b) Presupunînd că nu există axul O și că roata e în contact cu solul orizontal (punctat tangent în D) să se determine μ_0 și s la sol pentru echilibru.

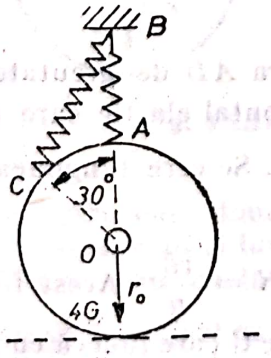


Fig. IX.12

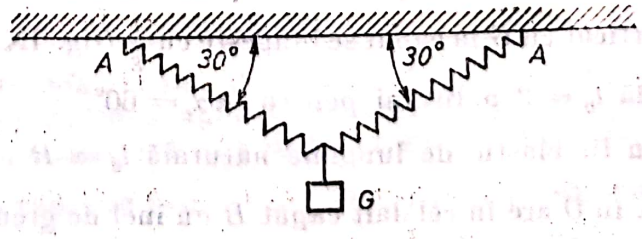


Fig. IX.13

13. a) Două fire elastice identice de lungime naturală $l_0 = \frac{2l}{3}$ se atîrnă în plan vertical în A și B ($AB = 2l$) și prind greutatea G. La echilibru se întind astfel încît fac cu orizontala $\sphericalangle \alpha = 30°$ (fig. IX.13). Să se determine ce se petrece în momentul inițial cînd se taie unul din fire.

b) Aceeași problemă cu $AB = 2l$; $l_0 = \frac{2l}{3}$ dar se presupune că unghiul cu orizontala la echilibru este de 60°. *Discuție.*

14. a) Două fire elastice *(1)* și *(2)* au lungimile naturale de $l_0 = 2$ m. Firul *1* atîrnat vertical cu G la capăt se lungește cu $\frac{2}{3}$ m, iar firul *2* în aceleași condiții cu $\frac{1}{4}$ m. Firele se așază pe o masă orizontală și se prind fix de ea în A și B ($AB = 5$ m). Celelalte capete se prind de un mic corp G. Firele se întind pînă ce firul *1* are 4 m, iar firul *2* are 3 m.
Tot sistemul e situat pe masa orizontală. Se cere coeficientul de frecare μ între corpul G și plan pentru poziția din figura IX.14.

b) Aceleași fire avînd aceiași coeficienți de alungire K_1 și K_2 ca în problema precedentă se atîrnă de A și B ($AB = 5$ m) în plan vertical. Spre a avea și aci $AG = 4$ m și $GB = 3$ m se cere $l_{0'}$ și $l_{0''}$ (lungimile neîntinse ale firelor).

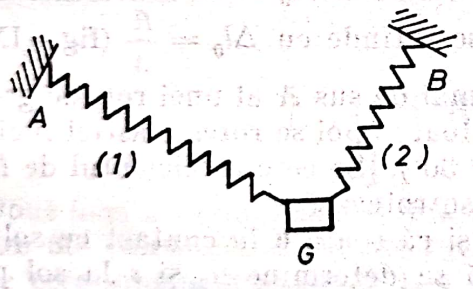


Fig. IX.14

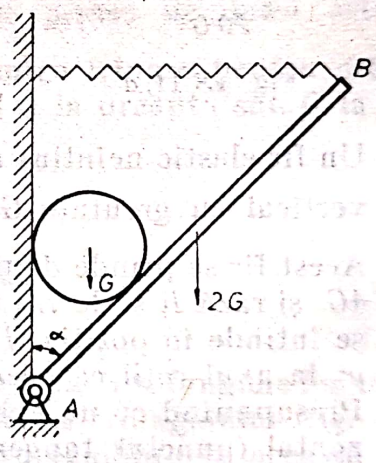


Fig. IX.15

15. Sfera de greutate G și rază R se reazemă pe bara AB de greutate $2G$ și lungime $l = 4R$. Sistemul e prins cu un fir orizontal elastic care atîrnat vertical cu G la capăt se lungește cu $\frac{l}{8}$ (fig. IX.15). Se cere lungimea naturală $l_0 = ?$ a firului pentru $\sphericalangle \alpha = 60°$.

16 Un fir elastic de lungime naturală $l_0 = R$ are $K = \frac{4G}{R}$. Acest fir prins fix în O are în celălalt capăt B un inel de greutate G care lunecă cu frecare de coeficient μ_B pe cercul de rază R și greutate $2G$ ($OB = 2R$). Se cere μ_B.

Scanned with OKEN Scanner

Se cere μ_A în articulația A de rază r_A pentru echilibru ca în figură, precum și elementele mecanice, ale încastrării în cazurile ilustrate în figurile IX.16, *a* și *b*.

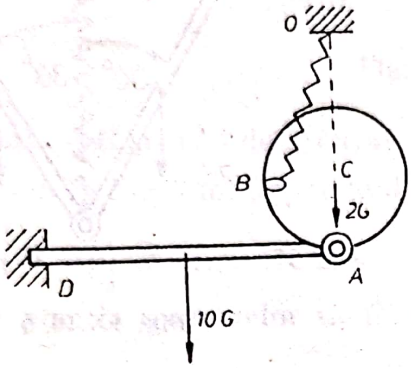


Fig. IX.16, *a*

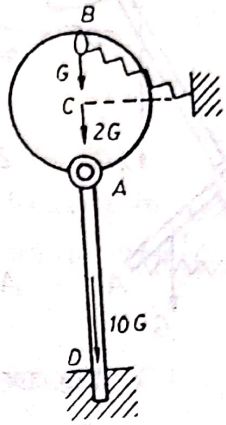


Fig. IX.16, *b*

17. Fie un fir elastic de lungime naturală $l_0 = R$. Atîrnat vertical cu G la capăt se alungește cu $\frac{R}{2}$. Firul este prins fix în A iar în B de o greutate G. Se cere μ_B și coeficientul μ_0 la axul roții de rază $r_0 = \frac{R}{10}$, roata avînd greutate G și rază R și $AB = R\sqrt{3}$ (AB tangent la roată) în cazurile din figurile IX.17, *a* și *b*.

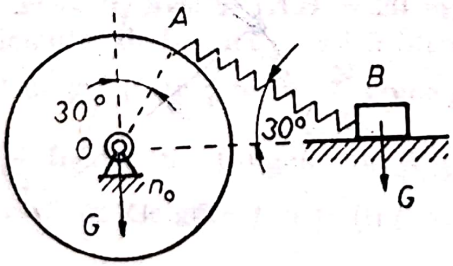


Fig. IX.17, *a*

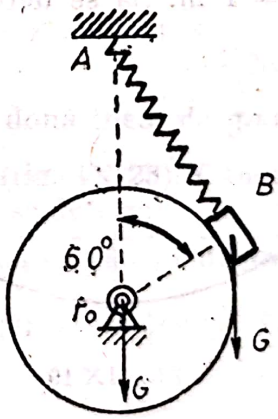


Fig. IX.17, *b*

18. Fie patru bare două cîte două egale: AB de greutate G și lungime l, BC de greutate $2G$ și lungime $2l$. Sistemul este situat în plan vertical. Pentru a sta sub 30° ca în figură sistemul este prins cu fire elastice. Aceste fire atîrnate vertical cu G la capăt se întind cu $\frac{l}{4}$. Se cere l_0=? lungimea natu-

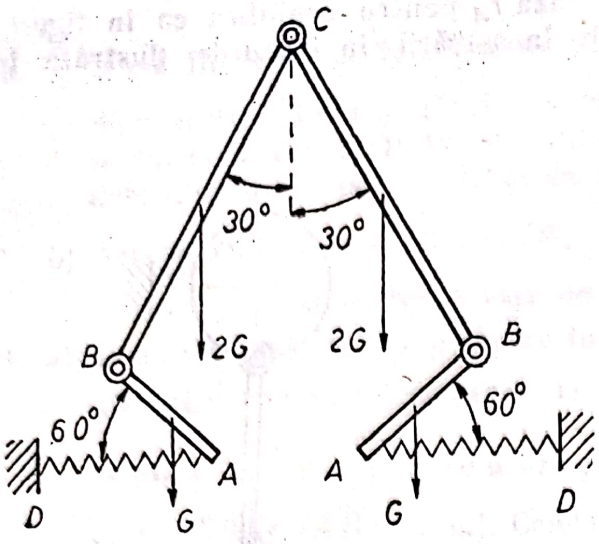


Fig. IX.18, *a*

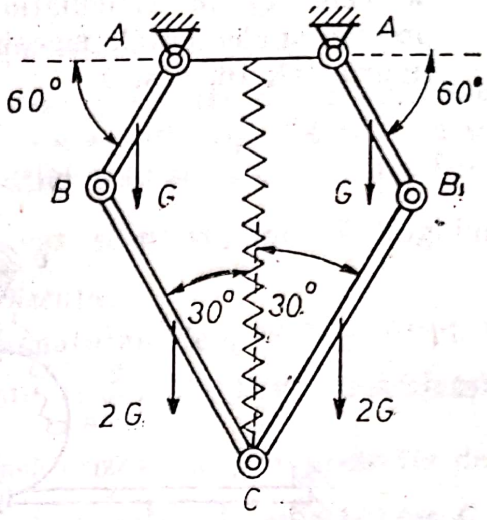


Fig. IX.18, *b*

rală a firului elastic pentru poziția de echilibru din figură în cazurile:
a) unde $AD = l$ și C este articulație fixă în planul vertical (fig. IX.18, *a*);
b) unde C este mobil (fig. IX.18, *b*).

C. FIRUL GREU

19. Firul atîrnat în A și B ($AB = 100$ m) are greutate $q = 0{,}05 \frac{N}{ml}$ și săgeata $f = 1$ m. Să se determine tensiunea maximă T_{max} în fir (fig. IX.19).

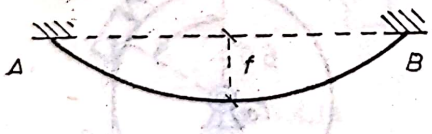


Fig. IX.19

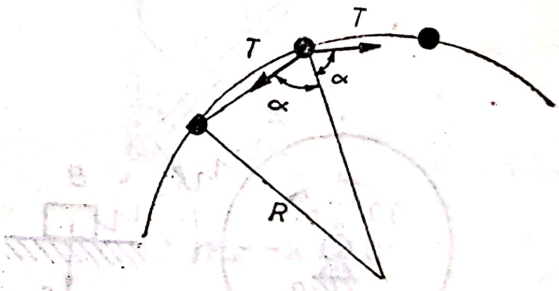


Fig. IX.20

20. Într-o curbă de rază $R = 200$ m sînt situați stîlpi la 40 m între ei care susțin fire electrice (fig. IX.20). Săgeata $f = 0{,}2$ m, iar $q = 1{,}5 \frac{N}{ml}$. Să se determine forța la care e supus un stîlp.

21. Un fir greu este suspendat în A și B ($AC = 10$ m, $CB = 2$ m) avînd $f = 3$m și $q = 0{,}2 \frac{N}{ml}$. Se cere $x = AD$ unde este săgeata maximă $DE = f = 3$ m și tensiunile în A și B (fig. IX.21).

Scanned with OKEN Scanner

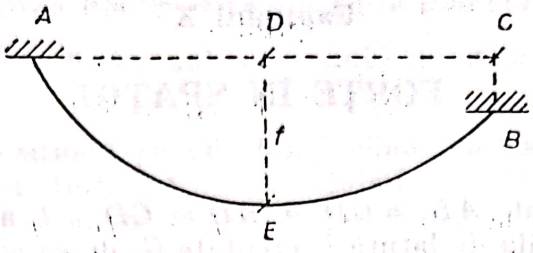


Fig. IX.21

22. Două bare AB și AB' de greutate G și lungime l, articulate în A, au greutate $G = 5$ N, $l = 2$ m. Capetele de jos sînt prinse cu un fir greu $\left(q = 1{,}5 \frac{\text{N}}{\text{ml}}\right)$ săgeata $f = \frac{1}{4}$ m (fig. IX.22).

Se cere poziția reazemelor C, C' pentru echilibru sub 60° ($CA = x = ?$).

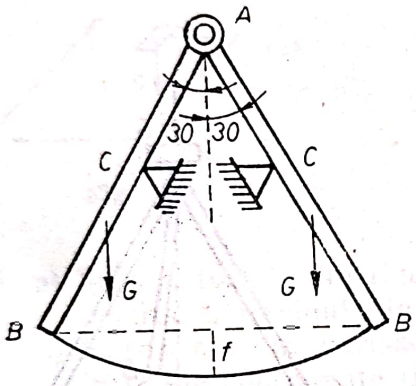


Fig. IX.22

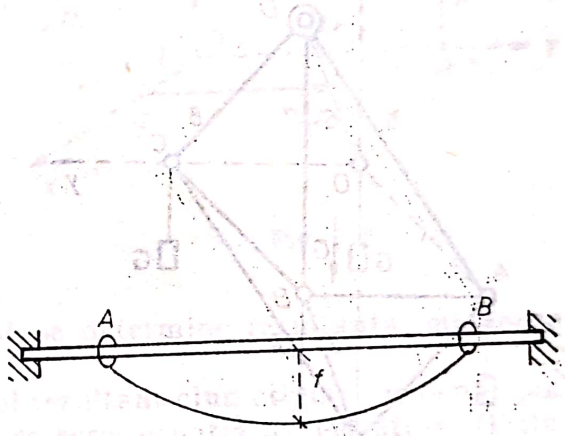


Fig. IX.23

23. Un fir de greutate $q = 0{,}5 \frac{\text{N}}{\text{ml}}$ este suspendat prin două inele de greutate $G = 20$ N în A și B ($AB = 20$ m) de o bară fixă (fig. IX.23). Cunoscînd coeficientul de frecare $\mu = 1{,}5$ între inele și bară, să se determine săgeata f.

24. Firul de greutate $q = 0{,}5 \frac{\text{N}}{\text{ml}}$ trece peste roțile fixe cu coeficient de frecare $\mu = \frac{1}{2}$ firul fiind tangent în A și B ($\sphericalangle AOC = 30° = \sphericalangle BOC'$). Se dă $AB = 8$ m. Se cere f și G (fig. IX.24).

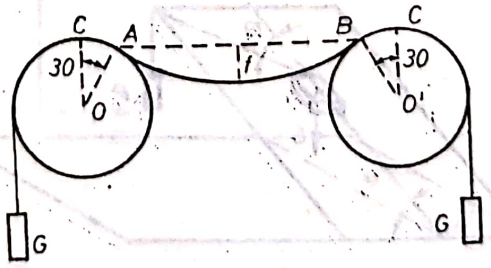


Fig. IX. 24

Capitolul X

FORȚE ÎN SPAȚIU

1. a) Patru fire egale $AD = OD = BD = CD = l$ atîrnate în D, susțin placa orizontală de latură l, greutate G, de care atîrnă în fiecare colț cîte o greutate G și care prinde prin alte patru fire egale cu l, o altă greutate G (fig. X.1). Să se determine tensiunile în toate firele.

b) Să se presupună că în loc de placa $OABC$ sînt patru bare fără greutate proprie, egale : $OC = CB = BA = AO = l$. Să se determine forțele în aceste bare.

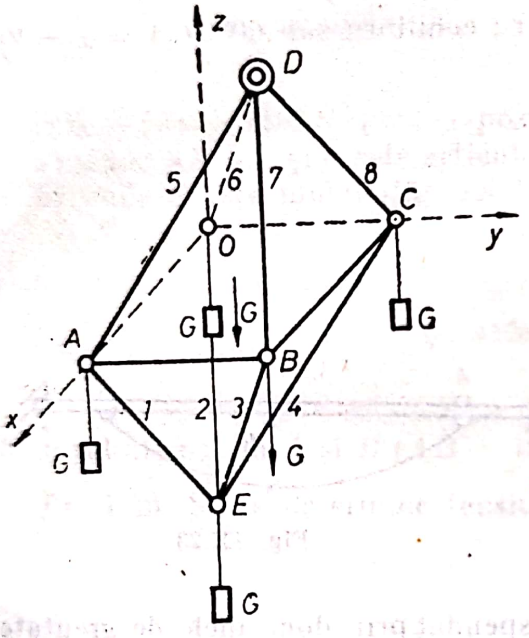


Fig. X.1

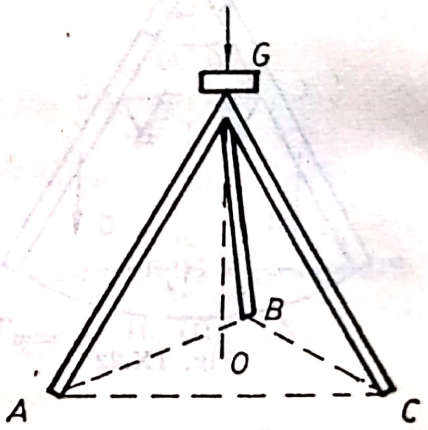


Fig. X.2

2. Pe trei pirostrii de lungime $2l$ și greutate neglijabilă e așezată o greutate G (fig. X.2). Se cere tensiunea din firul ABC care leagă picioarele ca să nu lunece (A, B, C formînd un triunghi echilateral).

3. O greutate G este așezată cu frecare pe un plan înclinat cu $\sphericalangle \alpha$ față de orizontală. Greutatea e legată cu un fir care la celălalt capăt prinde o

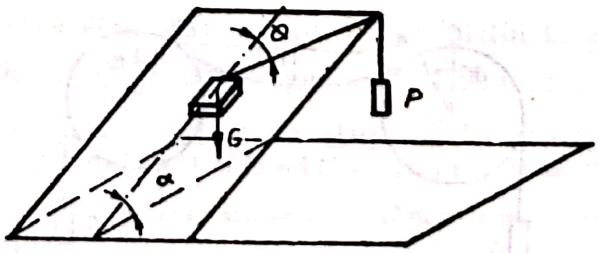


Fig. X.3

greutate P care atîrnă liberă peste marginea planului (fig. X.3). Se cere θ_{max} al firului cu linia de cea mai mare pantă știind că $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se va lua: $G = 3P$; $\alpha = 45°$.

4. O greutate G este situată pe un plan înclinat cu coeficientul de frecare $\mu = 2 \operatorname{tg} \alpha$. Care este forța orizontală minimă din plan care să înceapă să deplaseze corpul și ce unghi va face inițial deplasarea cu linia de cea mai mare pantă (fig. X.4).

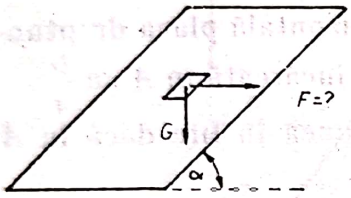


Fig. X.4

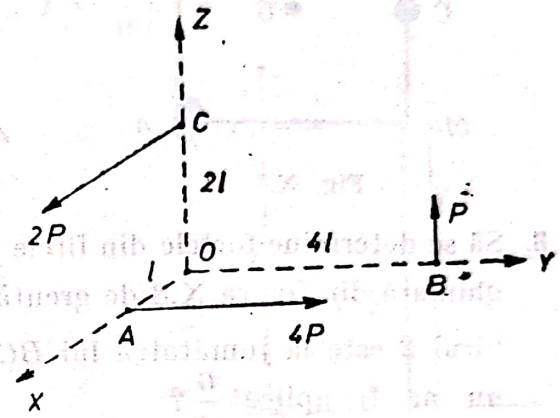


Fig. X.5

5 a) Se dau forțele din figura X.5. Să se determine rezultanta, momentul rezultant, unghiul dintre ele.

b) Să se arate cum variază momentul rezultant cînd originea se deplasează în O_1 de coordonate (l, l, l). Să se scrie ecuația axei centrale (Date: $OA = l$, $OB = 4l$, $OC = 2l$).

6. Să se determine rezultanta și momentul rezultant al forțelor din figura X.6.

a) față de o origină O la distanța (l, l, l) de forțe;

b) față de o origină O_1, la distanța $\left(\frac{5l}{3}, \frac{l\sqrt{2}}{5}, \frac{3l\sqrt{2}}{2}\right)$ de forțe.

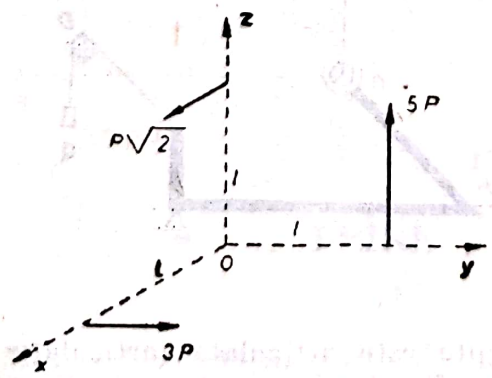


Fig. X.6, a

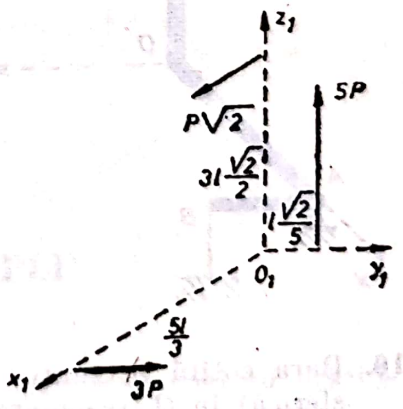


Fig. X.6, b

7. O masă pătrată orizontală de greutate G și latură l este susținută de 3 picioare A, B, C (A în vîrf, iar B și C la jumătatea laturilor) Se întreabă ce greutăți P_1, P_2, P_3 se pot pune pe rînd în colțurile M_1, M_2, M_4 ca masa să fie pe punctul de răsturnare (fig. X.7).

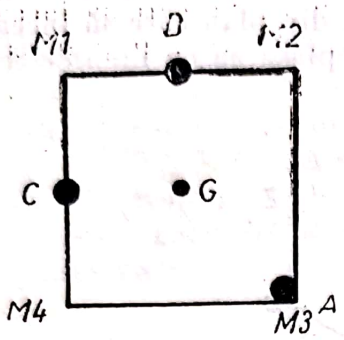


Fig. X.7

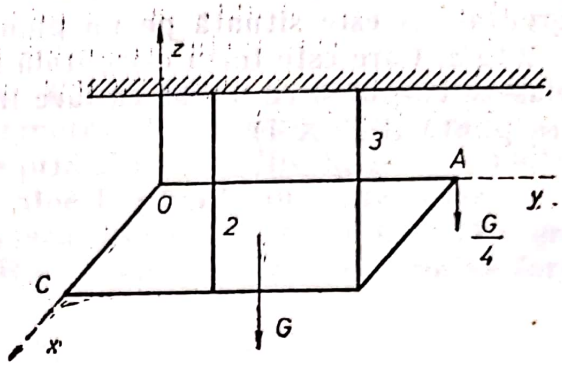


Fig. X.8

8. Să se determine forțele din firele *1*, *2*, *3* care țin orizontală placa dreptunghiulară din figura X.8 de greutate G, laturi $2l$ și l încărcată în A cu $\frac{G}{4}$. Firul *2* este la jumătatea lui BC. Care ar fi tensiunea în fire dacă în A nu ar fi aplicat $\frac{G}{4}$?

9. a) Bara cotită în spațiu sub unghiuri drepte este susținută (reazem simplu) în A și D, iar în B este prinsă cu un fir vertical. Porțiunile $OA = OC = l$ au greutate G; $CD = AB = \frac{l}{2}$ au greutate $\frac{G}{2}$ (fig. X.9).

Să se determine reacțiunile R_A, R_D și tensiunea în fir.

b) Aceeași problemă dar reazemele sînt în O, A și B.

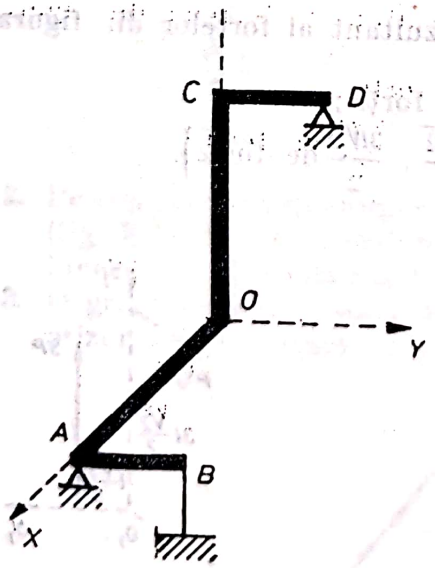


Fig. X.9

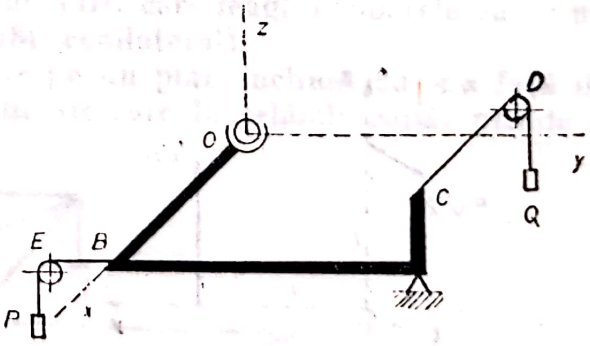


Fig. X.10

10. Bara cotită în spațiu sub unghiuri drepte este articulată (articulație sferică) în O, rezemată în A și ținută cu fire trecute peste scripeți ca în figura X.10.

Scanned with OKEN Scanner

Se cer greutăţile care trebuie prinse de fire, reacţiunea din reazemul A şi forţele din articulaţie. Porţiunea $OB = 2l$ are greutate $2G$; $BA = 4l$, greutate $4G$; $AC = l$, greutate G. Firul CD este paralel cu OB, iar firul BE este în prelungirea lui AB.

11. Un chepeng are două mînere în C şi D. Se rupe cel din D (fig. X.11). Se cere valoarea forţei F_c perpendiculară pe planul chepengului necesară pentru ridicarea lui; în articulaţiile A şi B de rază r fiind frecare (μ dat). Chepengul are greutate G, lungime $2l$, lăţime l, iar C este la $\frac{l}{2}$ de la mijlocul laturii. $\left(\text{Se va lua numeric } \mu = 0{,}5\,;\ r = \frac{l}{10}\right)$.

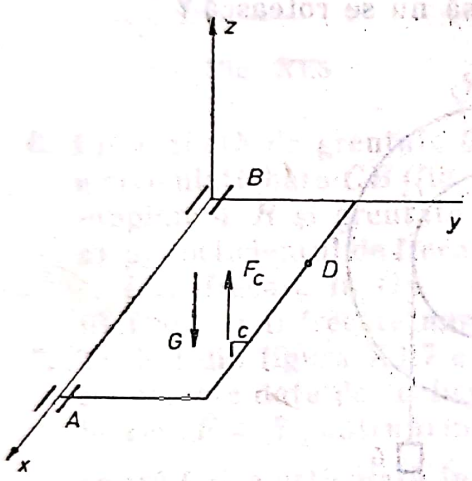


Fig. X.11

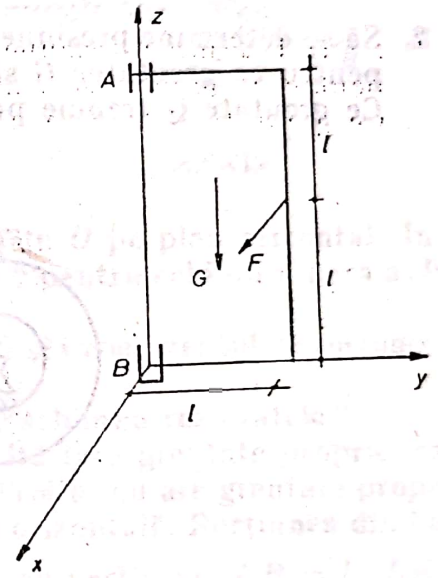


Fig. X.12

12. O uşă este articulată în A, iar în B este şi rezemată şi articulată. Uşa se poate deschide prin forţa $\bar{F}$ perpendiculară pe planul ei (fig. X.12). Se cere $\bar{F} = ?$ ştiind că sînt frecări μ în articulaţiile A şi B de rază r, iar în B este şi frecare de pivotare la contactul cu solul (acelaşi μ). Uşa are greutate G, laturi $2l$ şi l iar $\bar{F}$ e la mijlocul laturii. $\left(\text{Se va lua numeric } \mu = 0{,}5\,;\ r = \frac{l}{10}\right)$.

Capitolul XI

FRÎNE — MAŞINI SIMPLE

1. Să se determine forţa $\bar{F}$ necesară pentru introducerea penei cu deschidere α între două corpuri cu presiune P în cazul fără frecare şi cu frecare (fig. XI.1).

Scanned with OKEN Scanner

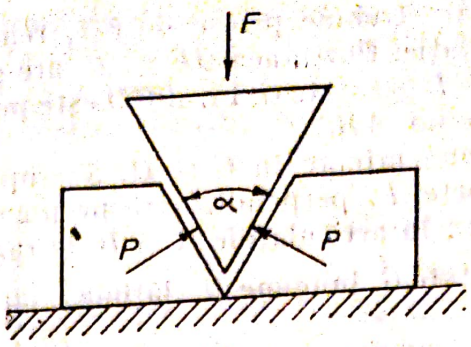


Fig. XI.1

2. Să se determine presiunea P între două roți ca în figura XI.2, cu frecare μ pentru ca greutatea G să fie frînată.
Ce greutate Q trebuie pusă la roata I ca să nu se rotească ?

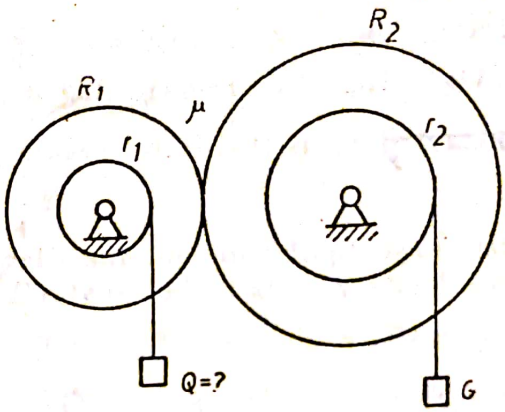


Fig. XI.2

3. Troliul din figură e frînat ca în figura XI.3. Se dă $P = \frac{G}{2}, R = 2r, \alpha = 30°$. Barele $AB = BC = l$ au greutate G. Se cere μ între sabot și roată și elementele încastrării în A (Sabotul se consideră fără greutate proprie).

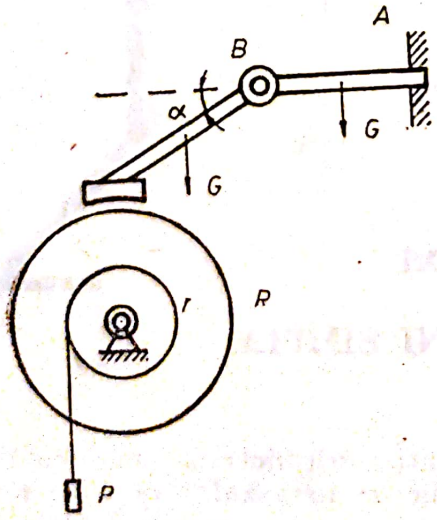


Fig. XI.3

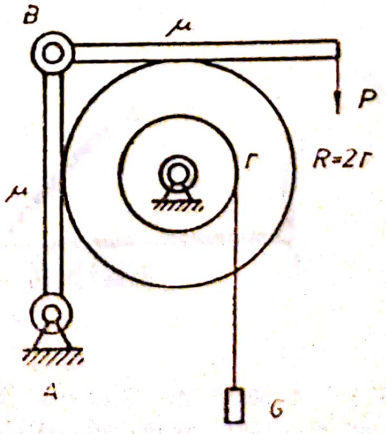


Fig. XI.4

4. Se cere forţa P ca prin intermediul barelor de lungime $l = 2\,R$ şi greutate neglijabilă cu coeficient de frecare μ să frîneze troliul din figura XI.4.
5. Roata de greutate G şi rază R este frînată de bara OA de greutate G şi lungime $2R$ prin frecarea acestei bare cu planul înclinat sub 30°. Se cere $\mu = ?$ în A (fig. XI.5).

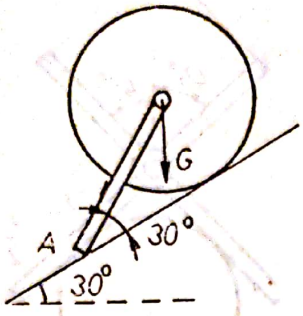


Fig. XI.5

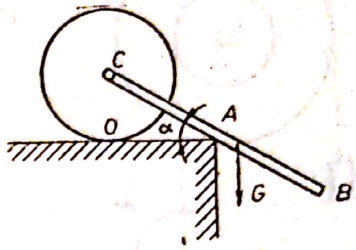


Fig. XI.6

6. Fie o roată de greutate G şi rază R situată în O pe plan orizontal. În C e articulată bara CB (fig. XI.6). Se cere $\alpha = ?$ pentru echilibru, bara avînd lungime $4\,R$ şi greutate G. Se cere :
   a) μ_0 coeficientul de frecare de alunecare în O şi s coeficientul de rostogolire fără frecare în O :
   b) Dacă ar fi frecare numai în A, cum s-ar schimba rezultatele ?
7. Troliul din figura XI.7 e frînat de bara cotită fără greutate proprie, care are frecare dată de coeficient μ_E cu troliul. Troliul nu are greutate proprie. Se cere $\bar{F} = ?$ pentru frînare, $\bar{F}$ fiind o forţă orizontală. Porţiunea din bara cotită CB e articulată în A la $\frac{l}{2}$ şi face 30° cu verticala. $CB = l$, $BE = ED = l$.

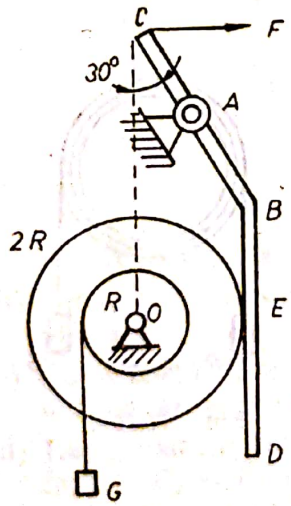


Fig. XI.7

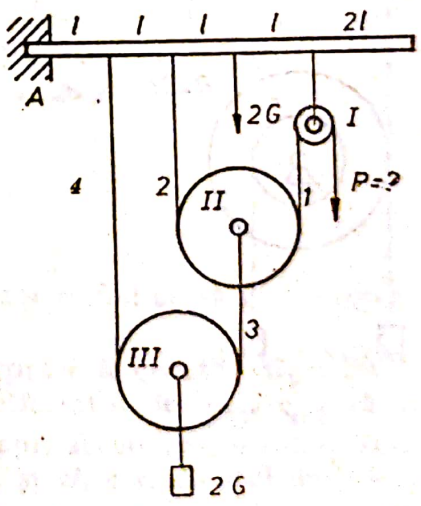


Fig. XI.8

8. Bara de lungime $6l$ şi greutate $2G$ susţine sistemul de scripeţi din figura XI.8. Se cere $P = ?$ şi elementele încastrării, firul flexibil sau nu (ε dat).

9. Troliul are raza axului r_0 și coeficient de frecare μ_0 la ax. Cablul care trece peste scripetele de jos are frecare μ. Se cer limitele între care pot varia P și F la echilibru (fig. XI.9).

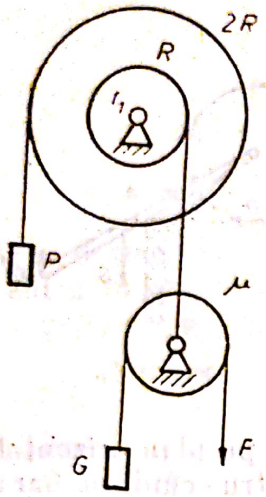


Fig. XI.9

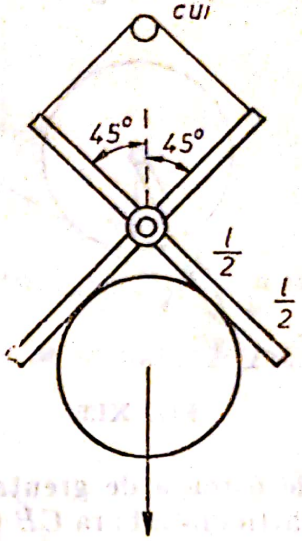


Fig. XI.10

10. O sferă de greutate G și rază R este ridicată de un cleşte cu brațele de lungime $2\,l$ și greutate P articulate la mijloc și care stau sub 90° (fig. XI.10). Se cere $\mu = ?$ între cleşte și sferă la echilibru.

11. Un troliu este frînat prin cablul care înfășoară complet roata. Se dă μ, se cere P pentru frînare (fig. XI.11).

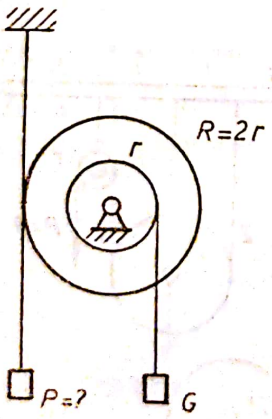


Fig. XI.11

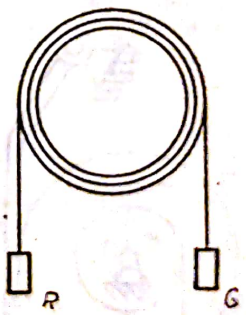


Fig. XI.12

12. Se învîrteşte un cablu cu frecare $\mu = \frac{1}{\pi}$ de trei ori complet în jurul unei roți fixe și apoi încă o jumătate de cerc, astfel încît atîrnă o porțiune de care se prinde P. În partea cealaltă e prinsă o greutate $G = 1\,000$ N. Cu ce greutate P poate fi ținută G ca să nu coboare (fig. XI.12).

Scanned with OKEN Scanner

Partea a II-a

CINEMATICA ŞI DINAMICA

Capitolul I

TRAIECTORII. MIŞCĂRI

1. În planul orizontal două corpuri pleacă în direcţii perpendiculare între ele. Corpul I merge cu viteza constantă $v_1 = 3$ m/s. Corpul II e tras cu o forţă $F_2 = 20$ N şi pleacă din repaus. După 4 s de la pornire corpurile sînt la distanţa $AB = 20$ m unul de altul (fig. I.1). Se cere :

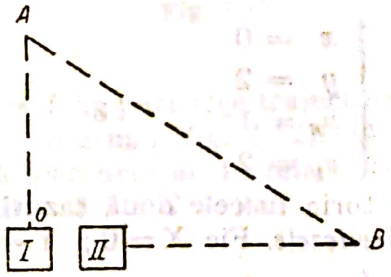


Fig. I.1

a) Greutatea G_2 a corpului II.

b) Cît ar fi G_2 dacă pe plan ar fi frecare $\mu = 0{,}2$ ca să se realizeze aceeaşi mişcare.

c) Cu ce forţă F_1 ar trebui să fie tras corpul I de greutate $G_1 = 30$ N pentru a avea aceeaşi viteză constantă, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}2$.

d) La ce distanţă şi după cît timp s-ar opri aceste corpuri dacă se suprimă forţele F_1 şi F_2 în acelaşi timp în A şi B, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}2$ la ambele corpuri.

2. Dintr-un ascensor aflat la $h = 3$ m deasupra solului se dă drumul unui mobil cu $v_0 = 2$ m/s în jos. În cît timp şi cu ce viteză ajunge mobilul la sol cînd ascensorul :

a) Este în repaus.

Scanned with OKEN Scanner

b) Se ridică cu accelerație $a_1 = 4$ m/s².
c) Coboară cu $a_2 = 4$ m/s².
d) Se ridică cu viteza constantă $v_1 = 4$ m/s.
e) Coboară cu viteza constantă $v_2 = 4$ m/s.

3. Un mobil cade din vîrful unui turn. După ce a parcurs h_1 metri un alt mobil cade de la h_2 metri de la vîrf. Ambele ajung la sol în același timp. Se cere înălțimea y a turnului.

4. Un imobil de masă $m = 2$ kg asupra căruia acționează forța $F = 8$ N are la $t = 0$:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ v = 2 \text{ m/s} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = -1 \\ v = 0 \end{cases}$

Să se determine ecuația parametrică a mișcării rectilinii în ambele cazuri, punctul în care se află mobilul la $t = 1$ și viteza sa în acel punct.

Determinarea traiectoriilor cunoscînd forțele

5. *Forțe constante.* Fie $X = 32\,m$; $Y = 0$ unde m = masa corpului. Condițiile inițiale la $t = 0$ sînt:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ v_x = 2 \\ v_y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ v_x = 0 \\ v_y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ v_x = 1 \\ v_y = 0 \end{cases}$

Să se determine traiectoria în cele trei cazuri.

6. *Forțe proporționale cu distanța.* Fie $X = mx$; $Y = my$ și condițiile inițiale:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ v_x = 2 \\ v_y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ v_x = 1 \\ v_y = 2 \end{cases}$

Să se determine traiectoria în cele două cazuri.

7 *Forțe proporționale cu vitezele.* Fie $X = 0$; $Y = mv_y$ și condițiile inițiale

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ v_x = 1 \\ v_y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ v_x = 0 \\ v_y = 1 \end{cases}$

Să se determine traiectoria în cele două cazuri.

Determinarea traiectoriilor, razelor de curbură cunoscînd ecuațiile parametrice. Verificarea legii conservării energiei

8 Să se determine traiectoria, mișcarea, raza de curbură în A, B, C $\left(\text{la } t = 0,\ t = \frac{\pi}{4},\ t = \frac{\pi}{2}\right)$ și să se verifice în aceste puncte legea conservării energiei, cunoscînd ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

a) $x = 4 \cos t$; $y = 2 \sin t$
b) $x = 4 \sin t$; $y = 2 \cos t$

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se determine traiectoria, mișcarea, legea conservării energiei la $t = 0$ și $t = \frac{\pi}{4}$, știind că ecuațiile parametrice ale traiectoriei sînt:

a) $x = \cos 2t$; $y = \sin t$
b) $x = 1 - 2t^2$; $y = t$
c) $x = -\cos 2t$; $y = \cos t$

10. Să se determine traiectoria, mișcarea, raza de curbură pentru ecuațiile parametrice:

a) $x = \cos t$; $y = 2 \sin^2 t$
b) $x = t$; $y = 2(1 - t^2)$
c) $x = 2t$; $y = 2(1 - 4t^2)$
d) $x = t - 1$; $y = 2t(2 - t)$

11. Un mobil de masă $m = 3$ kg se deplasează pe un cerc orizontal de rază $R = 2$ m, avînd în A viteza $v_A = 4$ m/s, iar în B, după $t = 2$ s, viteza $v_B = 10$ m/s. Să se determine accelerația și forțele în A și B.

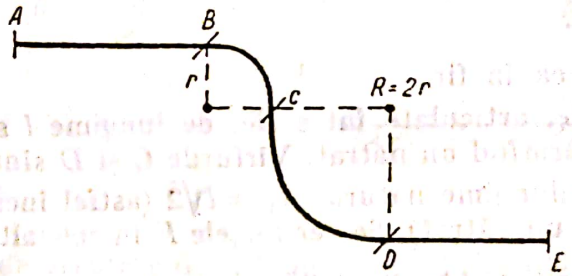


Fig. I.12

12 Un mobil de masă $m = 5$ kg parcurge traiectoria $ABCDE$ în plan orizontal cu viteza constantă $v = 2$ m/s (fig. I.12). Să se determine accelerația pe diferitele porțiuni ale parcursului, forțele și timpul necesar de la A la E, unde $r = 4$ m și $AB = 3r$, $DE = 2r$.

Capitolul II

DEPLASĂRI VIRTUALE

1. O bară de lungime l și greutate G se reazemă pe sol și pe un perete vertical și este susținută sub $\sphericalangle \alpha$ de un fir de care atîrnă greutatea P (fig. II.1). Se cere $\hat{\alpha}$ la echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

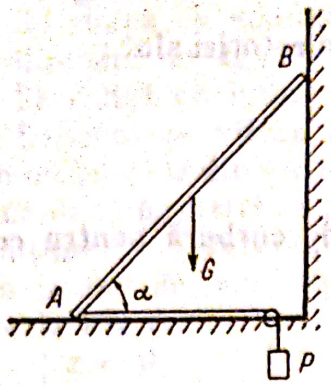


Fig. II.1

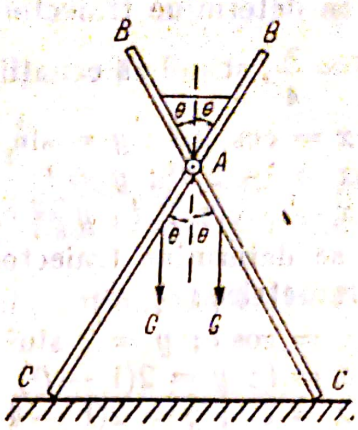


Fig. II.2

2. Două bare de greutate G și lungime $3l$ sînt articulate în punctul A la $AB=l$ (fig. II.2). Pentru a sta sub $\sphericalangle\theta = 30°$ barele sînt legate cu un fir orizontal la distanța :

a) $\frac{AB}{2}$; b) $\frac{AC}{2}$.

Se cere tensiunea în fir.

3. Patru bare egale, articulate între ele, de lungime l sînt așezate într-un plan orizontal formînd un pătrat. Vîrfurile C și D sînt legate între ele cu un fir elastic de lungime naturală $l_0 = l\sqrt{2}$ (astfel încît el e neîntins cînd barele formează un pătrat). Se cer forțele F în celelalte două vîrfuri, perpendiculare pe fir, astfel încît firul să capete lungimea $\frac{5l_0}{4}$. Acest fir atîrnat vertical cu o greutate G la capăt se alungește cu $\frac{l_0}{2}$ (fig. II.3).

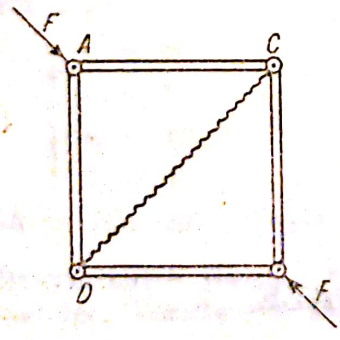


Fig. II.3

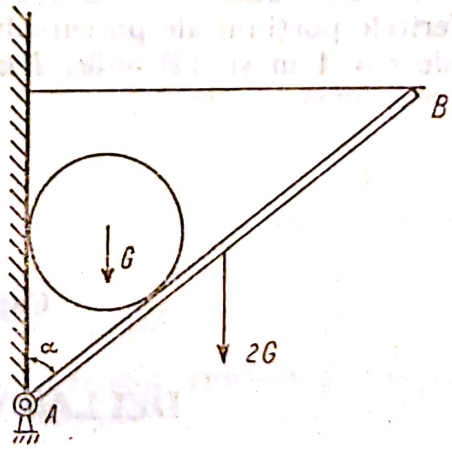


Fig. II.4

4. O sferă de greutate G și rază R se reazemă pe bara AB de greutate $2G$ și lungime $4R$. Sistemul e prins cu un fir orizontal (fig. II.4). Să se determine tensiunea în fir cînd $\alpha = 60°$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Patru bare articulate de lungime l și greutate G sînt atîrnate în A și legate cu un fir (sau bară fără greutate proprie) (fig. II.5). Să se determine forța din fir în cazul cînd :

a) firul e orizontal (BB) ;

b) firul e vertical (AC).

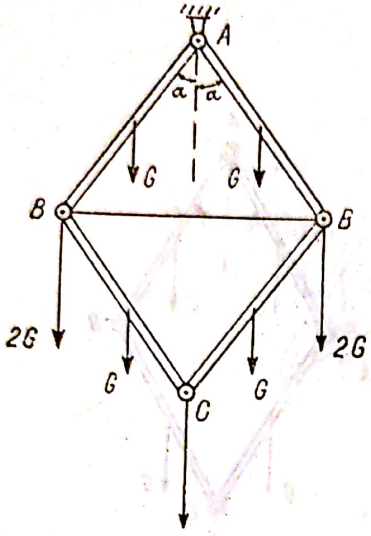


Fig. II.5

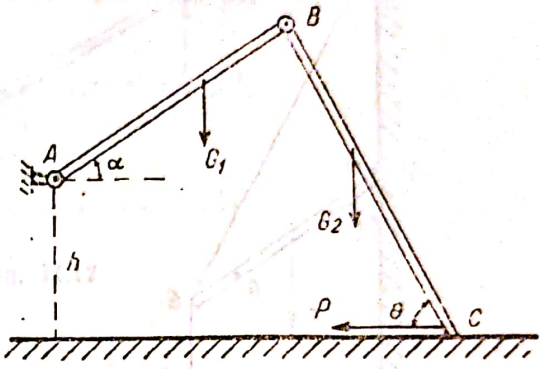


Fig. II.6

6. Două bare AB (de greutate G_1 și lungime l_1) și BC (de greutate G_2 și lungime l_2) sînt articulate în punctul B. Punctul C este un reazem simplu iar A, o articulație fixă. Se dau $\sphericalangle\alpha$ și $\sphericalangle\theta$ la echilibru. Se cere forța P necesară pentru această poziție de echilibru, distanța h a articulației A de sol fiind dată (fig. II.6).

7. Două bare egale de greutate G și lungime l sînt așezate ca în figura II.7, legate de peretele vertical cu un fir DE. Să se determine tensiunea în fir la echilibru pentru cazul :

a) AB face $\hat{\alpha}$ cu verticala ;

b) AB este orizontal.

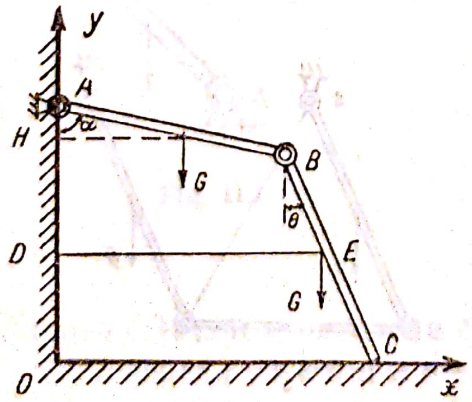


Fig. II.7, *a*

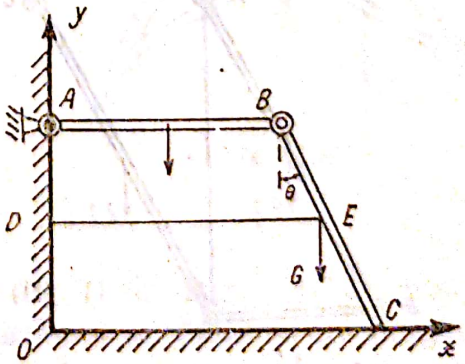


Fig. II.7, *b*

8. a) Bara AB de greutate G şi lungime l are atîrnată în B o greutate P (fig. II.8). Bara este susţinută de firul BC unde $AC = l$. Se cere T în fir în funcţie de $\measuredangle \alpha$.

b) Aceeaşi problemă, dar firul este prins într-un punct D pe bară şi avem $AD = AC = x$.

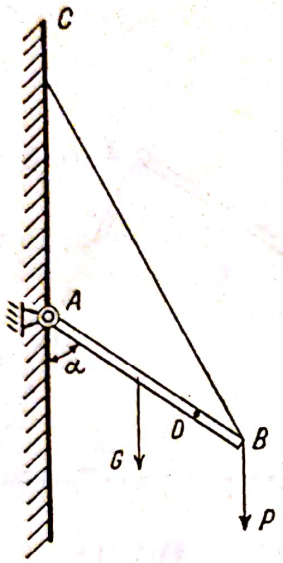


Fig. II.8

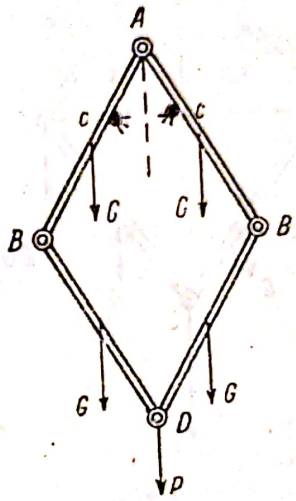


Fig. II.9

9. Patru bare egale de greutate G şi lungime l se reazemă pe două cuie C la distanţa $2a$ între ele. Se cere unghiul α sub care se aşază la echilibru (fig. II.9).

10. Fie două bare egale AB şi CD de greutate $2G$ şi lungime $2l$ de care e articulată bara CD de greutate G şi lungime l. Pentru poziţia din figura II.10 se leagă sistemul cu firul AD vertical. Se cere tensiunea în fir.

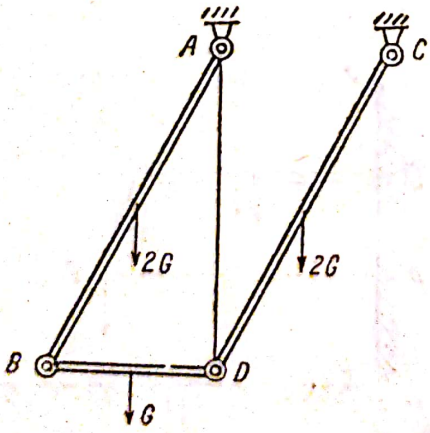


Fig. II.10

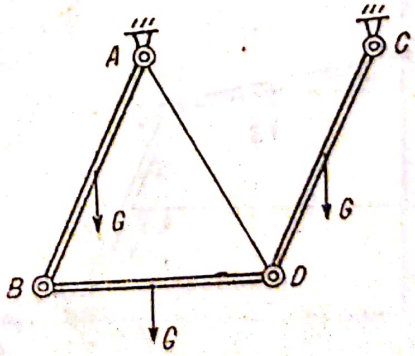


Fig. II.11

Scanned with OKEN Scanner

11. Trei bare egale de greutate G și lungime l sînt legate cu firul AD de aceeași lungime l (fig. II.11). Se cere la echilibru tensiunea în fir.

12. Două bare: AB (de greutate G și lungime l) și BD (de greutate $2G$ și lungime $2l$) sînt legate cu un fir vertical în B și rezemate de cuiul C ($AC = l$) ca să stea la echilibru ca în figura II.12. Se cere forța T din fir.

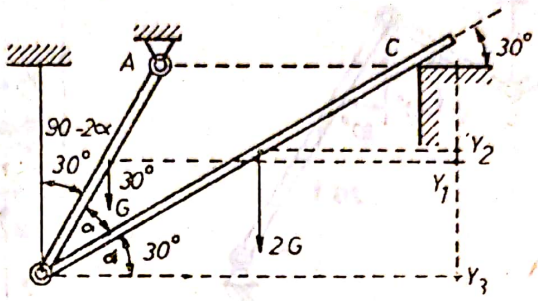


Fig. II.12

13. Trei bare de greutate G și lungime l formează trei laturi ale unui pătrat (fig. II.13). Să se determine T tensiunea în firul vertical din C ca pătratul să nu se deformeze. (v. probl. 21, cap. III. Statică).

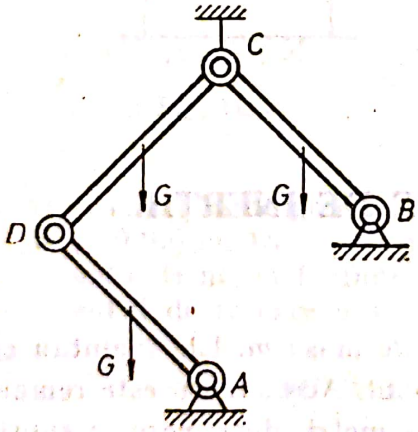


Fig. II.13

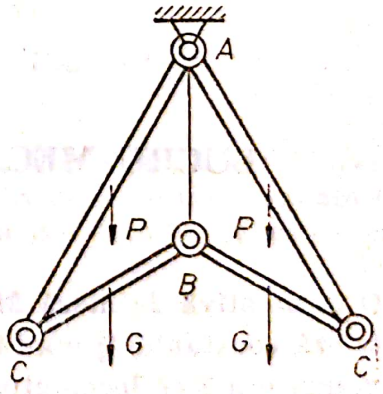


Fig. II.14

14. Patru bare sînt articulate în A de tavan (fig. II.14). Barele AC au greutatea P, lungimea $l\sqrt{3}$. Firul AB care ține sistemul în echilibru are lungimea l, iar barele BC au greutatea G, lungimea l și fac $\sphericalangle 30°$ cu AB. Se cere forța T în fir la echilibru. (v. probl. 27, cap. III. Statică).

15. Fie patru bare articulate : AB (de greutate $2G$, lungime $2l$) și BC (de greutate G, lungime l) susținute printr-un fir vertical în poziția din figura II.15. Să se determine forța T în fir (v. probl. 28, cap. III. Statică).

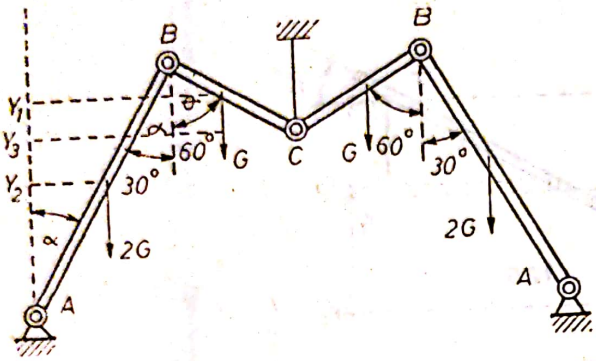


Fig. II.15

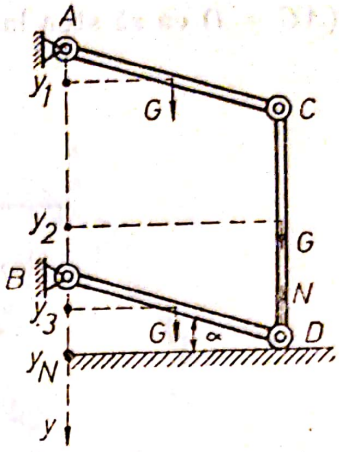


Fig. II.16

16. Trei bare egale AC, CD, DB de lungime l și greutate G sînt articulate în A și B ($AB=l$) de un perete vertical și rezemate în D de sol sub $\hat{\alpha}$ (fig. II.16). Să se determine forța de sprijin în D. Să se verifice rezultatul cu ajutorul ecuațiilor din Statică.

Capitolul III

LUCRU MECANIC — FORȚE DE INERȚIE

1. O locomotivă de masă M trage un vagon de masă m. Ele înaintau cu o viteză constantă $\bar{v}_0$ cînd se desprinde vagonul. Acest lucru este remarcat numai după ce locomotiva a mai parcurs s metri, după care se suprimă forța de tracțiune.

Să se determine distanța între vagon și locomotivă la oprirea lor (se presupune că oprirea e datorită frecării de coeficient μ).

Să se determine timpul între oprirea vagonului și cea a locomotivei.

Numeric : $v_0 = 72$ km/h, $\mu = 0{,}5$, $M = 4\ m$; $s = 500$ m.

2. Un ciocan cu abur de greutate G (ciocanul, tija, pistonul) este ridicat de presiunea P a vaporilor care se presupune că se introduce toată brusc

în punctul A cînd pistonul se află pe fundul de jos al cilindrului. Presiunea lucrează cu aceeaşi valoare P pe distanţa $AB = h$, după care în B dispare tot brusc. Pistonul continuă să se mai urce pe distanţa $BC = x = ?$ după care cade lovind piesa de masă M producînd deformare s. (fig. III.2). Să se determine forţa F cu care s-a produs deformarea (F se presupune constant în timpul deformării).

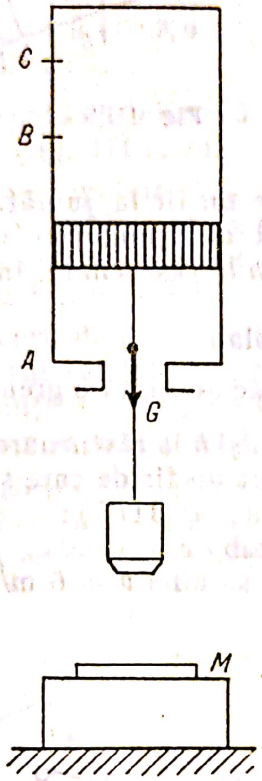


Fig. III.2

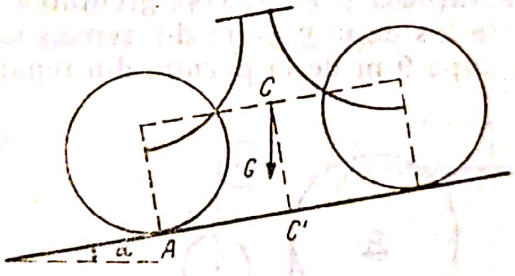


Fig. III.3

3. a) O bicicletă de greutate G coboară o pantă sub $\hat{\alpha}$ ($\sin \alpha = 0{,}1$; $\cos \alpha = 0{,}99$) cu 18 km/h (fig. III.13). Pe ce distanţă minimă s poate fi frînată, frînarea făcîndu-se numai la roata din faţă ? Cît este coeficientul de frecare μ în acest caz ?

$$(AC' = d = 0{,}6 \text{ m} ; CC' = h = 0{,}8 \text{ m}).$$

b) Aceeaşi problemă însă bicicleta merge pe plan orizontal. Se cere $s = ?$, $\mu = ?$

4. Pe un plan înclinat sub $\hat{\alpha}$ este situat un corp de greutate G în care este încastrată o bară de lungime l şi greutate P (fig. III.4). Să se determine în mişcare, elementele încastrării cînd între corp şi plan :

a) nu este frecare ; b) este frecare de coeficient μ. Să se determine h (înălţimea corpului G) care are lăţimea l, astfel ca sistemul să fie la limita răsturnării în mişcare.

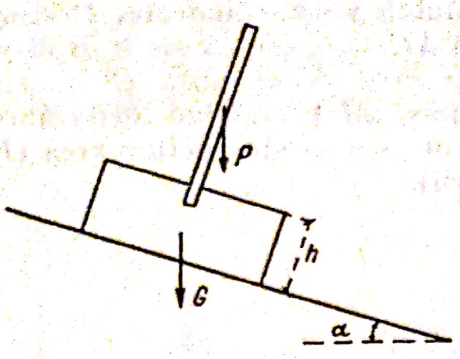


Fig. III.4

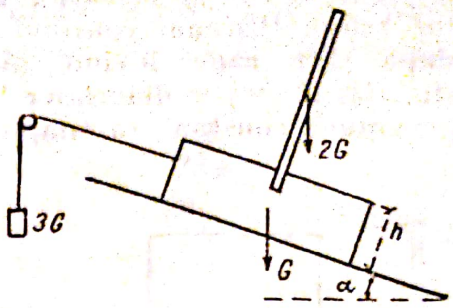


Fig. III.5

5. Sistemul de mai sus, unde $P = 2G$, e prins de un fir la jumătatea lui h, iar firul trece peste un cui. La celălalt capăt al firului este o greutate $3G$ (fig. III.5). Se cer elementele încastrării și h la răsturnare, în cazurile :
   a) fără frecare ;
   b) cu frecare de coeficient μ între corp și plan.
6. În problema precedentă de capătul firului este atîrnată o greutate $\frac{G}{2}$ în loc de $3G$. Să se determine elementele încastrării și h la răsturnare.
7. Peste scripetele fără greutate proprie este trecut un fir de care sînt prinse greutățile G și P. Se cere greutatea P pentru ca (fig. III.7) :
   a) în 2 s de la pornire din repaus sistemul să aibă $v = 6$ m/s ;
   b) după 9 m de la pornire din repaus sistemul să aibă $v = 6$ m/s.

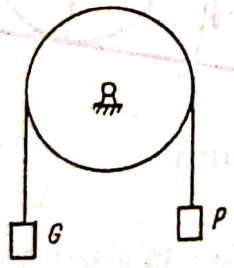


Fig. III.7

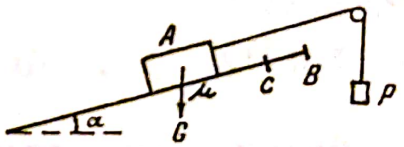


Fig. III.8

8. Peste un scripete fără greutate proprie trece un fir de care se prinde o greutate P, care atîrnă, iar de celălalt cap o greutate G pe un plan înclinat cu coeficientul de frecare μ dat (fig. III.8). Să se determine P pentru ca :
   a) sistemul după 2 s de la pornire din repaus să aibă $v = 6$ m/s ;
   b) sistemul după 9 m de la pornire din repaus să aibă $v = 6$ m/s.

   Numeric $\mu = 0{,}5$; $\alpha = 30°$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8$; $g = 10$ m/s²).
9. Un corp G de masă $m = 2$ trebuie împărțit în două părți G_1 și G_2 de mase m_1, respectiv m_2, astfel încît prinse de cele două capete ale unui fir, care trece peste un scripete fără greutate proprie, sistemul să descrie 4 m în primele 2 s de la pornire din repaus :
   a) cele două capete ale firului fiind verticale (fig. III.9, *a*) ;

Scanned with OKEN Scanner

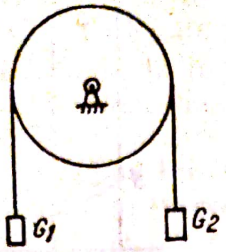


Fig. III.9, *a*

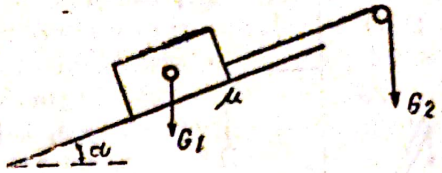


Fig. III.9, *b*

b) greutăţile alunecă pe un plan înclinat sub $\hat{\alpha}$ cu coeficient de frecare μ (fig. III.9, *b*).

10. Peste scripetele fără greutate proprie este trecut un fir de capetele căruia sînt prinse $P = 2G$ şi G. După 2 s de la pornirea din repaus se ia o greutate G de la P şi se pune la G de partea cealaltă. Care este mişcarea care va urma ? (fig. III.7).

11. Un corp de greutate G, tras de un fir pe un plan cu frecare (μ dat) are la capătul celălalt al firului o greutate $P = 2G$. Să se determine după ce distanţă $x = AC$ de la pornirea din repaus din A se rupe firul ca corpul să se mai urce pînă în B, avînd $AB = l$ (fig. III.8).

12. Un corp de greutate G lunecă din B pe planul înclinat sub $\hat{\alpha}$, cu frecare μ. ($AB = l$). În A este racordată o jumătate de cerc (fără frecare). Se cere R raza cercului, ca corpul să se oprească în D (fig. III.12).

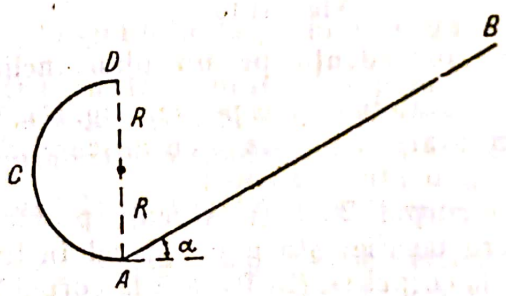


Fig. III.12

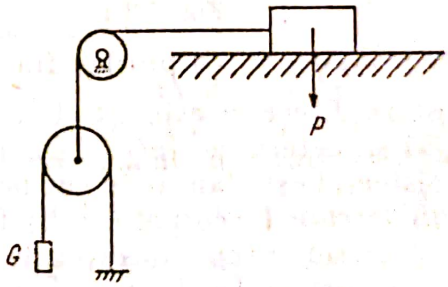


Fig. III.13

13. Se consideră doi scripeţi care nu au greutate proprie. Peste scripetele de jos trece un fir prins de sol la un cap şi cu o greutate G la celălalt. Centrul scripetelui e prins cu un fir care trece peste alt scripete (fig. III.13). Să se determine viteza lui G după ce a coborît s metri şi tensiunea în fire în mişcare, greutatea P de care e prins celălalt capăt al firului deplasîndu-se pe plan cu coeficient de frecare μ dat.

14. O cutie de greutate $2G$, lăţime l şi înălţime $2l$ este situată pe un plan orizontal cu frecare $\mu = \frac{1}{2}$. La jumătatea înălţimii ei este prins un fir, care trece peste un scripete ; de fir este prinsă greutatea P. În interiorul cutiei este o bară AB de greutate G situată fără frecare în cutie. A este la jumătatea lăţimii, iar B la jumătatea înălţimii.

a) Se cere P ca în timpul accelerării bara să stea ca în figura III.14, *a*.

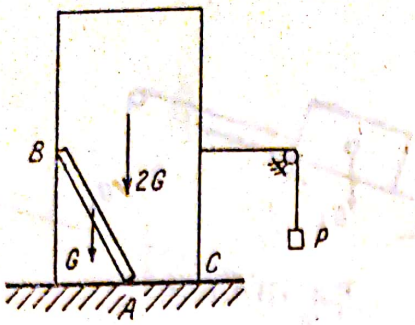


Fig. III.14, *a*

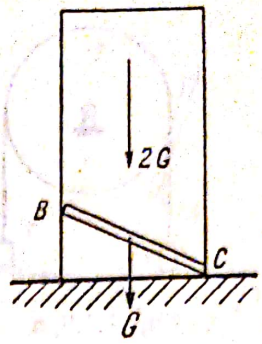


Fig. III.14, *b*

b) Se elimină P. Bara se va rezema în C în colțul cutiei (fig. III.14, *b*). Se cer în timpul mișcării întîrziate, forțele din C și B.

15. Două corpuri de greutate G și $2G$ sînt legate între ele printr-o bară (fig. III.15). Frecare (μ dat) este numai la unul din ele. Sistemul este lansat cu $\bar{v}_0$ pe plan orizontal. Se cere forța F din bară în timpul mișcării :

a) cînd bara n-are greutate proprie :

b) ce se întîmplă cînd bara are greutatea proprie G.

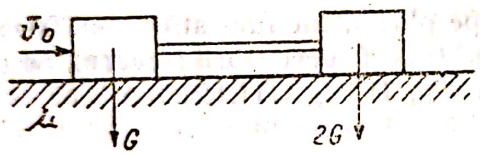


Fig. III.15

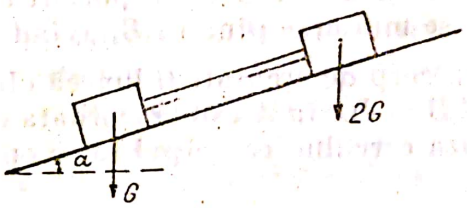


Fig. III.16

16. Presupunem corpurile din problema precedentă pe un plan înclinat sub $\hat{\alpha}$. Frecarea este astfel încît corpurile stau în repaus pe plan (fig. III. 16). Să se determine forța în bara fără greutate la repaus și în mișcare, cînd sistemul este lansat în sus pe plan cu $\bar{v}_0$, pentru cazurile :

a) frecare la corpul G ; b) frecare la corpul $2G$; c) Aceeași problemă presupunînd că corpurile au frecare insuficientă μ cu planul înclinat și sistemul coboară cu : (1) frecare la corpul G. (2) frecare la corpul $2G$.

17. Două bare fixe OA și AO' înclinate la 45° față de orizontală, au trecute pe ele două inele de greutăți $1G$ și G legate cu un fir de lungime l care la început e orizontal (fig. III. 17). Nu există frecare. Să se determine mișcarea și tensiunea în fir.

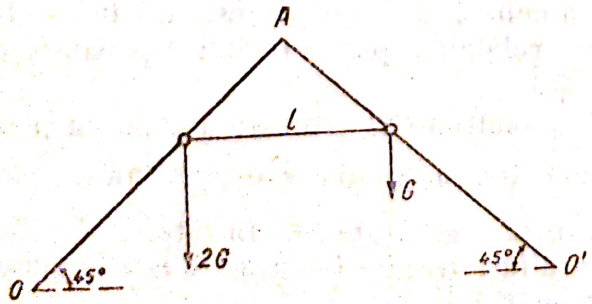


Fig. III. 17

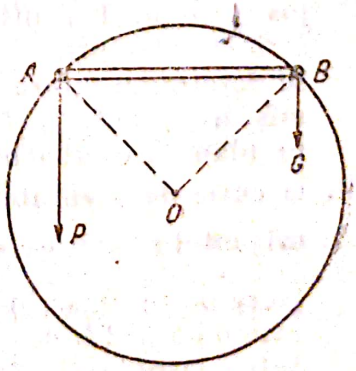


Fig. III. 18

18 a) Pe un cerc de sîrmă vertical, de rază R lunecă două inele de greutate P și G ($P > G$) legate printr-o bară fără greutate proprie de lungime $l = R\sqrt{2}$. Bara la început este orizontală (fig. III.18). Să se determine unghiul pentru care forța din bară devine nulă în timpul mișcării.

b) Luîndu-se $P = 2\,G$ să se determine unde se va opri bara prima oară ($\theta = ?$ unghiul lui OA cu verticala).

19. Să se studieze mișcarea sistemului din problema precedentă dar poziția lui inițială să fie cea din figura III.19.

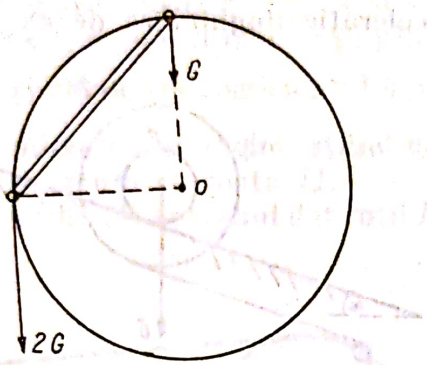


Fig. III.19

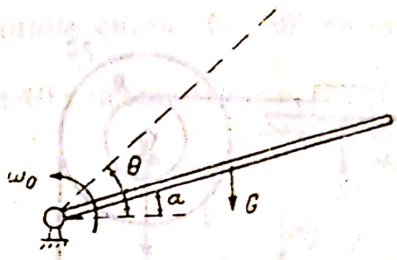


Fig. III.20

20. a) O bară de greutate G și lungime l este lansată în planul vertical cu $\bar{\omega}_0$, de la unghiul $\alpha = 30°$. Să se determine după ce unghi viteza este $\frac{\omega_0}{2}$. Cît este ε în mișcare (fig. III.20).

b) Se presupune problema în plan orizontal cu frecare μ. Se cere după ce unghi θ de la pornire viteza este $\frac{\omega_0}{2}$ și cît este ε.

21. O bară de greutate G, lungime $l = 1$ m, articulată în A, este lansată din poziția verticală (I) cu viteza $\omega_0 = ?$ Ea ajunge în poziția (II) cînd se desprinde din articulație. După aceasta mai efectuează două rotații complete pînă la oprire și se rotește apoi de trei ori complet $+\frac{1}{2}$ rotație astfel încît cade verticală pe sol (fig. III.21). Se cere:

a) Viteza $\omega_0 = ?$ cu care a fost lansată bara din poziția I.

b) Înălțimea h la care urcă pînă la oprire.

c) Distanța d a solului sub punctul de articulație A.

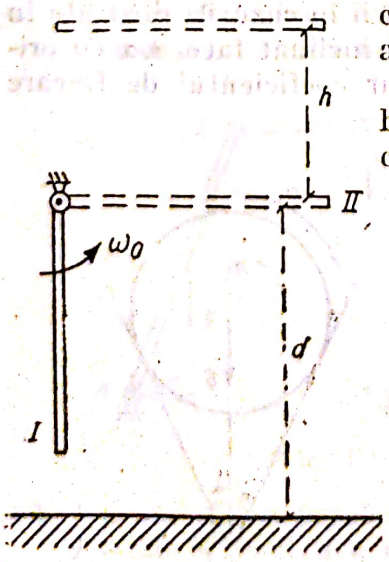


Fig. III.21

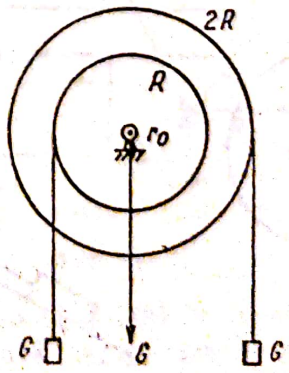


Fig. III.22

22. Cele două roți solidare se află în echilibru static din cauza frecării de coeficient μ_0 la axul de rază $r_0 = \frac{R}{10}$ (fig. III.22). Roțile au împreună greutate G, razele R și $2R$ iar pe cele două roți sînt înfășurate fire de care atîrnă G. Se rupe unul din fire.

Să se determine, în mișcare, tensiunea în firul rămas.

23 La troliul de mai sus nu avem frecare la ax. Se cere frecarea între G de la firul din stînga care acum este situat pe un plan orizontal cu frecare ($\mu = ?$) ca roata să aibă aceeași accelerație unghiulară de ex. $\varepsilon = \frac{g}{8R}$ (fig. III.23).

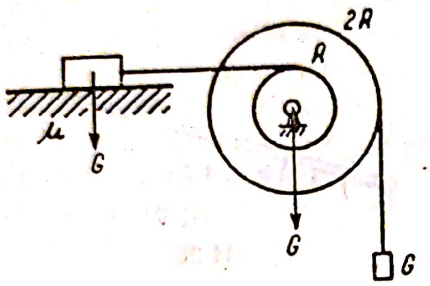


Fig. III.23

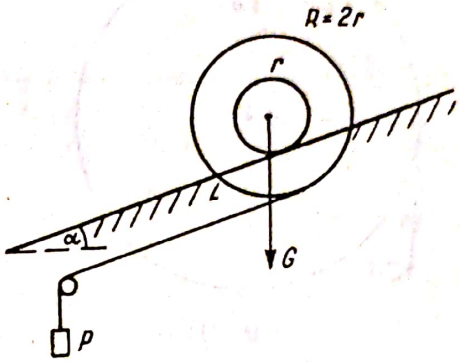


Fig. III.24

24. Pe un plan înclinat sub $\alpha = 30°$ este situată roata compusă din două roți solidare de raze r și $R = 2r$ și greutate G. Pe roata exterioară este trecut un fir de care e prins P (fig. III.24). Să se determine mișcarea, tensiunea T în fir, frecarea în punctul de contact cu planul pentru a nu avea lunecare, în cazurile :

a) $P = 2G$; b) $P = \frac{G}{4}$.

25. Peste o roată de greutate $P = \frac{G}{4}$ este trecut un fir de care e prins G. Roata are raza R și coeficientul de frecare $\mu_0 = 0{,}4$ la axul de rază $r_0 = \frac{R}{4}$.

Să se determine tensiunea în fir în timpul mișcării în cazurile ilustrate în figurile III.25, *a* și *b*. În figura III.25, *b* planul înclinat face $\sphericalangle\alpha$ cu orizontala ($\alpha = 30°$, $\sin\alpha = 0{,}5$; $\cos\alpha \approx 0{,}8$), iar coeficientul de frecare între G și plan are valoarea $\mu = 0{,}5$.

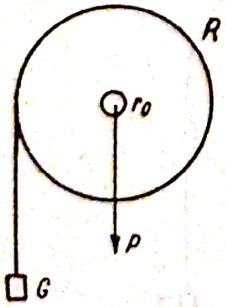


Fig. III.25, *a*

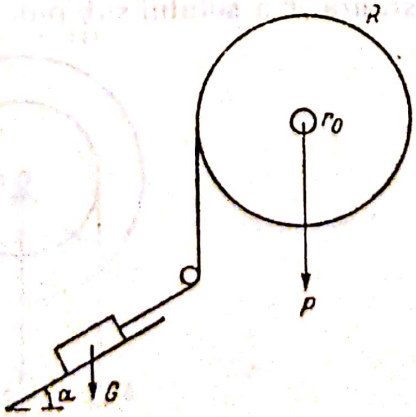


Fig. III.25, *b*

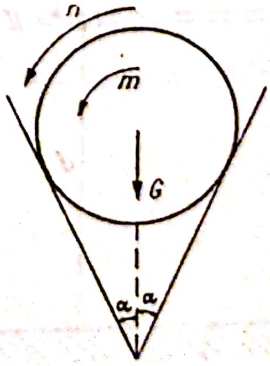


Fig. III.26

26. Roata de greutate G şi rază R are frecare (μ dat) cu lagărul format din două plane înclinate. Se cere momentul cuplului ($m = ?$) necesar ca roata să capete un număr de turaţii n rot/min în t s de la pornirea din repaus (fig. III.26).

27. Cele două roţi din figura III.27, sînt antrenate printr-o curea. Roata I se roteşte cu viteza $n_1 = 360$ rot/min şi are raza $R_1 = 0{,}5$ m. Roata II are raza $R_2 = 0{,}75$ m. Să se determine turaţia n_2 a roţii II.

a) Se ridică cureaua şi se remarcă că roata II se opreşte după 40 s. Roata are greutatea $G = 400$ N şi raza axului $r_0 = 0{,}1$ m. Se cere frecarea la ax şi numărul de turaţii pînă la oprire. Ştiind că frecarea între roata II şi curea are coeficientul $\mu = \frac{3}{2\pi}$, să se determine tensiunile în curea în mişcarea de regim, ştiind că porţiunile curelei fac 30° cu orizontala la tangenţa cu roata II.

b) Ce cuplu $\mathfrak{M}$ ar trebui dat roţii II ca în 40 s să capete iar $n_2 = 240$ rot/min

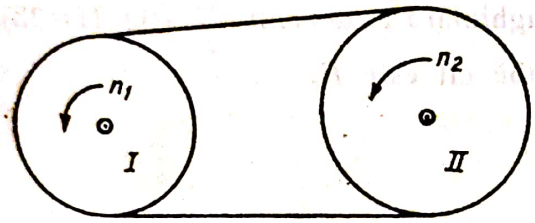


Fig. III.27

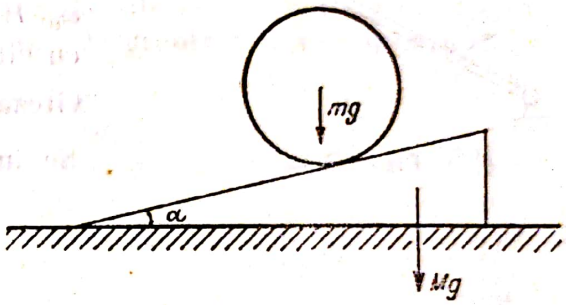


Fig. III.28

28. Pe un corp cu secţiune triunghiulară, de unghi α şi masă M este situată o sferă de rază R şi masă m (fig. III.28). Să se determine spaţiul s parcurs de sferă pe planul înclinat în timpul t.

29. Trei bare egale de lungime l şi greutate G sînt situate ca în figura III.29.

a) Să se determine viteza cu care ajung la sol.

b) Care ar fi viteza unghiulară ω a unei singure bare (de ex. AB) la sol plecînd de la acelaşi $\hat{\alpha}$.

c) Care ar trebui să fie greutatea P a unui punct material lipit în B la această singură bară ca să avem acelaşi ω ca la (a).

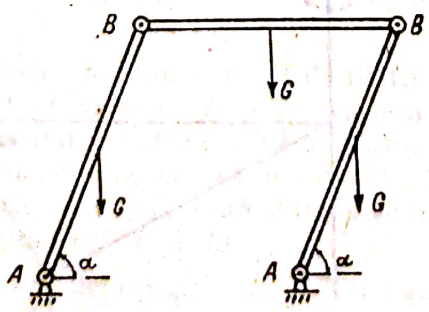


Fig. III.29

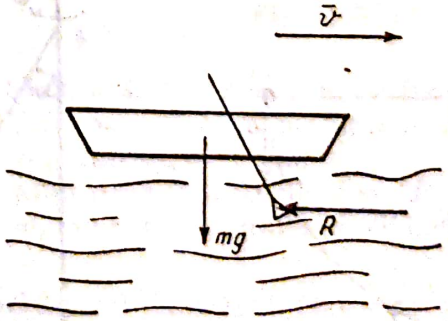


Fig. III.30

30. Un om într-o barcă au împreună greutatea $G = 300$ N. Este nevoie de $F = 30$ N pentru a menţine viteza constantă de 3,6 km/h în apă liniştită (fig. III.30). Să se determine cu cît a scăzut viteza cînd barca a îna-

Scanned with OKEN Scanner

intat cu 5 m cu vîslele ridicate. Cît este viteza după 5 s ? După ce spațiu se oprește ?

31. O picătură de gheață de $G = \frac{1}{1\,000}$ N sosește la sol cu viteza limită $V = 2$m/s, se ciocnește cu solul și după ciocnire capătă o viteză $v' = -\frac{1}{2} V = 1$ m/s în sus $\left(\text{coeficient de restituție } K = \frac{1}{2}\right)$. Se întreabă ce distanță parcurge în sus după ciocnire.

32. Presupunem că în acest mediu rezistent a fost lăsată să cadă această particulă fără viteză inițială. Se întreabă după ce distanță s de la lansare are viteza $v = 1$ m/s.

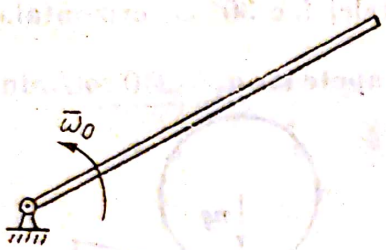


Fig. III.33

33. O bară de masă $M = 3$, lungime $l = \frac{1}{2}$ m se rotește în plan orizontal cu viteza unghiulară ω_0. Rezistența aerului fiind Kv, proporțională cu viteza, se constată că după 3 s de la pornire viteza unghiulară a devenit $\frac{\omega_0}{2}$ (fig. III.33). Se întreabă cît este K.

Capitolul IV

FORȚE CENTRIFUGE

1. Un pendul matematic suspendat vertical cu greutatea G la capăt, lungime l, se ridică pe orizontală și i se dă drumul fără viteză inițială (fig. IV.1). Să se determine în ce poziție ($\sphericalangle \theta = ?$) tensiunea în fir este egală cu cea în stare statică.

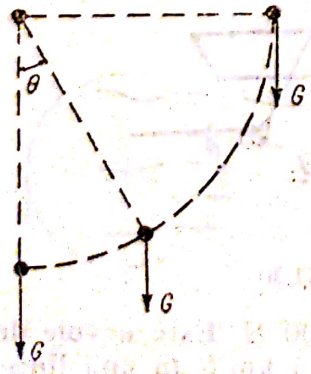


Fig. IV.1

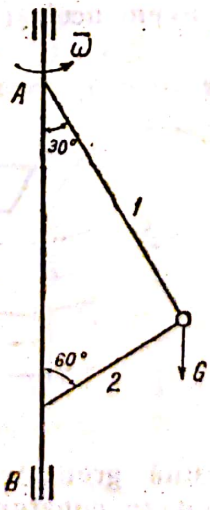


Fig. IV.2, a

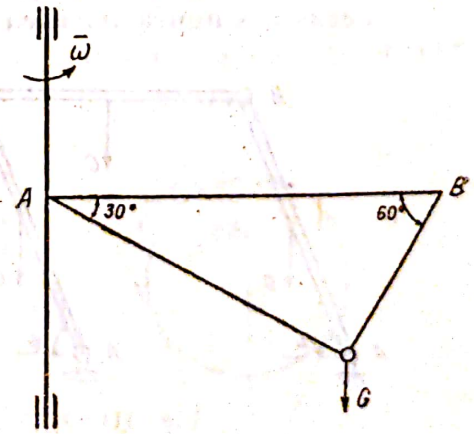


Fig. IV.2, b

2. a) Să se determine tensiunile T_1 și T_2 în firele *1* și *2* care prind greutatea G de o bară AB în jurul căreia sistemul se rotește cu ω dat ($AB = l$) (fig. IV.2, *a*). Discuție.

b) Același enunț dar bara AB e orizontală iar sistemul se rotește în jurul unei bare verticale în A (fig. IV.2, *b*).

c) Același enunț dar sistemul se rotește cu aceleași $\bar{\omega}$ în jurul lui AB orizontal.

3. Să se determine viteza unghiulară a unui punct de pe suprafața Pămîntului și forța centrifugă într-un punct de pe Ecuator.

4. a) Într-un plan orizontal sînt bătute trei cuie formînd vîrfurile unui triunghi echilateral de latură l (fig. IV.4, *a*). Legat în A cu un capăt și înfășurat în jurul celor trei cuie este un fir cu un mic corp de greutate G la celălalt capăt care la început e în A. Corpul se lansează cu o viteză $\bar{v}$ perpendiculară pe fir. Se cere tensiunea T în fir pe cînd acesta se desfășoară. Nu există frecare.

b) Problemă analoagă dar aici sînt 4 cuie bătute astfel încît formează un pătrat de latură l (fig. IV.4, *b*). Corpul de greutate G se lansează cu $\bar{v}$ perpendiculară pe AB.

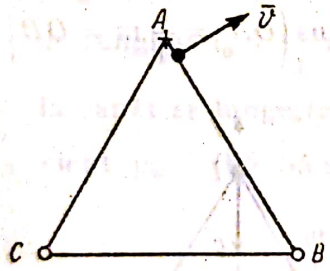


Fig. IV.4, *a*

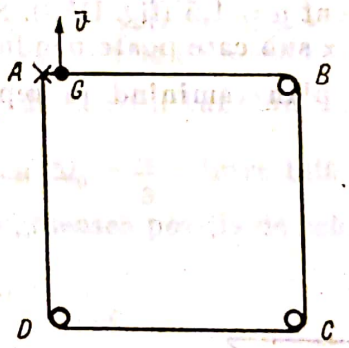


Fig. IV.4, *b*

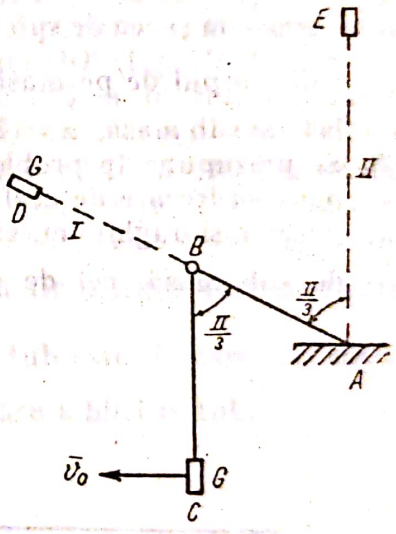


Fig. IV.5

5. a) Într-un plan orizontal un fir ABC ($AB = BC = l = 2$ m) e fixat în A și trece în B peste un cui (fig. IV.5). Se lansează mobilul prins la cealaltă extremitate a firului cu $\bar{v}_0$ orizontal ($v_0 = 12$ m/s).
Să se determine tensiunea în fir și timpul pînă la pozițiile *I* și *II*.

b) Aceeași problemă dar în plan vertical. Se cer tensiunile și vitezele în pozițiile *I* și *II*.

6. Un fir de lungime $l = \frac{1}{2}$ m poate rezista la cel mult 40 N fără a se rupe.

a) Cu ce viteză unghiulară $\bar{\omega}$ poate fi rotit susținînd o greutate de masă $m = 2$ kg, fără a se rupe.

b) De la ce unghi poate fi lăsat pendulul să oscileze în plan vertical fără a se rupe.

Scanned with OKEN Scanner

c) Firul e fixat cu un capăt în O pe o masă orizontală fără frecare, iar la celălalt capăt este un mic corp G. Cu ce viteză $\bar{\omega}$ poate fi rotit pe masă firul (fig. IV.6, c).

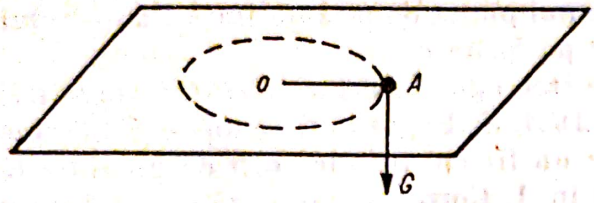


Fig. IV.6, c

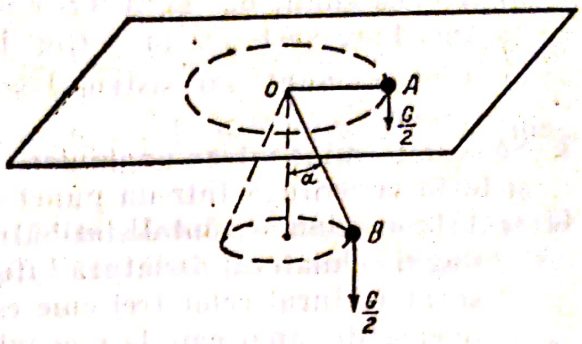


Fig. IV.7

7. Același fir din problema precedentă 6 care rezistă la 40 N e trecut printr-o găurică printr-un plan orizontal fără frecare. La fiecare capăt se prinde un corp de greutate $\frac{G}{2} = 10$ N (fig. IV.7). Porțiunea de fir de pe masă are $\frac{l}{2} = \frac{1}{4}$ m și cea de sub masă $\frac{l}{2} = \frac{1}{4}$ m. Se cere $\omega_1 = ?$ cu care se poate roti corpul de pe masă și $\omega_2 = ?$ cu care se poate roti ca pendul conic cel de sub masă, $\hat{\alpha} = ?$

8. Se presupune în problema 7 de mai sus că corpul de pe masă stă în repaus cu frecare de coeficient $\mu = 1{,}5$ (fig. IV.8). Se cere tensiunea în fir în mișcare și unghiul maxim α sub care poate pendula în plan vertical corpul de sub masă, cel de pe plan rămînînd în repaus $\left(OA = \frac{l}{4}\text{ m} = OB\right)$.

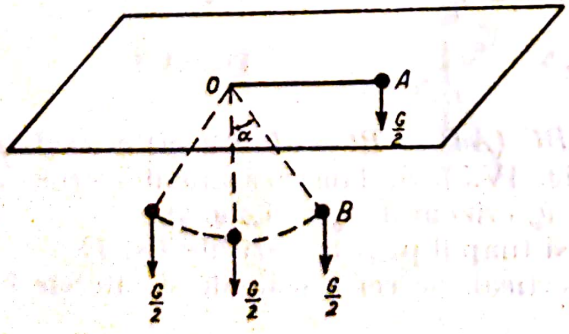


Fig. IV.8

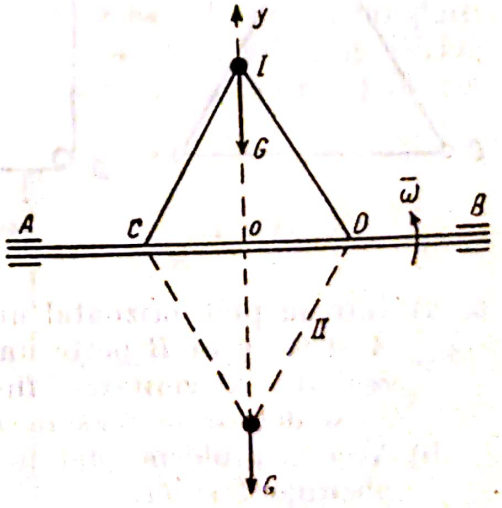


Fig. IV.9

9. Axul AB se rotește cu n rot/min (fig. IV.9). Se cer tensiunile în firul care prinde pe G, în pozițiile I și II (CDG este triunghi echilateral de înălțime $h = 2$ m).
Discuție. Se presupune că firul se rupe la $T_0 = 6\,G$.

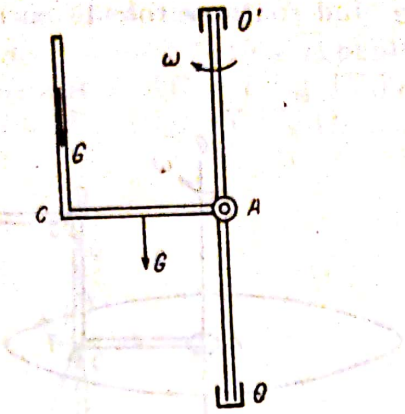


Fig. IV.10, *a*

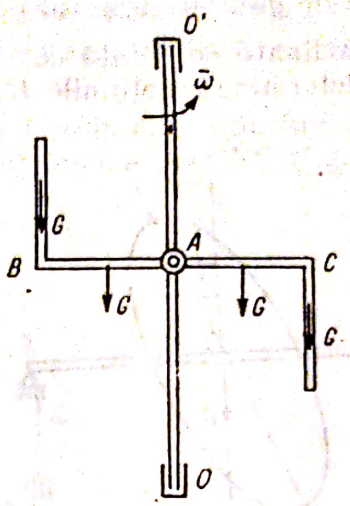


Fig. IV.10, *b*

10. a) Bara cotită în unghi drept (fiecare braţ avînd greutate G şi lungime l) este articulată în A de un ax, raza articulaţiei r_A. Să se determine μ_A în articulaţie, ca bara cotită să nu cadă din poziţia cu BC orizontal în timpul rotaţiei sistemului cu ω în jurul lui OO' (fig. IV.10, *a*).

b) Aceeaşi problemă dar bara cotită e continuată şi în cealaltă parte (fiecare porţiune de lungime l are greutate G). Se cere μ_A la articulaţia de rază r_A cînd $\bar{\omega}$ e dat pentru poziţia din figura IV.10, *b* (BC orizontal).

11. Un tub ca în figura IV.11 se roteşte cu $\omega = 10$ rad/s în jurul unui ax vertical. În interior se găseşte o bilă de masă $m = 2$ kg prinsă de un fir elastic de lungime $l_0 = \frac{1}{2}$ m de centrul tubului. Acest fir atîrnat vertical cu mg la capăt se lungeşte cu $\Delta l_0 = \frac{l_0}{8}$. Între bilă şi tub este frecare de coeficient $\mu_0 = 0{,}5$. Să se găsească poziţia de echilibru a bilei în tub.

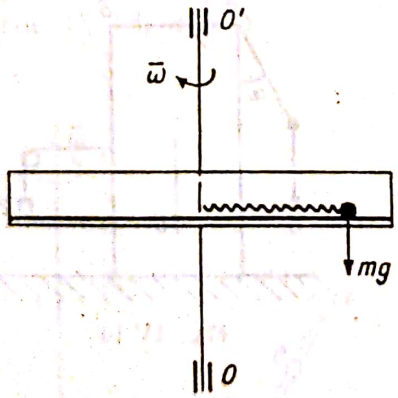


Fig. IV.11

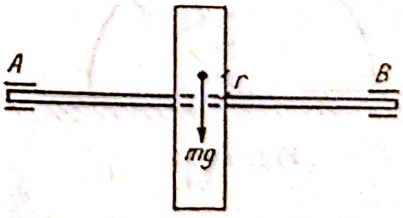


Fig. IV.12

12. Roata de masă $m = 5$ kg, raza $R = 1$ m se roteşte cu $n = 1\,200$ rot/min. Greutatea este puţin excentrică cu $r = 0{,}2$ cm (fig. IV.12). Să se determine reacţiile maxime şi minime la reazemele A şi B.

Scanned with OKEN Scanner

13. O roată de greutate G și rază R este situată la jumătatea axului AB dar puțin înclinată cu $\hat{\theta}$ față de verticală (fig. IV.13).
Să se determine reacțiunile R_A și R_B cînd roata se rotește cu n rot/min.

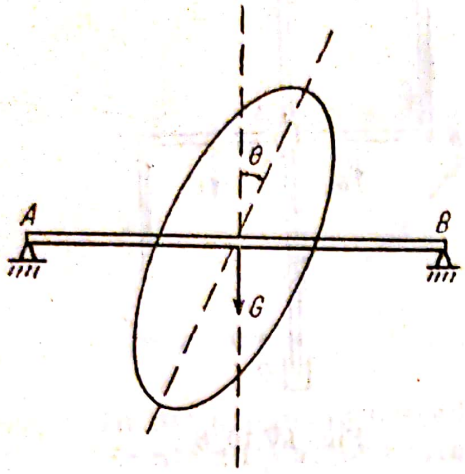


Fig. IV.13

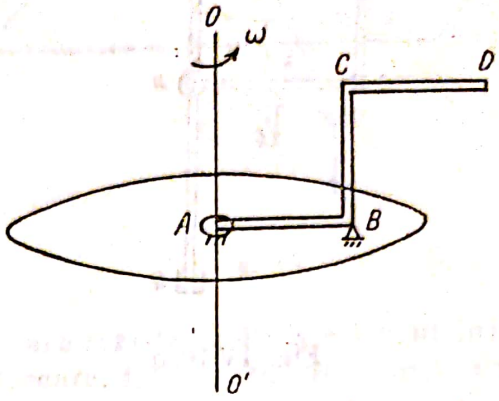


Fig. IV.14

14. Bara cotită sub unghiuri drepte are $AB = BC = l = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\left(\gamma \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)$, iar $CD = x$. Articulația A și reazemul B sînt pe o placă orizontală care se rotește cu $n = 120$ rot/min în jurul unui ax OO' vertical. Știind că reazemul B poate suporta cel mult $20\,\gamma l$ să se determine lungimea maximă a lui $CD = x$ (fig. IV.14).

15. Bila de masă m e legată cu un fir de lungime R sub $\alpha = 30°$ și este în contact cu emisfera fixă de rază R. Se cere $\hat{\theta} = ?$ unde bila va părăsi emisfera după tăierea firului și cum a variat reacțiunea N în punctul A imediat după tăierea firului (fig. IV.15).
Să se determine unghiul β în care N în mișcare are aceeași valoare ca N static.

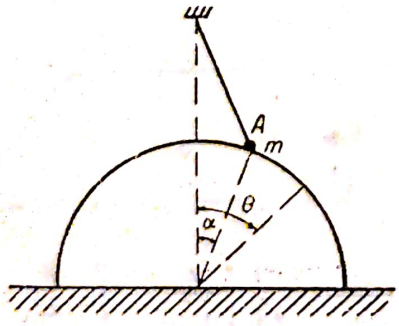


Fig. IV.15

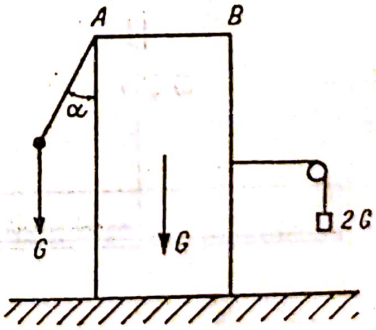


Fig. IV.16

16. O prismă avînd bază b și înălțime l, de greutate G, e prinsă la jumătatea înălțimii de firul de care atîrnă $2G$. Coeficientul de frecare al prismei cu solul $\mu = 0{,}5$. În A este prins un pendul de greutate G, lungime $\frac{l}{2}$ (fig. IV.16). Se cere unghiul firului cu verticala $\alpha = ?$ în timpul mișcării și $AB = b$ ca prisma să fie pe punctul de răsturnare în timpul mișcării.

Scanned with OKEN Scanner

17. O bară AB de lungime l și greutate G este articulată de o bară verticală care se rotește cu $\bar{\omega}$ și legată cu un fir de această bară. Se dă α unghiul între cele două bare.

Să se determine T în fir și $\bar{\omega}$ pentru care $T = 0$, dacă e posibil, în cazurile: a) unde $AB = AC = l$ (fig. IV.17, *a*); b) unde $AC = BC$ (fig. IV.17, *b*); c) $AB = BC$ (fig. IV.17, *c*).

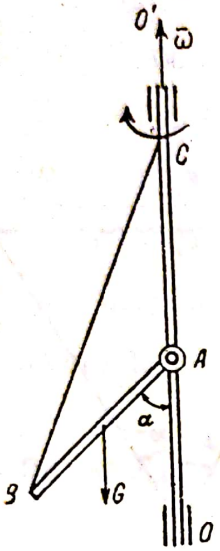


Fig. IV.17, *a*

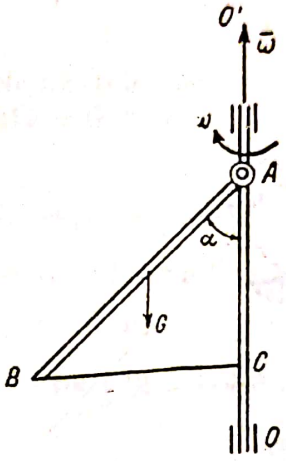


Fig. IV.17, b

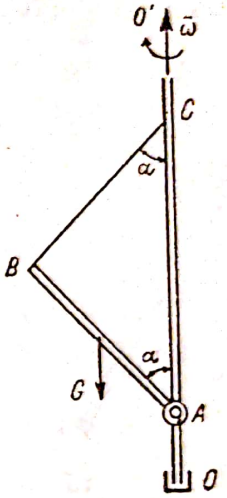


Fig. IV.17, *c*

18. Fie ABC o bară cotită ca în figură $\left(AB = \frac{1}{2}\text{ m}\right)$. Sistemul se rotește în jurul unui ax vertical. Un inel de greutate G stă din cauza frecării de coeficient $\mu = \frac{1}{4}$ la jumătatea lui AB. Unde va sta el ($BD = x = ?$) la aceeași viteză de rotație pe porțiunea BC cu aceeași frecare, pentru cazurile din figurile IV.18, *a* și *b*.

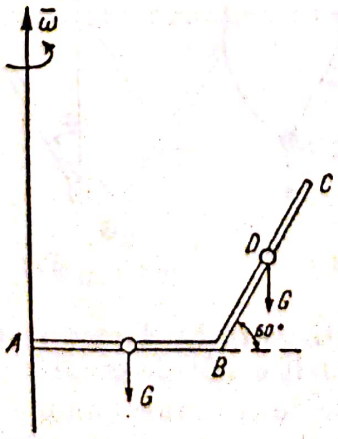


Fig. IV.18, *a*

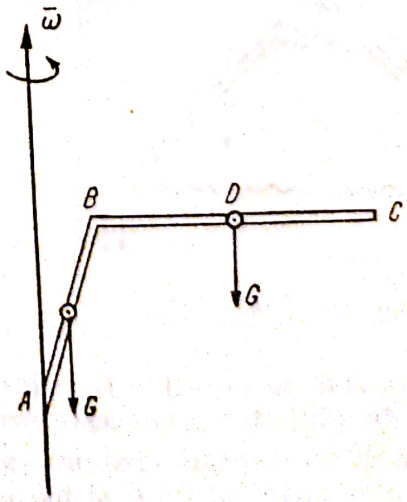


Fig. IV.18, b

Scanned with OKEN Scanner

19. Fie un fir elastic care atîrnat vertical cu G la capăt se lungeşte cu Δl_0. Lungimea lui naturală neîntinsă este l_0. Să se determine viteza unghiulară de rotaţie ca sistemul din figura IV.19 legat de acest fir de lungime l_0 la $\frac{3l}{4}$ de A, să se aşeze sub unghiul dat $\hat{\alpha}$.

a) $l_0 = \frac{l}{4}$; $\Delta l_0 = \frac{l}{8}$; $\alpha = 30°$; b) $l_0 = l$; $\Delta l_0 = \frac{l}{2}$; $\alpha = 60°$;

c) $l_0 = \frac{l}{4}$; $\Delta l_0 = \frac{l}{8}$; $\alpha = 30°$; d) $l_0 = l$; $\Delta l_0 = \frac{l}{4}$; $\alpha = 45°$;

e) $l_0 = \frac{l}{2}$; $\Delta l_0 = \frac{l}{4}$; $\alpha = 30°$; f) $l_0 = \frac{l}{4}$; $l_0 = \frac{l}{8}$; $\alpha = 30°$.

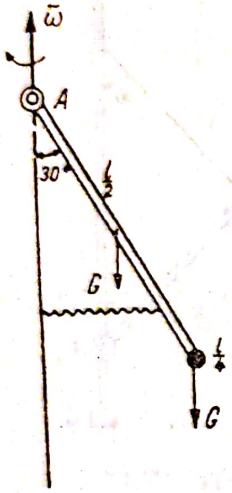


Fig. IV.19, *a*

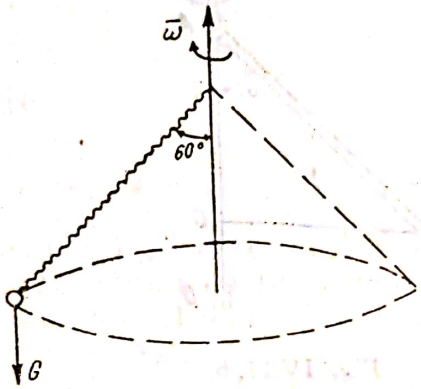


Fig. IV.19, *b*

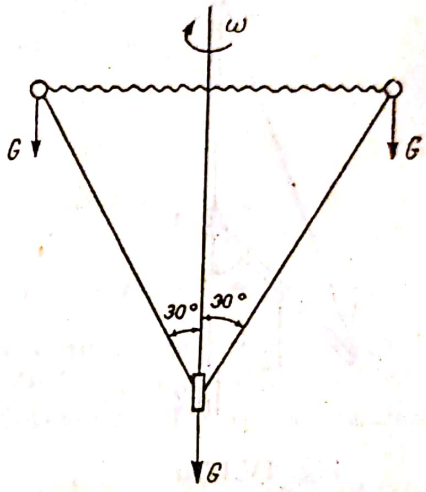


Fig. IV.19, *c*

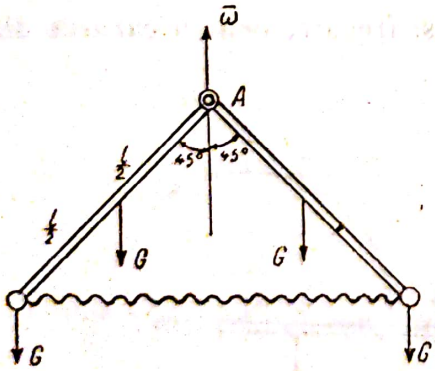


Fig. IV.19, *d*

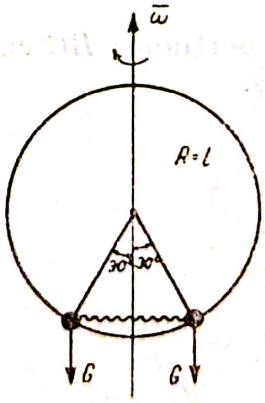


Fig. IV.19, *e*

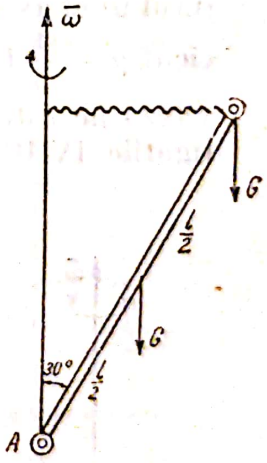


Fig. IV.19, *f*

20. O bară AB de greutate G şi lungime l articulată în A este prinsă cu un fir de lungime tot l care este prins cu celălalt capăt de greutatea G de pe o bară AP orizontală. Sistemul se învîrteşte cu ω în jurul unui ax vertical. Se cere μ între corpul G şi bara AP ca să stea la echilibru dinamic ca în figura IV.20.

Scanned with OKEN Scanner

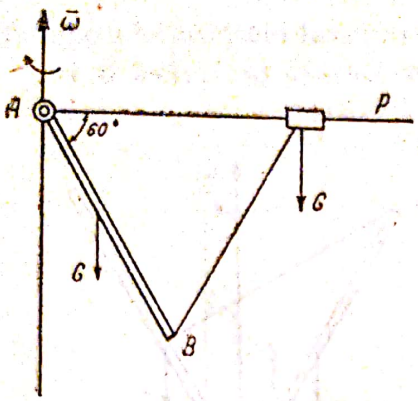


Fig. IV.20

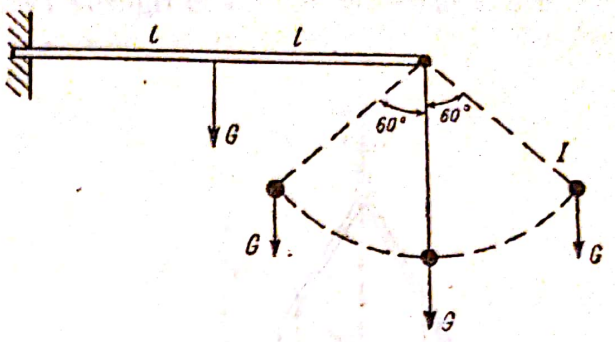


Fig. IV.21

21. Între ce limite variază elementele încastrării cînd pendulul cu fir de lungime l și corpul de greutate G la capătul firului oscilează sub 60° ca în figura IV.21.

22. De o bară orizontală DD' care se rotește cu $\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}$ este articulată în A o bară de greutate G și lungime l, legată cu un fir C_1C_2 unde $AC_1 = AC_2 = \frac{l}{2}$. Se cere T_1 și T_2 și F_A în acele poziții I și II, unde T sînt tensiunile în fir, iar F_A forța de articulație (fig. IV.22).

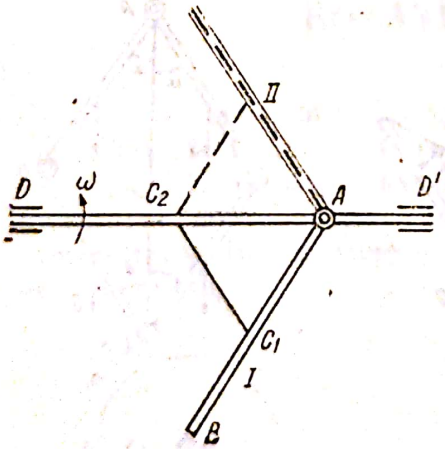


Fig. IV.22

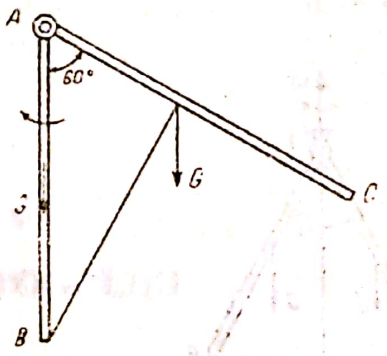


Fig. IV.23, a

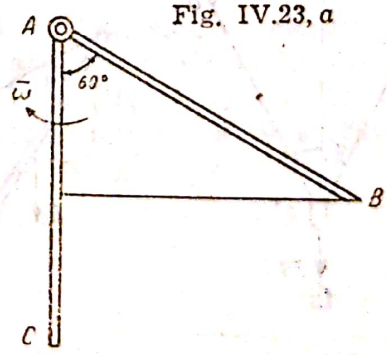


Fig. IV.23, b

23 Un compas ale cărui bare articulate în A au greutate G și lungime l este deschis sub 60° și legat cu un fir din B pînă la jumătatea lui AO. Sistemul se rotește în jurul, fie al lui AB vertical, fie al lui AC, vertical cu ω. Să se determine tensiunea în fir în cazurile din figurile IV. 23 *a* și *b*.

Scanned with OKEN Scanner

24. Compusul din problema precedentă se rotește în jurul bisectoarei unghiului din A care are $60°$ ca în figurile IV.24, *a* și *b*. Se cere tensiunea în fir.

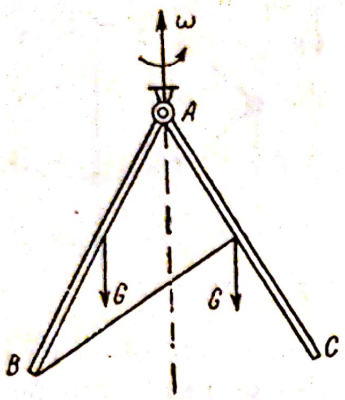


Fig. IV.24, *a*

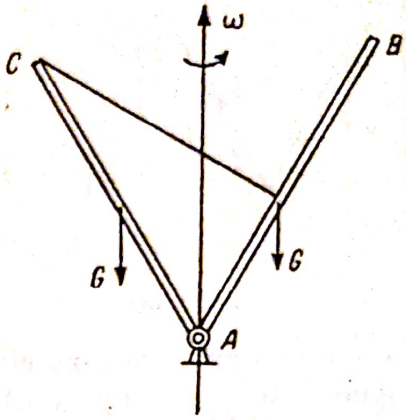


Fig. IV.24, *b*

25. Două bare articulate în A de greutate G și lungime $l = 4$ m au prins la capete cîte un fir de lungime tot l de care e prinsă o greutate $2G$. Aceasta poate luneca pe bara AA' de care e articulat A. Să se determine turația sistemului în rotație în jurul lui AA' cînd unghiurile α sînt de $30°$ în figurile IV.25, *a* și IV.25, *b* și tensiunea T în fir în acest caz.

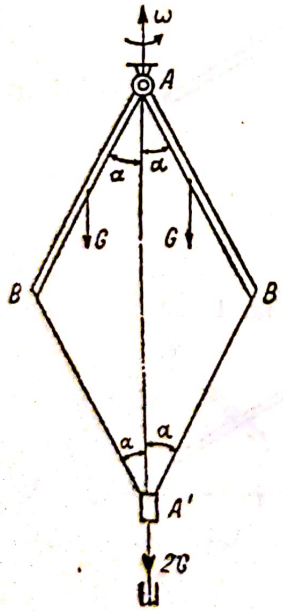


Fig. IV.25, *a*

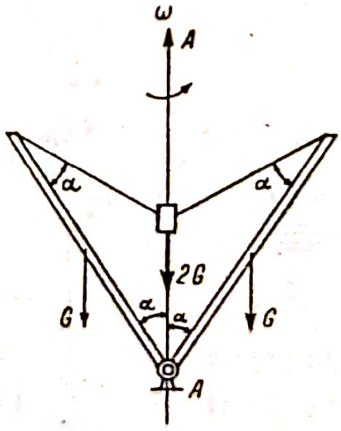


Fig. IV.25, *b*

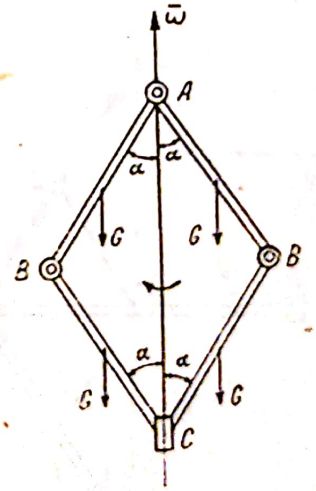


Fig. IV.26

26. Patru bare egale de lungime l și greutate G sînt articulate între ele. În A ele sînt articulate de o tijă. Sistemul se rotește în jurul tijei cu $\bar{\omega}$. C este un cursor fără greutate proprie care lunecă pe tijă (fig. IV.26). Să se determine $\hat{\alpha}$ în echilibru dinamic.

Scanned with OKEN Scanner

27. De o tijă OO' este articulată bara AB de greutate G și lungime l, de care este articulată în B o bară egală BC de lungime l și greutate G. Se cere $\bar{\omega} = ?$ pentru poziția de echilibru dinamic în rotație în jurul lui OO' ca în figura IV.27 și forța din fir.

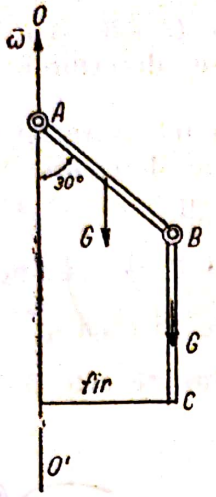


Fig. IV.27

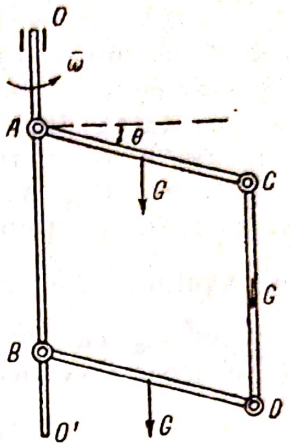


Fig. IV.28

28. Într-un plan vertical, trei bare egale de greutate G și lungime l sînt articulate între ele astfel încît formează laturile unui pătrat. A și B sînt articulate de o bară care se rotește cu $\bar{\omega}$ (fig. IV.28). Să se determine $\hat{\theta}$ la echilibru dinamic între AC și orizontală.

Capitolul V

ROTAȚII, ROSTOGOLIRI

1. O roată de masă $m = 70$ kg, rază $R = 1$ m, este accelerată în 2 min de la repaus la $n = 240$ rot/min. Roata are coeficientul de frecare la ax $\mu_0 = 0{,}1$, iar raza axului $r_0 = 0{,}1$ m (fig. V.1). Să se determine momentul cuplului care trebuie aplicat pentru a se căpăta această accelerare și în cît timp și după cîte turații se va opri la scoaterea acestui cuplu.

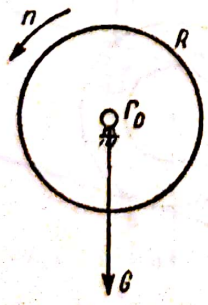


Fig. V.1

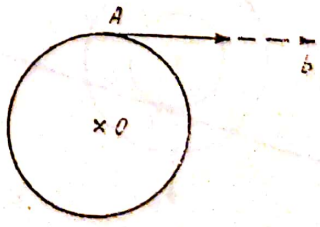


Fig. V.2

2. a) În planul orizontal este un disc de masă $m = 2$ kg, $R = 0{,}6$ m. Discul are centrul O fix și este tras cu o forță constantă F astfel încît capătul A se deplasează în B ($AB = 9$ m) în 3 s de la repaus (fig. V.2). Se cere $F = ?$ și viteza unghiulară $\omega = ?$ după cele 3 s. Între disc și plan frecare de coeficient $\mu = 0{,}2$.

b) Aceeași problemă în plan vertical dar în O este o articulație de rază $r = 0{,}1$ m, cu frecare $\mu = 0{,}2$. Să se determine F cînd în 3 s de la pornirea din repaus $AB = 9$ m.

3. a) De o roată de masă M și rază R e lipit un punct material de masă m la extremitatea diametrului orizontal. Să se determine coeficientul de frecare μ între roată și sol ca să înceapă să se rostogolească fără a luneca (fig. V.3, *a*).

b) Aceeași roată cu punctul lipit ca în figura V.3, *b* se poate roti în jurul axului A cu coeficient de frecare μ_0 și rază $r_0 = \frac{R}{10}$. Să se determine μ_0 ca roata să se rotească pînă ce cele două greutăți sînt pe aceeași verticală.

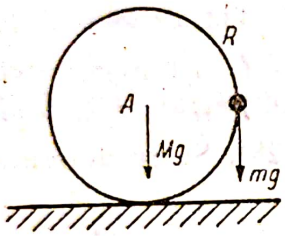


Fig. V.3, *a*

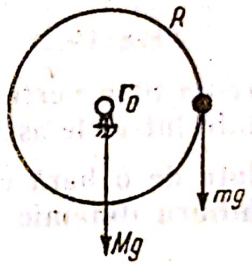


Fig. V.3, *b*

4. a) Troliul din figura V.4, *a* este format din două roți solidare ($R=2r$) El are greutate G și este situat pe un plan înclinat sub $\sphericalangle\alpha$ și prins cu un fir paralel cu planul. În punctul de contact cu planul înclinat există frecare, coeficientul μ fiind jumătate din cel necesar pentru repaus static. Să se determine tensiunea T a firului în mișcare. (Pentru a înțelege figura, să se presupună că planul înclinat de fapt este format de 2 șine paralele, porțiunea de rază r rezemîndu-se de șine, iar cea de rază R este între șine.)

b) Aceeași problemă cu figura V.4, *b*.

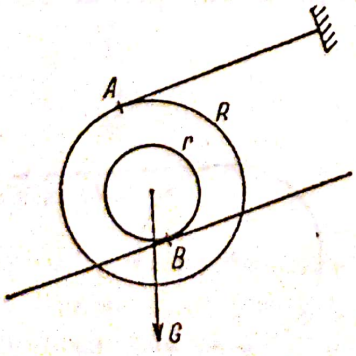


Fig. V.4, *a*

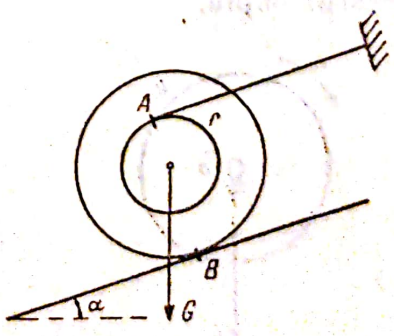


Fig. V.4, *b*

Scanned with OKEN Scanner

5. Două troliuri avînd momente de inerție în raport cu centrul respectiv I_1 și I_2, raze R_1 și R_2 și r_1 și r_2, sînt antrenate între ele prin frecare ca în figura V.5. Pe ele sînt înfășurate fire de care atîrnă greutățile P_1 respectiv P_2. Se cer vitezele lui P_1 și P_2 și tensiunile în fire T_1 și T_2. Date: $R_1 = R_2 = 2r_1 = 2r_2$, $P_1 = 2P_2 = 2G$ (G = greutatea troliurilor).

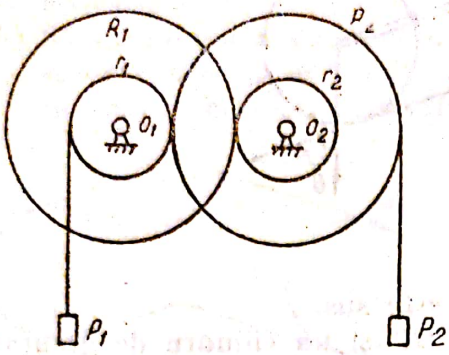


Fig. V.5

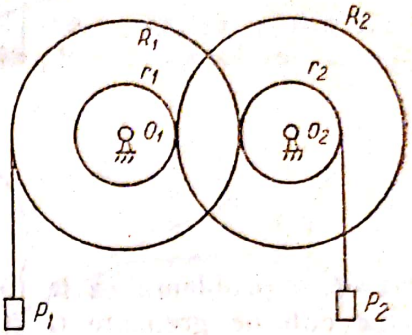


Fig. V.6

6. Aceeași problemă 5 cu aceleași date, dar montajul din figura V.6.

7. Un troliu avînd razele R și r ($R = 2r$), de greutate G și de care atîrnă $P = 2G$, se rotește t s de la repaus fără frînă (fig. V.7). După acest timp se aplică ca frînă bara AB ($\mu = 0{,}5$). Se cere forța $Q = ?$ ca troliul să fie oprit după alte t' s (de exemplu $t' = 2t$). Bara se presupune fără greutate proprie ($AC = CB = l$).

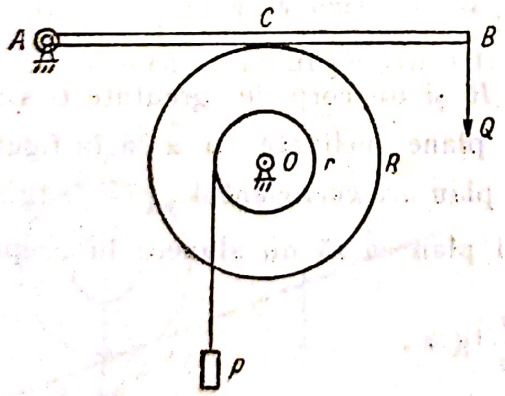


Fig. V.7

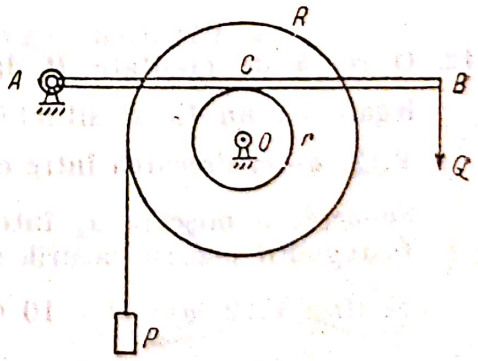


Fig. V.8

8. Aceeași problemă cu montajul din figura V.8.

9. Roata de greutate G și rază R e legată printr-o bară fără greutate proprie la jumătatea laturii cubului de latură $l = 2R$ și greutate G

(fig. V.9). Se cere frecarea ca roata să nu lunece (la cub nu este frecare). Se cere $T = ?$ în bară. Să se determine pentru care unghi α se răstoarnă cubul.

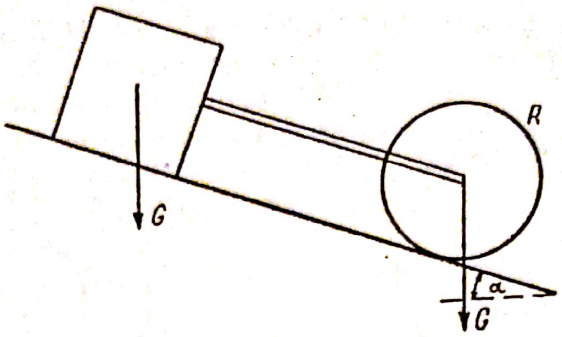


Fig. V.9

10. Aceeași problemă ca la (9) dar roata este sus.

11. Un cub de greutate G și latură $l = 2R$ și un cilindru de greutate G și rază R sînt situate pe un plan înclinat sub $\hat{\alpha}$ (fig. V.11). Între cub și plan există frecare de coeficient μ_1. Se cere coeficientul de frecare μ_2 între cilindru și plan pentru ca cilindrul să nu lunece în mișcare. Se cer condițiile ca corpurile să rămînă în contact în timpul mișcării.

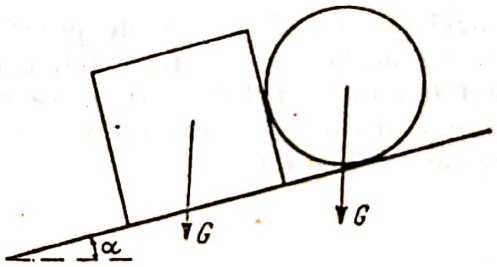


Fig. V.11

12. O roată de greutate P dată, rază R și un corp de greutate G sînt legate cu un fir și situate pe două plane înclinate cu $\hat{\alpha}$ ca în figura V.12, *a*—*c*. Frecarea între corpul G și plan are coeficientul $\mu_1 = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Se cere în mișcare μ_2 între roată și plan ca să nu alunece în timpul rostogolirii pentru cazurile:

a) (fig. V.12, *a*): $P = 10\ G$; $\mu_1 = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

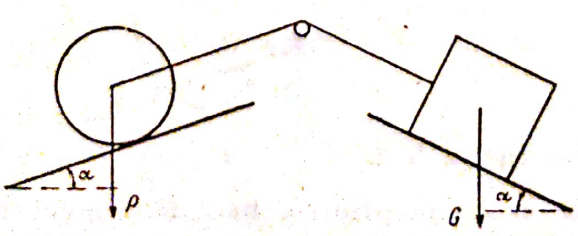


Fig. V.12, *a*

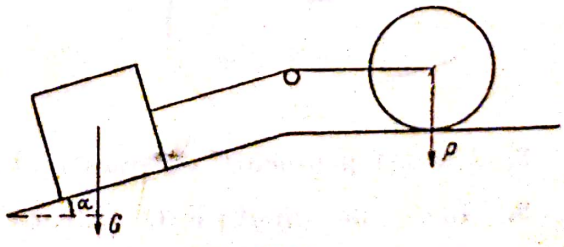


Fig. V.12, *c*

b) (fig. V.12, *a*): $P = \frac{G}{10}$; $\mu_1 = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$,

c) (fig. V.12, *c*): $P = \frac{G}{10}$; $\mu_1 = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

13. a) Două roți ambele de greutate G și rază R se reazemă pe două plane înclinate sub 30° (fig. V.13). La contactul între roți și plane este frecare de coeficient $\mu = \frac{1}{4}$. Să se determine tensiunea în fir în timpul mișcării.

b) Să presupunem că unul din plane face $\sphericalangle\alpha = 60°$ cu orizontala. Să se determine $\mu_1 = ?$ între roată și acest plan ca ea să fie în repaus în timpul mișcării celeilalte.

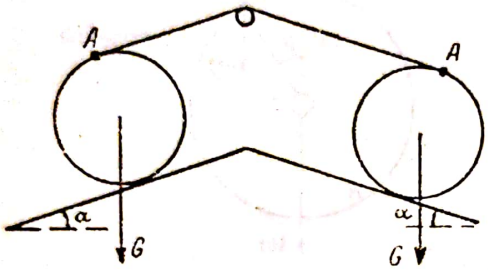


Fig. V.13

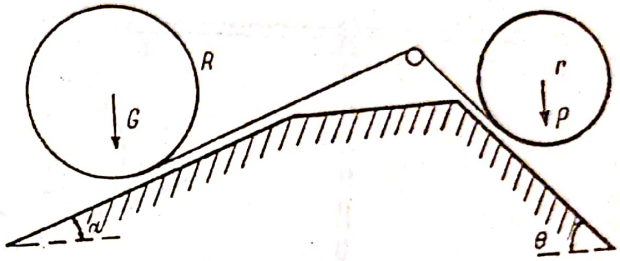


Fig. V.14

14. Fie două roți de raze R și r și greutăți G și P (fig. V.14) pe care e înfășurat un fir care le unește (firul e în contact cu planele înclinate sub $\hat{\alpha}$ și $\hat{\theta}$ pe care le rostogolesc roțile). Se cere tensiunea în fir. *Caz particular*: $\alpha = \theta$, $G = P$, $R = r$.

15. Troliul din figura V.15 de greutate G și raze $R = 2r$ și r este legat de corpul de aceeași greutate G, înălțime $4r$, printr-un fir paralel cu planul înclinat. Se dau coeficienții de frecare $\mu_1 = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$ la troliu și $\mu_2 = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$ la corp. Să se determine tensiunea T în fir în mișcare și lățimea corpului pentru a fi la limita răsturnării ($BC = r$).

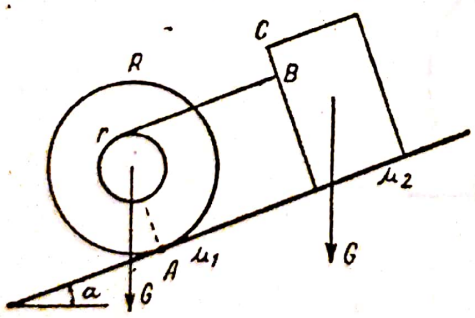


Fig. V.15

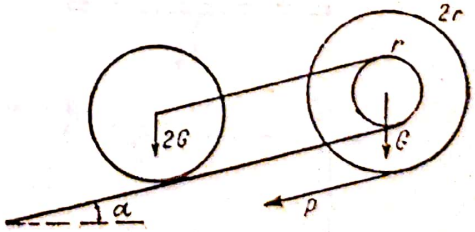


Fig. V.16

16. a) Se cere forța P care lucrînd asupra troliului de greutate G compus din două roți solidare de raze r și $2r$ să ridice roata de greutate $2G$ și rază $2r$ pe planul înclinat sub $\hat{\alpha}$ cu accelerație $a = \frac{g\sin\alpha}{4}$. Să

se determine μ_1 și μ_2 la roată, respectiv troliu ca ele să nu lunece (fig. V.16).

b) Aceeași problemă pentru roata coborînd planul înclinat.

17. Bara ABC cotită în unghi drept, avînd cele două brațe $AB = BC = l$ de greutate G, articulată în A, cade din poziția I în poziția II apoi III. Să se determine F_A forța din articulație în toate cele trei poziții (fig. V.17).

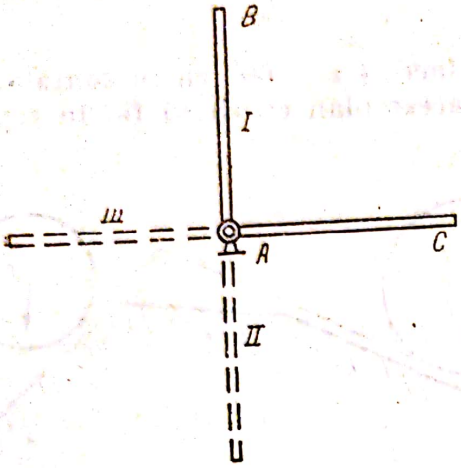


Fig. V.17

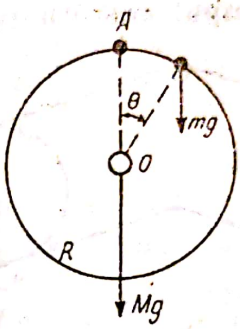


Fig. V.18

18. Fie o roată de masă M care se poate roti fără frecare în jurul centrului, și un mobil de masă $m = \frac{M}{2}$ situat la început la foarte mică distanță de A (fig. V.18). Să se determine unghiul θ de la care începe să lunece pe roată, între m și roată fiind frecare $\left(\mu = \frac{1}{4}\right)$.

19. O bară articulată în A, de greutate G și lungime $l = \frac{1}{2}$ m este lansată cu ω_0 din poziția verticală I. Cînd este în poziția orizontală II se desprinde din A și se mai urcă făcînd o jumătate de rotație pînă oprește să se mai urce. Se cere $\omega_0 = ?$, distanța de urcare $h = ?$ și sub ce unghi este bara cînd centrul ei ajunge în C pe orizontala lui B din poziția I (fig. V.19).

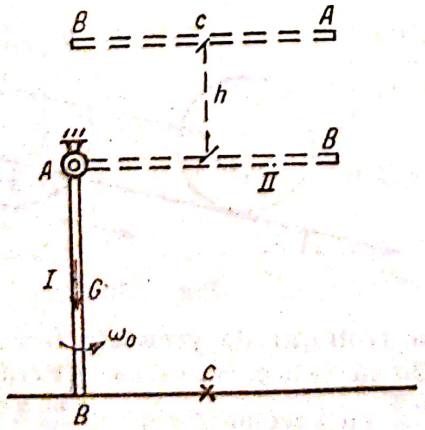


Fig. V.19

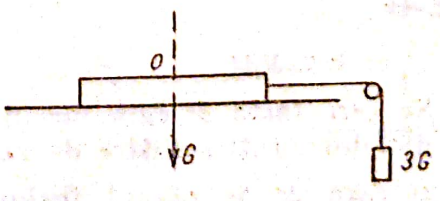


Fig. V.20

20. Un disc circular de greutate G și rază R este așezat pe o masă orizontală. În jurul lui e înfășurat un fir care trece fără frecare peste un scripete (fig. V.20). La capătul firului atîrnă $3G$. Să se determine accelerația lui $3G$ și tensiunea în fir cînd:

a) Prin O trece un ax vertical fix în jurul căruia se rotește discul fără a se deplasa pe plan în cazurile fără frecare și cu frecare.

b) Discul e liber să se deplaseze pe planul orizontal în cazurile fără frecare și cu frecare $\left(\mu = \frac{1}{2}\right)$.

21. O roată este situată pe un plan înclinat sub 45° cu frecare de coeficient $\mu = \frac{1}{4}$. Roata are greutate G și rază R (fig. V.21). Să se studieze mișcarea. Discuție.

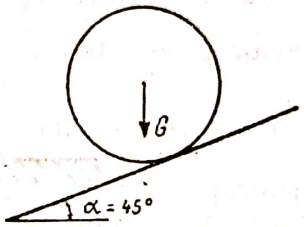


Fig. V.21

22. Roata de greutate G și rază R este situată pe planul înclinat sub 45° cu frecare $\mu = \frac{1}{4}$. Ea este lansată în sus pe plan cu $\bar{v}_0$ dat. Să se determine mișcarea (v. fig. V.21).

23. Roata de greutate G și rază R, avînd coeficientul de frecare cu solul $\mu = \frac{1}{4}$ și cel de frecare de rostogolire $s = \frac{R}{10}$, este lansată cu $\bar{v}_0$ dat (fig. V.23). Să se determine mișcarea.

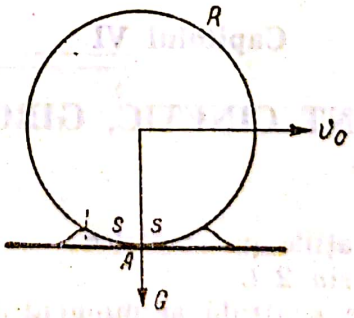


Fig. V.23

24. Să se studieze mișcarea roții în jos pe planul înclinat din problema (21) ținînd seama și de frecarea de rostogolire $s = \frac{R}{10}$.

25. Să se studieze mișcarea roții în sus pe planul înclinat din problema (22) ținînd seama și de frecarea de rostogolire $s = \frac{R}{10}$.

Scanned with OKEN Scanner

26. O roată de rază R și greutate G se rotește cu $\bar{\omega}_0$ în jurul centrului său fix. Pentru frînare se aduce altă roată de greutate $P = 2G$, rază $r = \frac{R}{2}$, prinsă cu un fir astfel încît și centrul său este fix (fig. V.26). Între cele două roți este frecare de coeficient μ. Să se determine timpul pînă cele două roți nu mai patinează între ele și vitezele lor unghiulare ω_1 și ω_2 în acel moment. Mișcarea după acest moment.

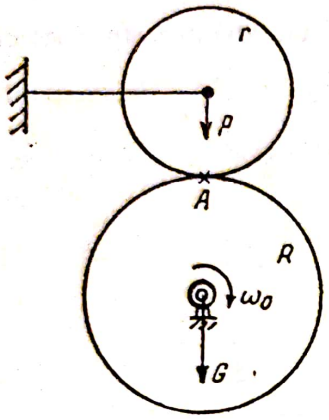


Fig. V.26

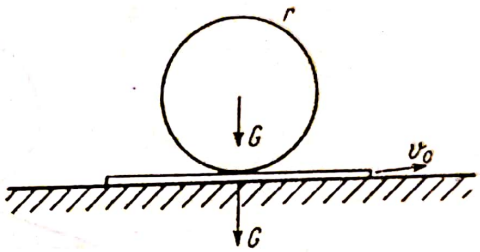


Fig. V.27

27. O bară de greutate G înaintează cu viteza $\bar{v}_0$ pe planul orizontal cu frecare de coeficient μ_0 cînd se așază pe ea pentru a o opri rotița de greutate tot G cu frecare de coeficient $\mu = 4\mu_0$ (fig. V.27). Să se determine timpul pînă se oprește patinarea între cele două corpuri și vitezele lor atunci.

Capitolul VI

MOMENT CINETIC, GIROSCOP

1. Fie elipsa dată de ecuațiile parametrice:
   $x = 3 \cos 2t$; $y = 4 \sin 2t$.
   Să se arate că forța e centrală și momentul cinetic constant.
2. Fie forțele elastice $X = -Kx$; $Y = -Ky$ unde K este dat prin atîrnarea firului elastic cu mg la capăt, care se alungește cu $l = 1$. Se dau condițiile, la $t = 0$; $x = 2$, $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = 1$. Să se determine traiectoria, momentul cinetic.
3. O bilă de masă $m = \frac{1}{20}$ kg prinsă la capătul unui fir, se rotește pe o masă fără frecare pe un cerc de rază $r = 0{,}2$ m cu $v_0 = 4$ m/s. Firul trece printr-o gaură O a mesei și are o greutate $P = ?$ la capăt (fig. VI.3).

Scanned with OKEN Scanner

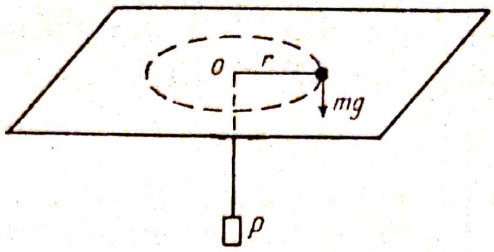


Fig. VI.3

Să se determine :

a) greutatea P. b) Se dublează P.
Să se determine cu ajutorul momentului cinetic, care va fi x, raza cercului pe care se rotește bila în acest caz și viteza sa.

4. Fie o sferă de rază R, greutatea specifică γ N/m³ care se rotește în jurul unui diametru cu $\bar{\omega}$ dat. Se desprinde un strat de grosime $\frac{R}{2}$.

Să se determine viteza ω cu care se va roti sfera de rază $\frac{R}{2}$ rămasă.

5. Într-un tub orizontal fără greutate proprie de lungime $2l$ se află o bară AB de greutate G și lungime l, oprită în C de un mic opritor. Sistemul se rotește cu $\bar{\omega}$ în jurul unui ax vertical (fig. VI.5). Se cere presiunea pe opritorul C. Presupunem că opritorul C se desprinde și bara lunecă pînă ce se reazemă de fundul B al tubului. Se cere $\bar{\omega}_2$ cu care se rotește acum sistemul și presiunea în B.

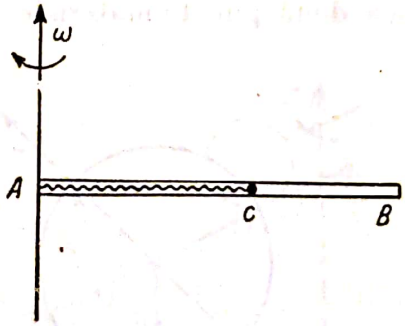


Fig. VI.5

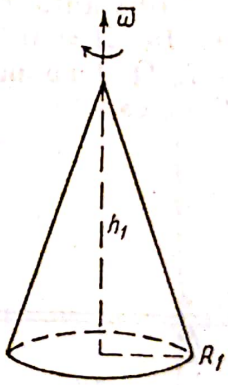


Fig. VI.6

6. Un con de înălțime h_1, rază a bazei R_1, greutate G se rotește în jurul înălțimii sale cu $\bar{\omega}_1$ dat. Înălțimea începe să scadă uniform cu viteză $\bar{v}_0$, volumul rămînînd același în timp ce raza crește (fig. VI.6). Să se determine viteza $\bar{\omega}_2$ cu care se rotește conul după un timp t.

7. Un cilindru se dilată crescîndu-i înălțimea h, dar scăzîndu-i raza R, păstrînd volum constant. El se rotește la început cu $\bar{\omega}_1$ înainte de dilatare. Cunoscînd viteza $\bar{v}_0$ de creștere a lui h să se determine viteza ω_2 după un timp t, pe care o are cilindrul (fig. VI.7).

Scanned with OKEN Scanner

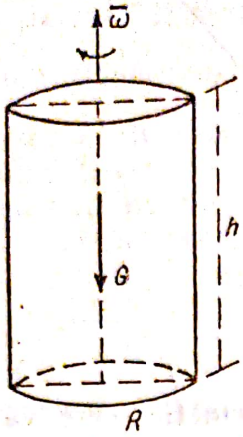


Fig. VI.7

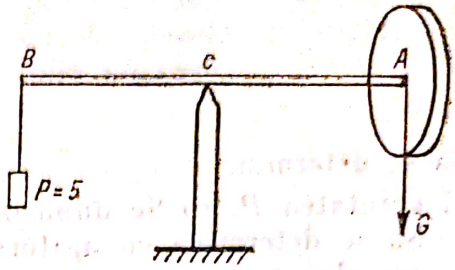


Fig. VI.8

8. Un disc de rază $R = \frac{1}{2}$ m, greutate $G = 10$ N cu centrul A pe bara AB de lungime $l = 1$ m se rotește cu $n = 1200$ rot/min. În B se află o greutate $P = 5$ N, iar în C la $BC = CA = 0{,}5$ m, bara este rezemată (fig. VI.8). Se cere viteza $\overline{\Omega}$ de precesie.

9. O bară DE de greutate $G = 10$ N, lungime $l = \frac{1}{2}$ m este prinsă în A la $AD = \frac{l}{2}$ de bara AB de lungime $L = 1$ m și greutate $Q = 4$ N (fig. VI.9). În B se atîrnă o greutate $P = 12$ N. Bara DE se rotește cu 360 rot/min în jurul lui A. Se cere:

a) $x = BC$ (distanța punctului de reazem), astfel încît viteza de precesie să fie $\Omega = 0{,}5$ rad/s.

b) Cît ar fi Ω dacă bara DE ar avea două puncte materiale de greutate G la capete.

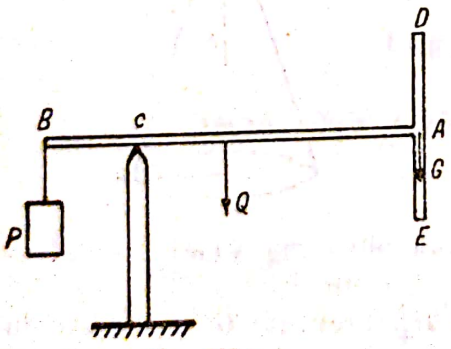


Fig. VI.9

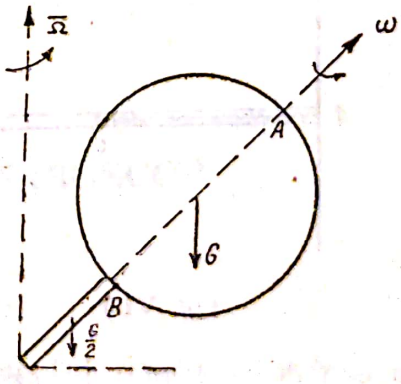


Fig. VI.10

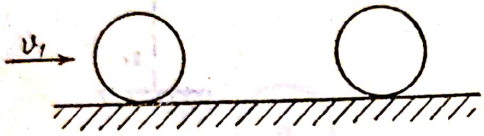
10. Un corp este format dintr-o sferă de greutate $G = 2$ N, rază $R = \frac{1}{10}$ m și din bara OB fixată de ea, de greutate $\frac{G}{2}$, lungime $\frac{R}{2}$. Se remarcă că acest corp se rotește cu viteza de precesie $\Omega = 5$ rot/s (fig. VI.10). Să se determine viteza $\overline{\omega}$ de rotație în jurul axei sale.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

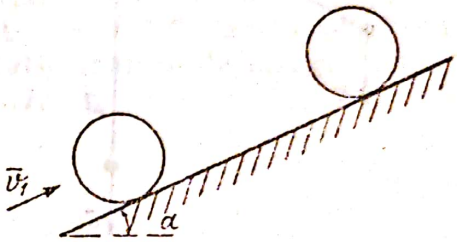
CIOCNIRI

1. Două bile identice (de aceeaşi masă m) sînt situate pe un plan. Una e în repaus. Cealaltă soseşte în punctul de ciocnire cu viteza $\bar{v}_1$. Se cere $\bar{v}_1$ ca după ciocnire bila care era în repaus să parcurgă spaţiul s pînă la oprire [μ dat, K (coeficientul de restituţie) dat], în cazurile din figurile VII.1, a, b şi c. Discuţie.



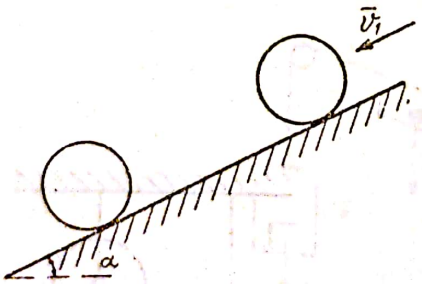
a

Fig. VII.1, a



b

Fig. VII.1, b



c

Fig. VII.1, c

Fig. VII.2

2. Două bile identice (m dat) pleacă în acelaşi timp pe aceeaşi verticală din A şi B ($AB = 10$ m). Cea din A cade fără viteză iniţială iar cea din B este lansată în sus cu $\bar{v}_B = 20$ m/s. Ciocnirea e plastică. Cît mai urcă cele două bile pînă la oprire (fig. VII.2).

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie un pendul matematic *II* avînd firul de lungime $l = 0{,}4$ m și corpul foarte mic de la capăt de greutate *G*. Fiind în repaus este ciocnit (*K* dat) de un pendul identic *I* care cade de la 60° (fig. VII.3). Să se determine tensiunea în firele pendulelor imediat înainte și imediat după ciocnire.

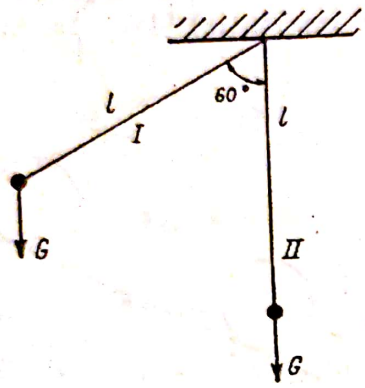


Fig. VII.3

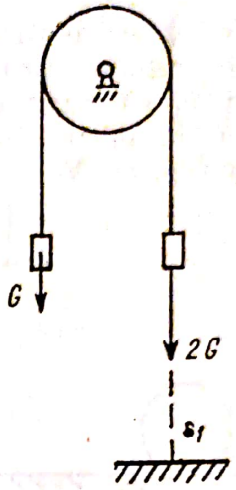


Fig. VII.4

4. Peste un scripete fără frecare e trecut un fir cu greutățile *G* și 2*G* la capete. După ce a parcurs $s_1 = \frac{1}{2}$ m, greutatea 2*G* se lovește plastic de sol (fig. VII.4). Să se studieze mișcarea lui *G*.

5. Peste un troliu fără greutate proprie compus din două roți solidare de raze *r* și $R = 2r$ trec firele de care atîrnă respectiv 2*G* și *G* fiind deci în echilibru static. De la înălțimea $h = 5$ m cade corpul *G* care ciocnește pe *G* cu *K* dat (fig. VII.5). Să se determine tensiunile în fire după ciocnire.

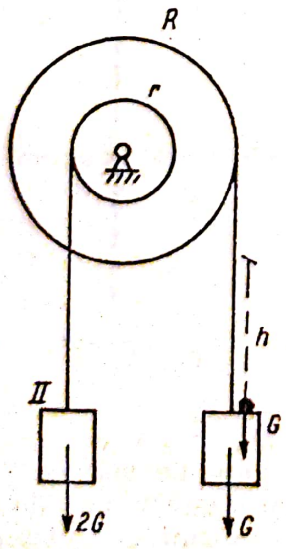


Fig. VII.5

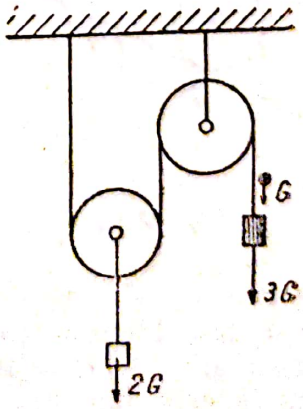


Fig. VII.6

Scanned with OKEN Scanner

6. Peste cei doi scripeți fără frecare din figura VII.6 este trecut un fir de care e prins $3G$. Scripetele de jos are prins un fir scurt, cu $2G$ la capăt. Corpul $3G$ coborîse 2 m, cînd este ciocnit de corpul G (în cădere liberă) cu viteza $\bar{v}_1 = 6$ m/s (K dat). Să se determine vitezele după ciocnire și tensiunile în fire.

7. a) Un corp de greutate G sosește cu viteza $\bar{v}_1 = 10$ m/s și ciocnește cutia de greutate $2G$ care cuprinde un corp G (K dat). Această cutie este prinsă printr-un fir de altă cutie de greutate $3G$ care cuprinde un corp G (fig. VII.7, *a*). Se cere: cît mai merge sistemul pînă la oprire, și presiunile corpurilor pe fundul cutiilor în mișcare.

b) Aceeași problemă dar cutia de greutate $3G$ este situată pe un plan orizontal cu frecare astfel încît sistemul se află în echilibru static înainte de ciocnirea corpului G care sosește cu $\bar{v}_1 = 10$ m/s (fig. VII.7, *b*)

c) Cutia $3G$ este pe un plan înclinat sub $\sphericalangle \alpha = 30°$, iar frecarea μ este astfel încît sistemul este în repaus static înainte de ciocnirea bilei G care sosește cu $\bar{v}_1 = 10$ m/s (fig. VII.7, *c*).

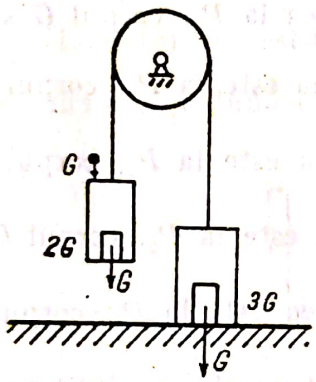


Fig. VII.7, *a*

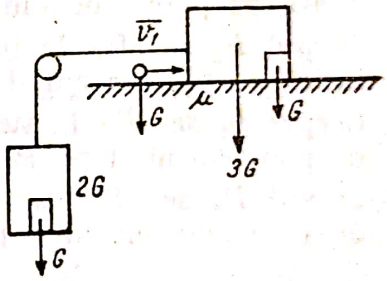


Fig. VII.7, *b*

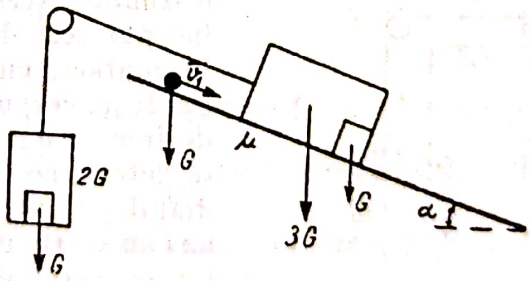


Fig. VII.7, *c*

8. a) Două corpuri P_1 și P_2 sînt legate printr-o bară fără greutate proprie și situate pe un plan înclinat sub $\sphericalangle \alpha$ (fig. VII.8). Sistemul se află în repaus cu frecare ($\mu = ?$) numai la P_1. Sosește un corp cu greutatea G cu viteza $\bar{v}_1 = 10$ m/s și ciocnește plastic. Să se determine viteza $\bar{V}$ a corpurilor după ciocnire și forța în bară înainte și după ciocnire. Numeric $P_1 = 20$ N; $P_2 = 80$ N, $G = 100$ N; $\alpha = 30°$.

Scanned with OKEN Scanner

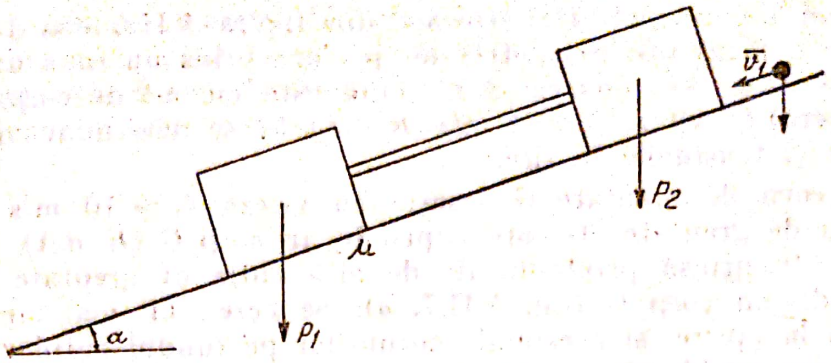


Fig. VII.8

Aceeași problemă pentru cazurile de mai jos unde:

b) Corpul P_2 se află jos pe plan, frecarea este numai la P_2, corpul G coboară pe plan ciocnind pe P_1.

c) Corpul P_2 se află în sus pe plan, frecarea este la P_1 corpul G urcă pe plan ciocnind pe P_1.

d) Corpul P_2 se află în jos pe plan, frecarea la P_2, corpul G se urcă pe plan ciocnind pe P_2.

e) Corpul P_2 se află în sus pe plan, frecarea este la P_2, corpul G coboară pe plan ciocnind pe P_2.

f) Corpul P_2 se află în jos pe plan, frecarea este la P_1, corpul G coboară pe plan ciocnind pe P_1.

g) Corpul P_2 se află în sus pe plan, frecarea este la P_2, corpul G urcă pe plan ciocnind pe P_1.

h) Corpul P_2 se află în jos pe plan, frecarea este la P_1, corpul G se urcă pe plan ciocnind pe P_2.

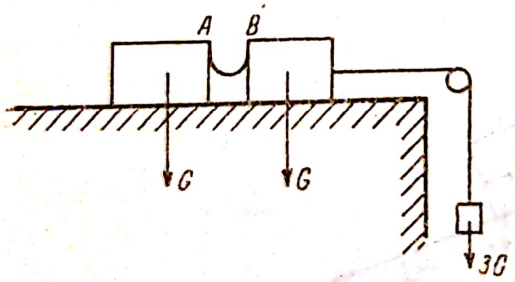


Fig. VII.9

9. Să se determine variația tensiunii în firul care atîrnă peste scripete cînd se întinde brusc firul AB dintre cele două greutăți G de pe planul orizontal. Acest fir are $l = 2$ m și la început cele două greutăți G erau în contact, cu firul neîntins între ele. Între corpuri și plan coeficientul de frecare e $\mu = 0{,}5$ (fig. VII.9). Să se determine viteza sistemului imediat după întinderea firului din cauza mișcării datorite deplasării în jos pe verticală a corpului de greutate $3G$.

10. Trei corpuri cu frecare astfel încît stau în repaus pe planul înclinat sub 30° sînt legate între ele cu fire de lungime $l = \frac{1}{4}$ m. Se lansează în sus pe plan corpul $3G$ cu $v_0 = 7$ m/s. Să se determine vitezele cu care pornesc pe rînd celelalte două corpuri și distanța x pe plan pînă la oprire. La început cele trei corpuri sînt în contact între ele, firele AB, CD, atîrnînd neîntinse (fig. VII.10).

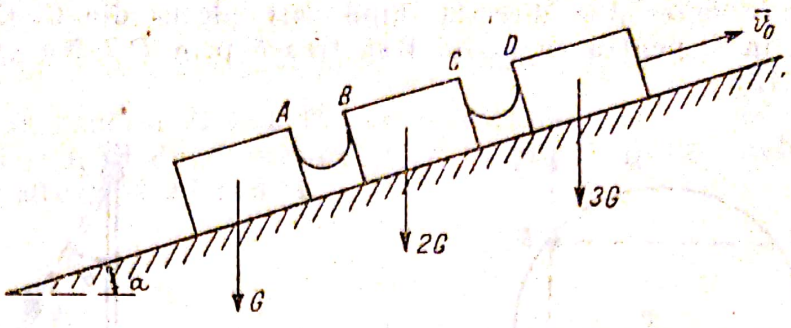


Fig. VII.10

11. Un mobil de greutate $2G$ sosește cu viteza $\bar{v}_1 = 10$ m/s și ciocnește corpul $2G$ de lățime l și înălțime $\frac{l}{2}$ în care este încastrată bara de greutate G și lungime l. Coeficientul de frecare cu planul este $\mu = \frac{1}{2}$, iar coeficientul de restituție $K = \frac{1}{2}$. Să se determine elementele încastrării înainte și după ciocnire (fig. VII.11).

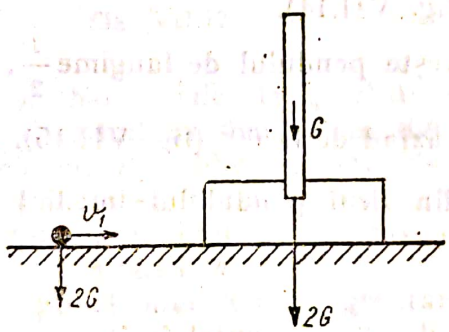


Fig. VII.11

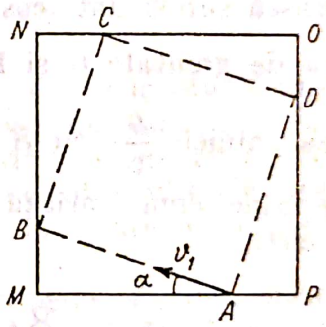


Fig. VII.12

12. În plan orizontal sînt patru garduri formînd laturile unui pătrat $MNOP$ de latură l. Din $A\left(AP = \frac{l}{4}\right)$ se lansează un mobil cu viteză $\bar{v}_1$ sub $\sphericalangle \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}\right)$ care ciocnește în $B\left(MB = \frac{l}{4}\right)$ apoi în $C\left(CN = \frac{l}{4}\right)$ în $D\left(DO = \frac{l}{4}\right)$ și revine în A. Între mobil și plan nu este frecare (fig. VII.12). Se cere coeficientul de restituție K la ciocniri ca să se obțină această traiectorie $ABCDA$ și cît este viteza la reîntoarcere în A. *Generalizare.*

13. De la jumătatea razei unui cerc de rază R situat în plan orizontal se lansează perpendicular pe diametru, un mobil care sosește în B cu viteza v_B. Ciocnește cercul ($K = ?$) și după ciocnire sosește în C pe orizontala lui B. Să se determine K în B. Cu același K lovind

Scanned with OKEN Scanner

în C să se determine direcția după care pleacă din C. Cît ar trebui să fie K în C pentru ca mobilul să treacă prin D? Nu există frecare (fig. VII.13).

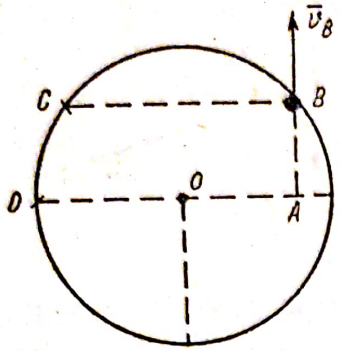


Fig. VII.13

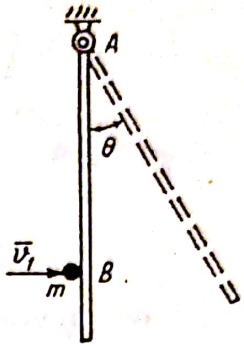


Fig. VII.14

14. În ce punct B trebuie lovită bara verticală articulată fix în A în repaus, de masă M, și lungime $l = 2$ m, de către punctul material de masă $m = \frac{M}{3}$ care sosește în B ($AB = b$) cu $\bar{v}_1 = 4$ m/s, coeficientul de restituție la ciocnire fiind $K = \frac{1}{2}$, astfel încît bara după ciocnire să se oprească sub θ dat ($\cos\theta = 0{,}95$) (fig. VII.14).

15. Bara de greutate G și lungime l lovește pendulul de lungime $\frac{l}{2}$, greutatea ghiulelei $\frac{G}{2}$, cu $K = \frac{1}{2}$, bara căzînd de la 60° (fig. VII.15). Să se determine cum variază tensiunea din firul pendulului imediat după ciocnire.

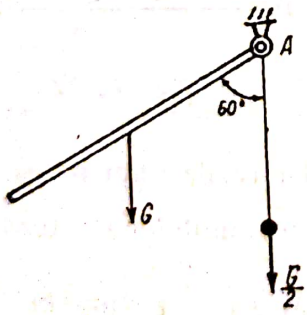


Fig. VII.15

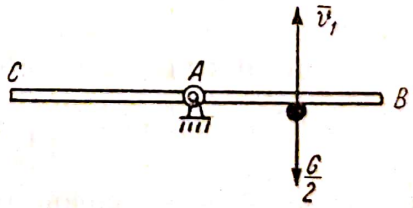


Fig. VII.16

16. Bara orizontală de greutate $G = 50$ N și lungime $l = 1$ m e lovită cu $v_1 = 2$ m/s la jumătatea lui AB de un mobil de greutate $\frac{G}{2}$, cu $K = \frac{1}{2}$ (fig. VII.16). Să se determine cît timp și cîte rotații face bara pînă la oprirea din cauza frecării de coeficient $\mu_A = 0{,}1$ la articulația A de rază $r_A = \frac{l}{100}$.

Scanned with OKEN Scanner

17. O bară de lungime $l = 0{,}5$ m și masă M e articulată ca în figura VII.17. Un mobil de masă $m = \frac{M}{3}$, ciocnește cu viteza $\bar{v}_1 = 4$ m/s ($K = 1$) în capătul B sub 60° cu orizontala. Să se determine unde se va ridica bara după ciocnire și cu ce viteză ajunge mobilul la solul orizontal situat la $2l$ sub A.

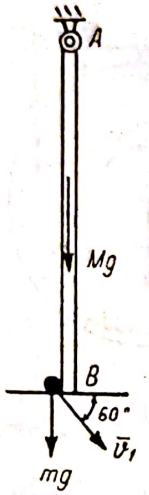
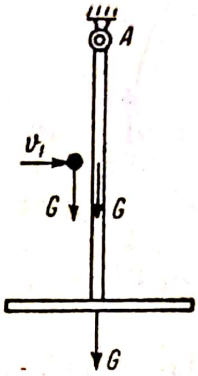


Fig. VII.17



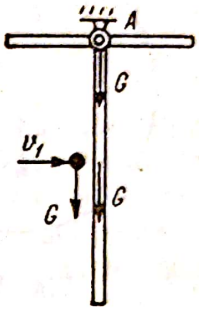


Fig. VII.18

18. Două bare egale de greutate G și lungime $l = 3$ m sînt fixate între ele formînd un teu ca în figura VII.18. Sistemul este articulat în A și ciocnit ($K = 0$) de un mobil de aceeași greutate G sosind cu $\bar{v}_1 = 10$ m/s la jumătatea barei verticale. Se cer după ciocnire vitezele mobilului și teului, unghiul θ sub care se ridică bara la oprire în cazurile din figurile VII.18, *a* și *b*.

19. Un punct material de greutate G ciocnește plastic placa pătrată de greutate G și latură l, articulată în A și rezemată în B. Să se determine viteza $\bar{v}_1$ cu care sosește punctul material pentru ca după ciocnirea cu latura AB la $\frac{l}{3}$ de A, diagonala AC să se oprească în poziția AC verticală (punctul C deasupra lui A), în cazurile din figurile VII.19, *a* și *b*.

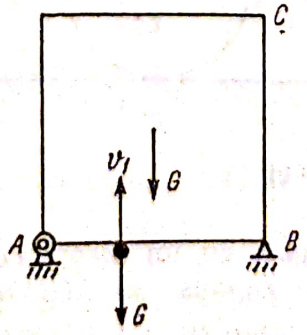


Fig. VII.19, *a*

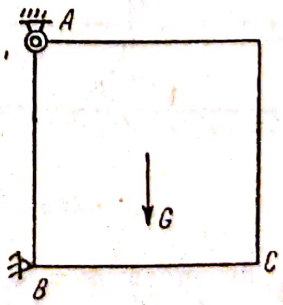


Fig. VII.19, *b*

Scanned with OKEN Scanner

20. Un disc de greutate G și rază R, articulat în A, are în B un mic dinte (fără greutate proprie) care este ciocnit de o bilă care cade de la distanța $CB = R$ și are greutatea $\frac{G}{2}$ (fig. VII.20). Se cere $\neq 0$ unghiul cu care se va roti discul după ciocnire, coeficientul de restituție K: a) $K = 1$; b) $K = \frac{1}{3}$.

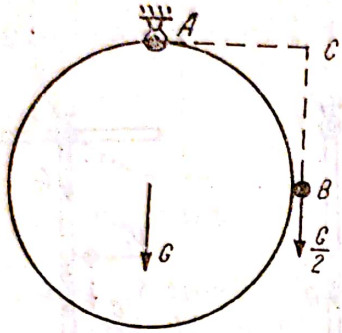


Fig. VII.20

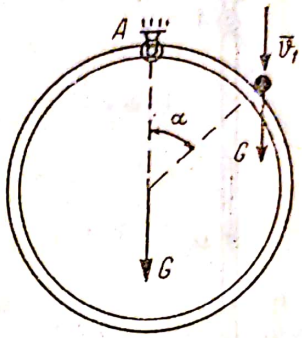


Fig. VII.21

21. Un inel de greutate G și rază R, articulat în A, este ciocnit cu $\bar{v}_1$ de o mică bilă de greutate G în punctul B determinat de $\hat{\alpha}$, coeficientul K dat (fig. VII.21). Se cere $\alpha = ?$ ca bila după ciocnire să sară pe orizontală. Discuție.

22. Bara AB articulată în A, de greutate G și lungime $l = 2R$ cade din poziție orizontală și ciocnește sfera de greutate G, rază R care era în repaus pe plan orizontal cu frecare μ și frecare de rostogolire $s = \frac{R}{10}$ (fig. VII.22). Se cere $x = CC' = ?$ până la oprirea sferei (presupunem $l = 2$ m; $K = \frac{3}{4}$; $R = 1$ m; $\mu = \frac{1}{4}$).

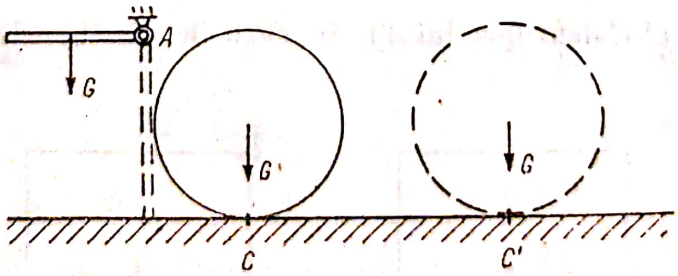


Fig. VII.22

23. Un mobil P_1 de masă $m = 4$ e prins cu un resort cu coeficientul de elasticitate $K_e = 4$. P_1 pornește din repaus din $M(OM = 6$ m). După $t = \frac{5\pi}{3}$ s, e ajuns din urmă de un mobil P_2 de masă $2m$, care venea

cu viteza $\bar{v}_2 = +6\sqrt{3}$ m/s în momentul ciocnirii (fig. VII.23). Se cere amplitudinea A' și defazajul după ciocnire (coeficientul de restituție $K_r = \frac{1}{2}$) a mobilului P_1 prins cu fir elastic.

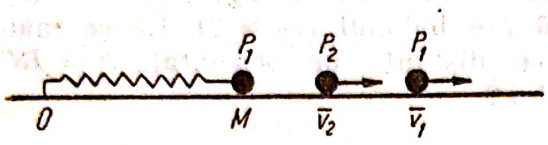


Fig. VII.23

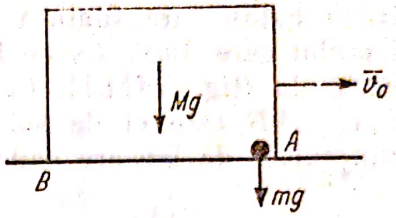


Fig. VII.24

24. Pe un plan orizontal fără frecare este așezată o cutie de masă M și lățime $AB = 2\ l$ în care este situată o mică bilă (punct material) de masă m. Între bilă și cutie nu e frecare. Bila, la $t = 0$, este situată în A. Se lansează cutia cu $\bar{v}_0$ (fig. VII.24). Să se determine timpul între ciocnirile bilei cu pereții cutiei (ciocniri perfect elastice) și spațiile parcurse de cutie între ciocniri).

25. Să se studieze problema de mai sus cînd ciocnirea nu mai este perfect elastică ci are un K dat.

26. Într-o cutie de masă M este așezată o bilă de masă m. Se lansează cutia cu $\bar{v}_0$ pe verticală în jos (fig. VII.26). Să se determine timpul între ciocnirile bilei cu tavanul și podeaua cutiei, ciocniri de coeficient K dat, și spațiile parcurse de cutie între ciocniri. Cutia are înălțimea $2\ l$.

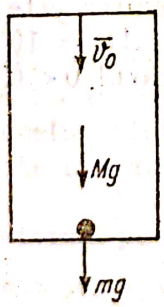


Fig. VII.26

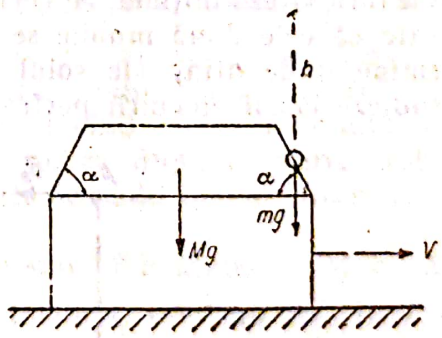


Fig. VII.27

27. Un vagon ca în figura VII.27, înaintează cu $\bar{V} = \text{const}$. Masa vagonului este M iar acoperișul înclinat cu α. De la o înălțime h cade uu mobil de masă m fără viteză inițială și ciocnește acoperișul vagonului (coeficient K dat). Să se determine înălțimea h astfel încît vagonul să se oprească brusc din cauza ciocnirii.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

PARABOLA

1 Dintr-un balon care înainta orizontal se dă drumul (fără a fi lansat) unui mobil care după 4 s de la părăsirea balonului atinge solul sub 30° cu verticala (fig. VIII.1). Ce viteză are balonul ($v_b = ?$). La ce înălțime $h = AB$ este el de sol? La ce distanță pe orizontală $x = BC$ de punctul A de lansare cade mobilul?

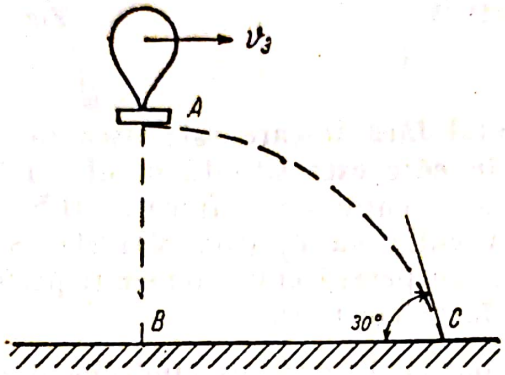


Fig. VIII.1

2. Să presupunem că din balonul care înaintează orizontal cu $v_b = 20$ m/s se aruncă în jos de la $h = 80$ m un mobil cu $v_0 = 10$ m/s. Se întreabă sub ce $\sphericalangle \alpha$ cu verticala loveşte el solul, cît timp este mobilul pe traiectorie şi la ce distanţă de punctul B cade mobilul.

3. Fie două puncte A şi B pe aceeaşi orizontală ($AB = 10$ m). Din A se lansează cu $v_0 = 10$ m/s un mobil pe orizontală şi în acelaşi moment din B cade fără viteză iniţială, pe verticală, un mobil identic (fig. VIII.3). Să se arate că cele două mobile se ciocnesc. Ciocnirea este plastică. Să se determine unde ating ele solul situat la $h = AC = 10$ m sub AB. Să se studieze cazul ciocnirii perfect elastice şi cazul $0 < K < 1$.

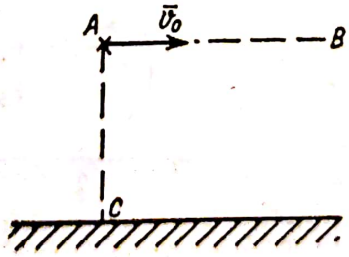


Fig. VIII.3

4. Un mobil de greutate $3G$ coboară un plan înclinat AB sub 60° şi loveşte un pendul matematic de lungime $l = 6$ m şi greutate G cu $K = \frac{1}{2}$. Mobilul sare apoi $h = BC = 20$ m şi atinge solul în D: ($CD = 6$ m). Se cere viteza cu care mobilul $3G$ ajunsese în B (fig. VIII.4).

Scanned with OKEN Scanner

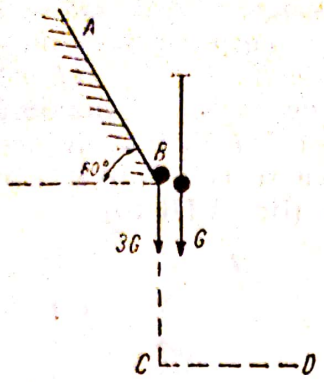


Fig. VIII.4

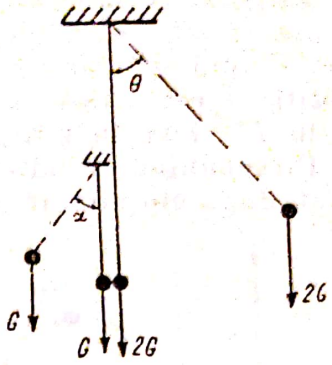


Fig. VIII.5

5. Două pendule unul avînd G, l, al doilea $2G$, $2l$ (unde $l = 1$ m) se ciocnesc cînd sînt verticale, căzînd de la unghiul α respectiv θ $\left(K = \frac{1}{4}\right)$, avînd vitezele egale și de sens contrar de valoare 4 m/s, în punctul de ciocnire (fig. VIII.5). Se cer unghiurile α și θ, precum și α' și θ' cu care se ridică după ciocnire și tensiunile în fire imediat după ciocnire.

6. Să se determine unghiul α de lansare și valoarea v_0 a vitezei de lansare ale unui proiectil astfel încît înălțimea sa maximă de ridicare de 4 m să fie la 10 m de punctul de lansare (fig. VIII.6).

7. Un mobil lansat cu $\bar{v}_0 = ?$ în contact cu solul cu frecare $\mu = ?$ se oprește după $s = 100$ m. Același mobil lansat din vîrful unui turn înalt de 100 m, cu același v_0 orizontal cade la 200 m de baza turnului. Cu ce viteză va fi la sol? Unde $x = ?$ mai sare după ciocnirea $K = \frac{1}{5}$ cu solul? Cît sînt μ și v_0 în mișcarea în contact cu solul.

8. Un mobil lansat pe un plan înclinat sub 30° cu frecare $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$ se oprește după 5 m. Să se determine cu ce viteză v_0 a fost lansat.
Cu această viteză v_0 se lansează mobilul sub $\alpha = 30°$ cu orizontala și lovește un perete vertical atunci cînd viteza mobilului e orizontală. Se cere coeficientul K de restituție ca după ciocnire, mobilul să cadă la jumătate din distanța de perete de unde fusese lansat în mișcare parabolică.

9. Un mobil lansat pe planul înclinat sub 30° a ajuns în M cu $v_0 = 10$ m/s, sare și ciocnește un alt plan înclinat tot sub 30° în P, cu $K = \frac{1}{5}$ (fig. VIII.9). Se cer: $MP = l$; $PQ = l'$.

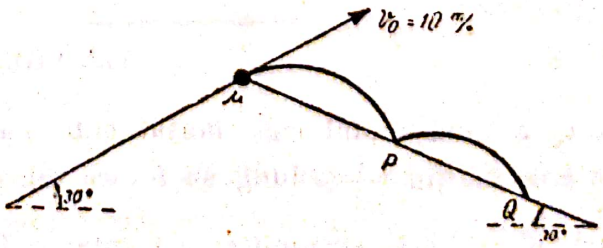


Fig. VIII.9

10. Dintr-un punct A de pe sol se lansează un mobil de masă m cu viteza $\bar{v}_0$ înclinată la 60° cu orizontala asupra unui corp cu faţa înclinată tot la 60°. Corpul se aşază în diferitele poziţii *I*, *II* sau *III* astfel încît în poziţia *I* este atins de mobil dincolo de înălţimea maximă a acestuia, în *II* chiar în poziţia maximă şi în *III* înainte de această poziţie. Presupunînd ciocnirea perfect elastică se cere mişcarea mobilului imediat după ciocnire în diferitele cazuri (fig. VIII.10).

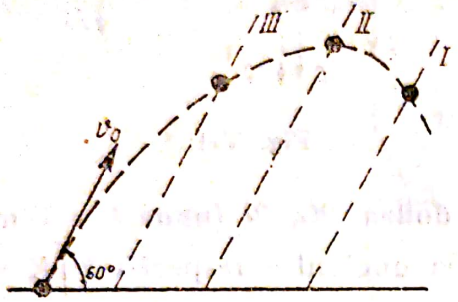


Fig. VIII.10

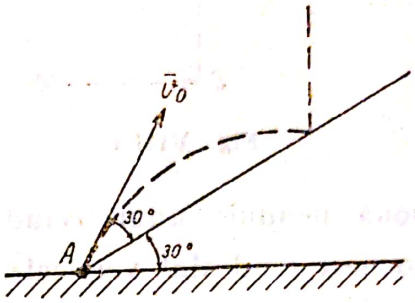


Fig. VIII.11

11. Să se determine valoarea lui K, pentru ca mobilul lansat din A cu $v_0 = 10$ m/s sub 60° după ciocnirea cu planul înclinat sub 30° să sară vertical în sus (fig. VIII.11).

12. Un pendul este lansat din poziţia *I* ($\theta = 60°$ cu verticala) cu viteza $\bar{v}_A = \sqrt{lg}$. Pendulul are firul de lungime l şi punctul material de greutate G. Cînd tensiunea în fir este $T = \frac{3}{2} G\sqrt{3}$ (poziţia *II*) firul se rupe. În acel moment punctul material se află la $2l$ deasupra solului (fig. VIII.12). Unde atinge solul?

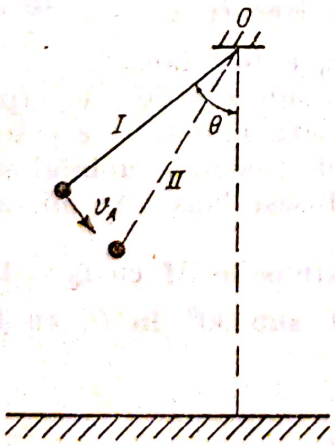


Fig. VIII.12

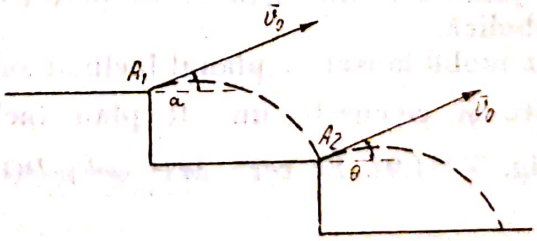


Fig. VIII.13

13. Se cere viteza $\bar{v}_0$ a unui mobil care lansat sub $\sphericalangle\alpha = ?$ din extremitatea unei trepte de înălţime $\frac{l}{2}$ şi lungime l sare din treaptă în treaptă (ciocnirea avînd $K = \frac{1}{2}$) la extremitatea treptelor (fig. VIII.13).

Scanned with OKEN Scanner

14. Pe un disc de greutate G și rază R fără frecare la ax, este înfășurat un cablu de care atîrnă greutatea $2G$. Cînd $2G$ plecînd din repaus a coborît $s = \frac{h}{4}$ $(h = AB)$, sare din A o picătură de apă (fig. VIII.14). Unde $(x = BC = ?)$ atinge ea solul și cu ce viteză?

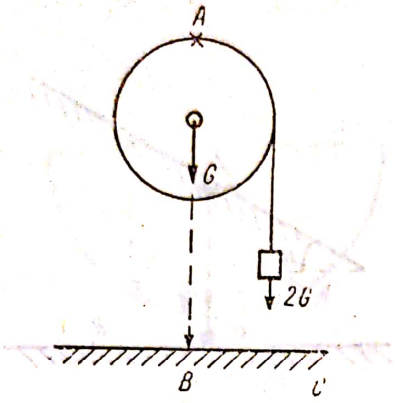


Fig. VIII.14

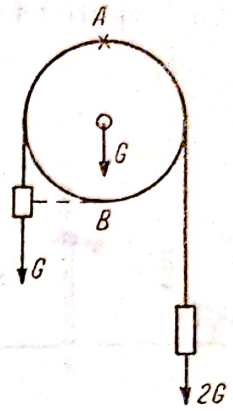


Fig. VIII.15

15. Pe un disc de greutate neglijabilă și rază R este trecut un fir de care sînt prinse greutățile $2G$ și G. G este pe orizontala lui B cînd este lansat în jos cu $\bar{v}_0 = ?$ În momentul lansării sare din A o picătură de apă (fig. VIII.15). Se cere $\bar{v}_0$ ca picătura să cadă în mișcare chiar pe G. Să se determine vitezele picăturii și a lui G în momentul ciocnirii.

16. Două mobile de greutăți $3G$ respectiv $2G$ situate pe un plan orizontal cu coeficient de frecare $\mu = 0{,}5$ sînt legate cu un fir AE de 2 m lungime care la început nu e întins, iar cele două corpuri sînt în contact (fig. VIII.16). Se lansează corpul $3G$ cu viteza $v_0 = 6$ m/s pe planul orizontal. În momentul în care se întinde firul, AE corpul $3G$ e la marginea planului în B și în acest moment cînd firul AE e întins, el se rupe. Unde cade $3G$ $(x = CD = ?)$ cînd $BC = 5$ m. Cît mai merge corpul $2G$ pînă la oprire?

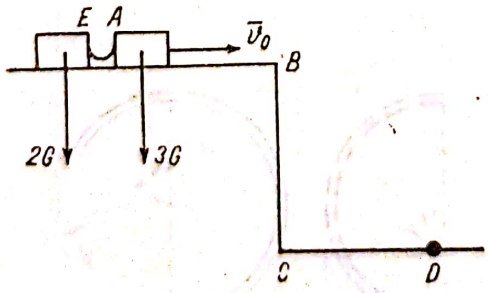


Fig. VIII.16

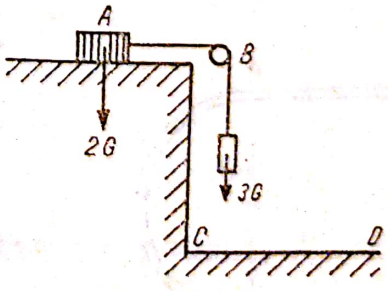


Fig. VIII.17

17. Cele două greutăți $2G$ și $3G$ din figura VII.17 sînt situate astfel încît cînd $2G$ $\left(\text{cu frecare de coeficient } \mu = \frac{1}{2}\right)$ ajunge în B, $3G$ a ajuns

Scanned with OKEN Scanner

la sol. Să se determine unde va atinge $2G$ solul în mișcarea ce urmează ($x = CD = ?$) $AB = l$, $BC = 2l$.

18. Dintr-un punct O se lansează un mobil de masă m cu $v_0 = 50$ m/s sub 30° față de orizontală. Mobilul după $t = 1$ s lovește plastic în vîrful unui stîlp, un mobil de masă egală m (fig. VIII.18). Unde ar fi căzut primul mobil dacă mișcarea sa era neîntreruptă și unde cad acum cele două corpuri ($AB = ?$).

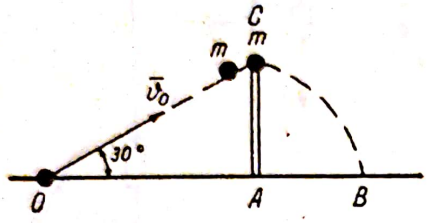


Fig. VIII.18

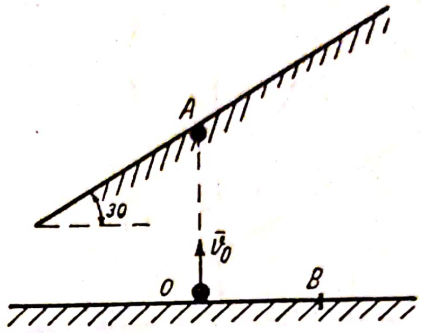


Fig. VIII.19

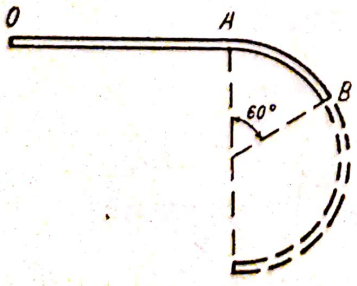
19. De la sol se lansează în sus, pe verticală, un mobil cu $v_0 = 6$ m/s. El ciocnește după $h = OA = 1$ m un plan înclinat sub 30° cu coeficient de restituție $K = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (fig. VIII.19). Să se determine unde va lovi iar solul în cădere.

20. Un tub orizontal de lungime 4 m și frecare $\mu = 0{,}5$ este racordat în A de un tub în arc de cerc AB ($\alpha = 60°$) de rază $R = 2$ m, fără frecare. Se lansează din O un mobil de greutate $\frac{G}{2}$ cu v_0. Acest mobil I ciocnește plastic un mobil II identic $\left(\frac{G}{2}\right)$ care era în repaus în A. Se cere:

a) $v_0 = ?$ ca viteza mobilelor după ciocnire să fie $V = 10$ m/s;

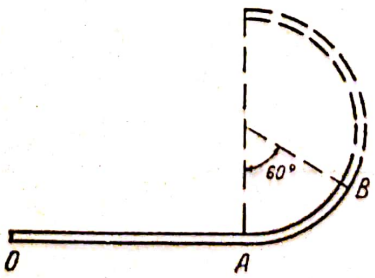
b) Viteza în B (v_B) a mobilelor și presiunea în B pe țeavă.

Punctul în care mobilele lovesc solul situat la 10 m sub B (se ia $g = 10$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8$) pentru figurile VIII.20, *a*, VIII.20, *b* și VIII.20, *c*.



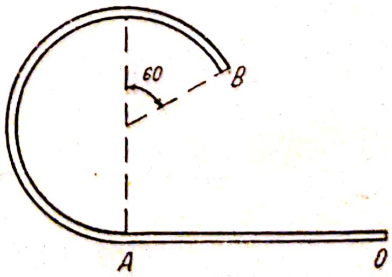
a

Fig. VIII.20, *a*



b

Fig. VIII.20, *b*



c

Fig. VIII.20, *c*

Scanned with OKEN Scanner

21. a) Fie o emisferă fixă de rază R. În A definit de $\sphericalangle AOA' = 60°$ cu AA' orizontal, cade un mobil de la o înălțime $BA = h$ și ciocnește emisfera $\left(K = \frac{1}{2}\right)$.

Se cere h ca după ciocnire mobilul să sară chiar în A'.

b) Dacă am avea $\sphericalangle COA = 45°$ și ciocnirea ar fi perfect elastică se cere h pentru ca mobilul să sară în O' în fundul vasului (fig. VIII.21).

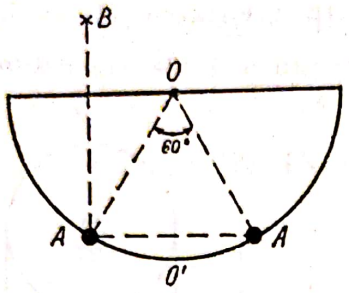


Fig. VIII.21

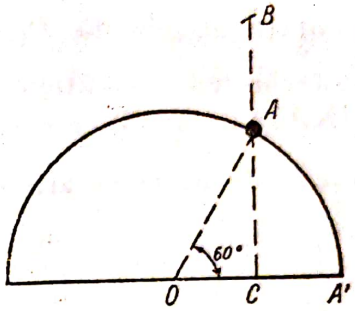


Fig. VIII.22

22. Fie vasul răsturnat și mobilul cade de la $h = BA$ în A determinat de 60° (fig. VIII.22). Să se determine h ca după ciocnire $\left(K = \frac{1}{2}\right)$ mobilul să sară chiar în A'.

23. Pe o planetă o piatră proiectată cu 18 m/s pe un plan orizontal are o bătaie maximă de 135 m. Să se găsească accelerația gravității pe suprafața planetei.

24. O bară de greutate G și lungime $l = \frac{1}{2}$ m se lansează din poziția verticală cu viteza ω_0 astfel încît pentru $\theta = 30°$, $\omega_1 = 8$ rad/s. În acel moment se desprinde bara din A. Ce unghi face bara cu orizontala cînd centrul de greutate C al ei ajunge în C' pe orizontala lui C (fig. VIII.24).

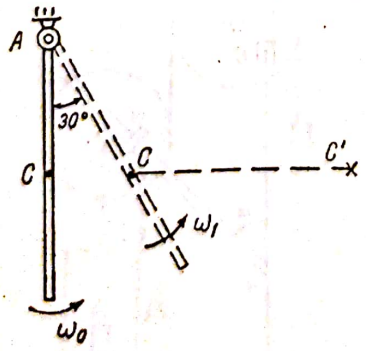


Fig. VIII.24

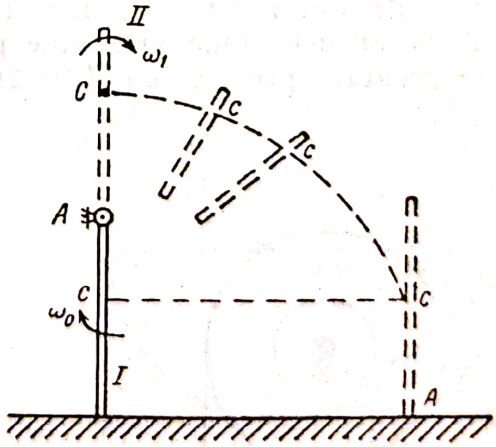


Fig. VIII.25

25. O bară de greutate G și lungime l este lansată cu viteza ω_0 din poziția I astfel încît cînd trece prin poziția verticală II cu ω_1 se desprinde din A și se rotește o singură dată ($\theta = 2\pi$) pînă atinge solul în poziție verticală (fig. VIII.25). Să se determine ω_0 și ω_1.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

PRESIUNI

1. Pe bara AB de greutate G și lungime l este așezat la $\frac{l}{4}$ de A un corp de greutate $2G$. Se dă $P_1 = \frac{G}{3}$. Se cere greutatea P_2 ca în mișcare bara să rămînă orizontală. Cît este presiunea între corpul $2G$ și bară (fig. IX.1)?

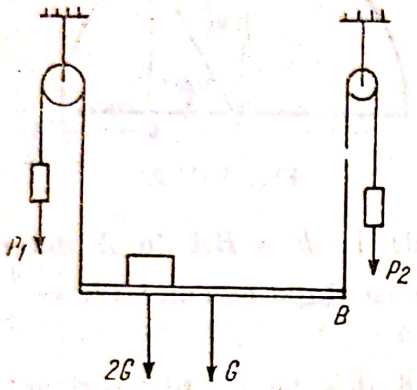


Fig. IX.1

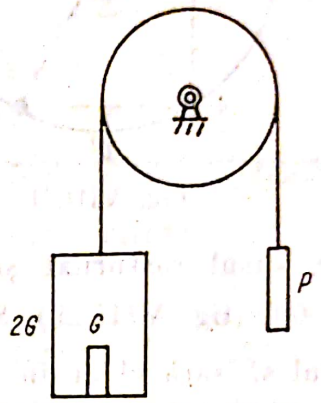


Fig.IX.2

2. Pe un scripete este trecut un fir. Într-o parte atîrnă o ladă de greutate $2G$ în care este un corp de greutate G. Știind că fundul lăzii se rupe la o presiune mai mare de $\frac{3G}{2}$ se cere ce greutate maximă P poate fi pusă la cealaltă extremitate a cablului (fig. IX.2).

3. Corpuri de greutate G sînt situate în cutii de greutate $2G$ ca în figura IX.2. Să se determine presiunile pe fundul cutiilor în mișcare. Troliul n-are greutate proprie, iar $R = 2r$ (fig. IX.3).

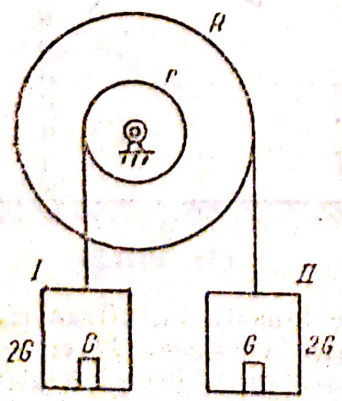


Fig. IX.3

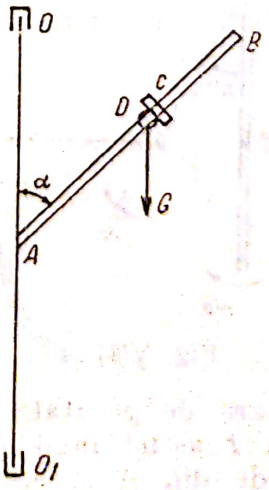


Fig. IX.4

Scanned with OKEN Scanner

4. De un ax OO_1, care se poate roti cu $\bar{\omega}$ const în plan vertical, este fixată sub unghiul α o bară AB pe care lucrează un inel D de greutate G. Se cere poziția inelului ($AD = l = ?$) pentru acest ω. Se presupune că în loc de ω axa se va roti cu $2\bar{\omega}$. Pentru ca inelul să rămînă tot la distanța l, se pune un opritor C. Să se determine presiunea N_0 pe opritor și presiunile N_1 și N_2 pe bară în cele două rotații (fig. IX.4.)

5. Într-un vas de lățime $AB = l$ și înălțime $AC = \frac{l}{2}$ se pune apă pînă la jumătate din înălțime (fig. IX.5, *a*). Vasul cu apă are greutatea G. Se prinde un fir de care atîrnă greutatea P (frecarea între vas și sol are coeficientul $\mu = \frac{1}{2}$). Se cere P ca apa să fie pe punctul de a ieși din vas în mișcare (fig. IX.5, *b*). Firul este prins la jumătatea înălțimii.

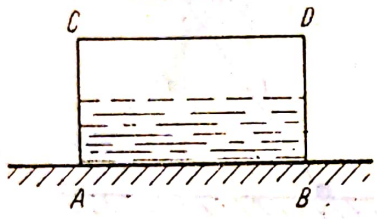


Fig. IX.5, *a*

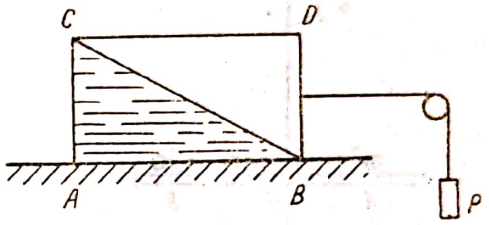


Fig. IX.5, *b*

6. Pe un sistem de scripeți fără greutate proprie ca în figura IX.6 e trecut un fir de care e prins P.
   a) Se cere P pentru ca în mișcare presiunea corpului G în cutia de greutate $2G$ să fie $N = \frac{5G}{4}$.
   b) Se cere P cînd N ar fi egal cu $\frac{G}{4}$.

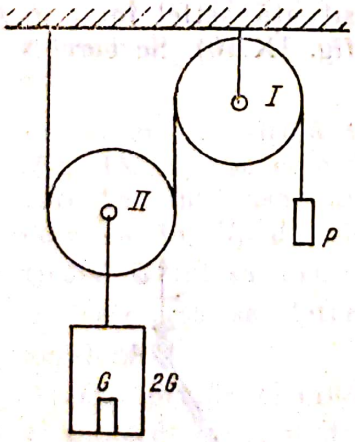


Fig. IX.6

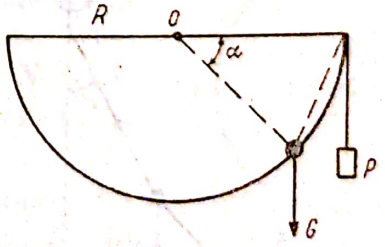


Fig. IX.7

7. Într-o emisferă de rază R este situat un mobil de greutate G ținut în echilibru, sub $\hat{\alpha}$ dat, prin firul de care e prinsă greutatea P. Se cere P la echilibru (fig. IX.7). Să se determine variația de valoare a

Scanned with OKEN Scanner

lui N între mobil și vas la ruperea firului și presiunea N_0 cînd mobilul trece prin fundul vasului.

8. Fie un fir elastic de lungime naturală $l_0 = l_1$. Atîrnat vertical cu o greutate G la capăt se alungește cu $\frac{l_0}{4}$. Acest fir prinde două puncte materiale identice G așezate pe un disc care se rotește în jurul unei axe verticale care trece prin centrul său O (fig. IX.8). Punctele materiale sînt așezate în A și B ($AO = l$; $OB = 2l$) ținute de opritoare. Să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}$ astfel încît presiunea pe unul din opritoare să fie nulă. Să se determine presiunea pe celălalt opritor.

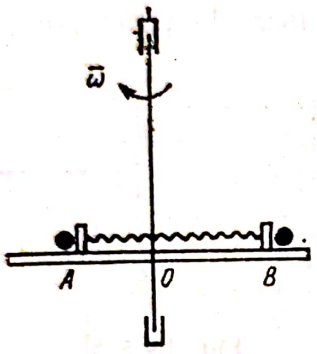


Fig. IX.8

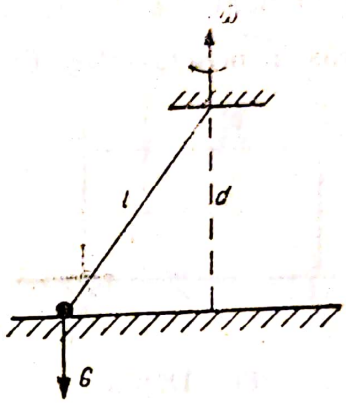


Fig. IX.9

9. Un pendul avînd punctul material de greutate G și firul de lungime l este suspendat deasupra unei mese orizontale la distanța d (fig. IX.9). Sistemul se rotește ca pendul conic cu $\bar{\omega}$, în contact cu planul. Se cere presiunea N pe plan. Pentru ce valoare $\bar{\omega}$, $N = 0$?

10. Două pendule identice cu firele de lungime l și punctele materiale de greutate G se rotesc cu $\bar{\omega}$ în jurul unui ax vertical. Punctul material de jos e în contact cu o masă orizontală situată astfel încît unghiurile firelor cu verticala sînt 30° respectiv 60° (fig. IX.10). Se cere N — presiunea pe masă.

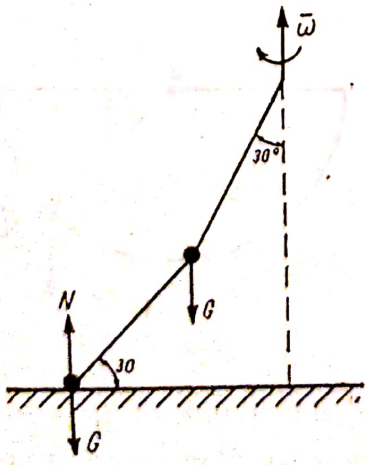


Fig. IX.10

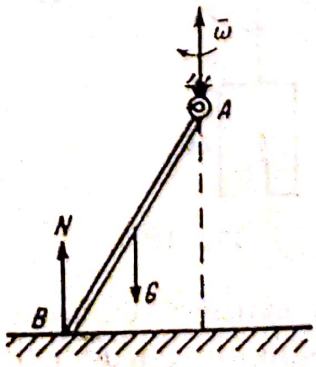


Fig. IX.11

Scanned with OKEN Scanner

11. Fie o bară de greutate G, lungime l, articulată în A la distanța d deasupra unui plan orizontal. Sistemul se rotește cu $\bar{\omega}$ ca pendul conic (fig. IX.11) Se cere $N = ?$ presiunea pe plan și valoarea lui $\bar{\omega}$ pentru care $N = 0$.

12. Două bare egale, de greutate G și lungime l sînt articulate între ele în B și articulate de tavan în A. În C se sprijină de solul orizontal astfel încît barele fac $\theta = 30°$ cu verticala (fig. IX.12). Să se determine presiunea N în mișcare cînd sistemul se rotește cu $\bar{\omega}$ în jurul unui ax vertical prin A.

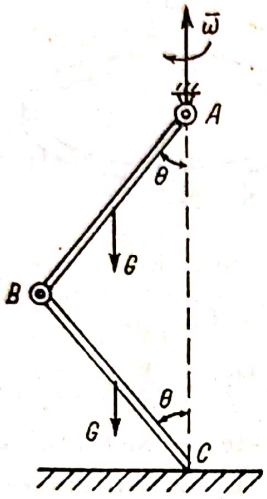


Fig. IX.12

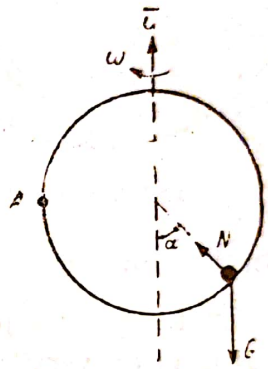


Fig. IX.13

13. a) Fie $R = \frac{1}{2}$ m raza cercului pe care poate luneca un mic inel de greutate G (fig. IX.13). Cînd cercul se rotește cu $\omega = 10$ rad/s în jurul unui ax vertical se cere presiunea pe cerc, $N = ?$

b) Cît ar fi presiunea N dacă rotația s-ar face în jurul axului vertical tangent la cerc în A și cît este $\bar{\omega}$ pentru a avea același $\hat{\alpha}$ ca mai sus ?

14. a) Fie cercul de sîrmă vertical fix de rază R (fig. IX.14). Se cere viteza orizontală $\bar{v}_A$ cu care trebuie lansat un inel de greutate G pe cerc ca în B_1 definit prin $\sphericalangle 60°$ cu verticala, inelul să execute o presiune $N = 5G$ pe cerc. Să se determine în B viteza și accelerația.

b) Aceeași problemă cînd inelul este lansat din C punctul cel mai de jos ($v_C = ?$) ca N_2 în B_2 să fie egal cu $5G$ (B_2 la 60° de C). Cît este N_1 în B_1, în acest caz.

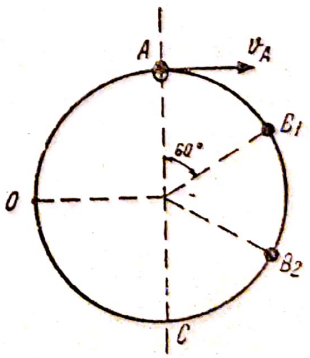


Fig. IX.14

15. Se cere $\bar{v}_0$ cu care trebuie lansat în sus inelul de greutate G din O, pentru ca în A să aibă $N = \frac{G}{5}$. Cît este N în B_1 ? (figura de la IX.14).

Scanned with OKEN Scanner

16. Într-un vas emisferic fără frecare este situată o bară AB de greutate G și lungime $l = R$ care va luneca din poziția inițială din figura IX.16.

a) Să se determine cînd trece prin poziția orizontală ce presiuni N va da asupra vasului.

b) Să se determine în poziția inițială (în momentul pornirii) cît sînt presiunile.

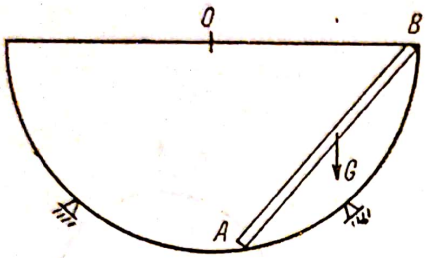


Fig. IX.16

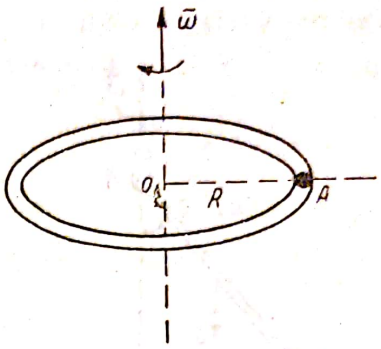


Fig. IX.17

17. Fie un tub îndoit în formă de cerc de rază $R = \frac{1}{2}$ m în care poate luneca cu frecare un punct material de greutate G. Sistemul se rotește în jurul unui ax vertical pornind cu $\bar{\omega}_0 = 0$ și se accelerează cu $\bar{\varepsilon}$ astfel încît face o rotație în 2 s (fig. IX.17). Să se determine frecarea necesară ca mobilul să nu lunece într-o rotație. Să se determine cît trebuie să fie μ_0 inițial și μ_A la sfîrșitul rotației pentru ca mobilul să nu lunece.

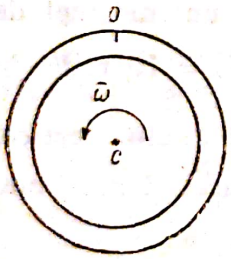


Fig. IX.18

18. Să se determine $\mu = ?$ ca mobilul de pe cercul din problema 17 să nu lunece cînd:

a) sistemul se rotește în plan vertical cu $\bar{\omega}$ const. în jurul unui ax orizontal prin C; b) cînd se rotește cu același $\bar{\varepsilon}$ ca în problema 17.

Sistemul pornind ($t = 0$, $\bar{\omega}_0 = 0$) cînd punctul material este în O(fig. IX.18).

Capitolul X

FORȚE INIȚIALE

1. a) Un punct material de greutate G este legat prin două fire înclinate sub același $\sphericalangle\alpha$ față de orizontală. Dacă se taie un fir, să se determine cum variază tensiunea T în cel rămas, imediat după tăiere, în funcție de $\hat{\alpha}$ (fig. X.1).

b) Aceeaşi problemă cu firele perpendiculare între ele, dar înclinate diferit faţă de orizontală.

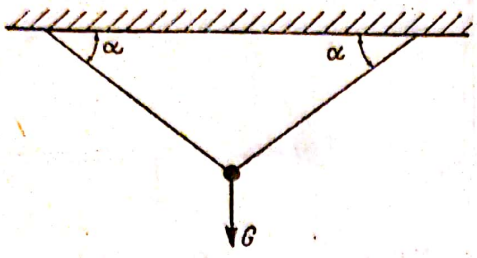


Fig. X.1

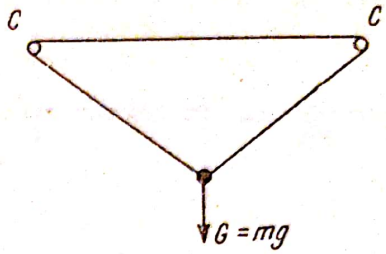


Fig. X.2

2. O greutate G este legată de un fir care trece peste două cuie C la distanţa $2l$ între ele. Se taie greutatea în două porţiuni fiecare rămînînd prinsă de un capăt al firului (fig. X.2). Cum variază tensiunea în fir de la starea dinainte de tăiere şi după tăiere cînd:
a) porţiunile tăiate au mase egale; b) au mase diferite.

3. O bară de greutate G şi lungime l este rezemată într-un punct $C(CB=x)$ şi articulată la un capăt A (fig. X.3). Se cere $x = ?$ ştiind că la scoaterea reazemului, forţa din articulaţie scade la jumătate.

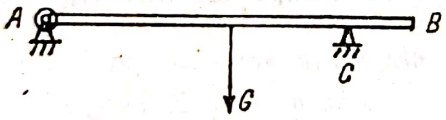


Fig. X.3

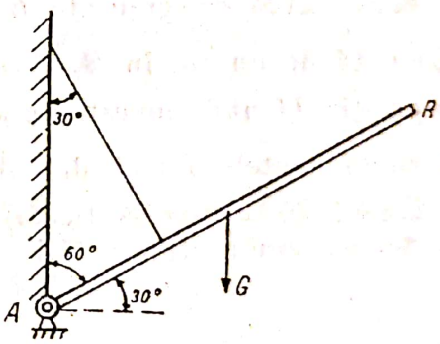


Fig. X.4

4. Să se determine forţa din articulaţia A a barei de greutate G şi lungime l imediat înainte şi imediat după tăierea firului (fig. X.4) în cazurile:

a) firul e legat la $\frac{l}{3}$ de A; b) la $\frac{l}{3}$ de B; c) la mijlocul barei.

În toate cazurile bara are 60° cu verticala, iar firul 30°.

5. Bara de greutate G şi lungime l articulată în A este ţinută în poziţie orizontală prin firul înclinat sub $\hat{\alpha}=45°$. Să se determine F_A (forţa din articulaţie);

a) în această poziţie; b) imediat după ruperea firului; c) cînd bara face $\hat{\theta}$ cu orizontala.

Date: $BA = \frac{l}{4}$; $AC = \frac{3l}{4}$ (fig. X.5).

Scanned with OKEN Scanner

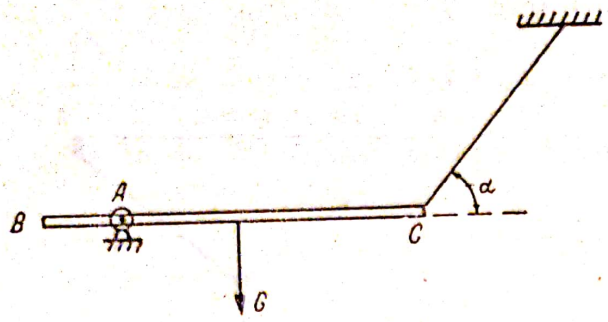


Fig. X.5

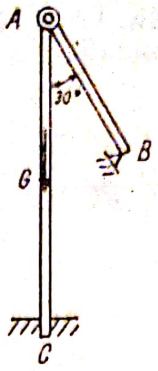


Fig. X.6, *a*

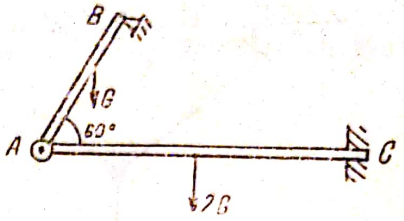


Fig. X.6, *b*

6. a) Fie două bare AB de greutate G şi lungime l şi AC de greutate $2G$ şi lungime $2l$, articulate în A, iar AC este încastrată în C şi AB este rezemată în B şi face 30° cu verticala (fig. X.6, *a*). Se cer: (1) Variaţia elementelor mecanice ale încastrării de la starea statică la starea dinamică iniţială (imediat după scoaterea reazemului B). (2) Elementele încastrării cînd AB trece prin poziţia verticală.

b) Aceeaşi problemă pentru barele în poziţia din figura X.6, *b*. La punctul (2) se cer elementele mecanice ale încastrării cînd AB trece prin poziţia orizontală.

7. O bară EAB de greutate G şi lungime l articulată în A la $\frac{l}{4}$ este rezemată de un cui în B. Se scoate cuiul B şi bara cade din poziţia I în poziţia II unde loveşte un cui $C\left(K = \frac{1}{2}\right)$, $\alpha = 30°$. Să se determine:

a) componentele forţei din A imediat după scoaterea reazemului B şi unde ($\hat{\theta} = ?$ cu verticala) se ridică bara după ciocnire (fig. X.7, *a*);

b) Acelaşi enunţ, figura X.7, *b*.

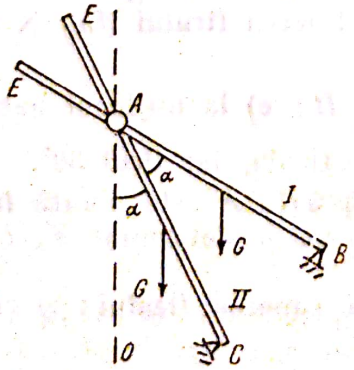


Fig. X.7, *a*

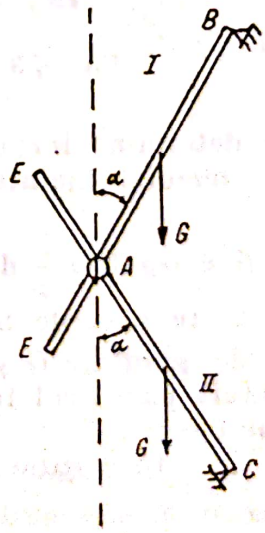


Fig. X.7, *b*

8. O bară cotită în unghi drept avînd $AB = l$ și $BC = 2\,l$ iar brațele respective de greutăți G și $2G$, este articulată în A și rezemată în D la jumătatea laturii BC.
Să se determine cum variază F_A (forța din articulație) la scoaterea reazemului pentru cazurile din figurile X.8, *a*, *b*, *c* și *d*.

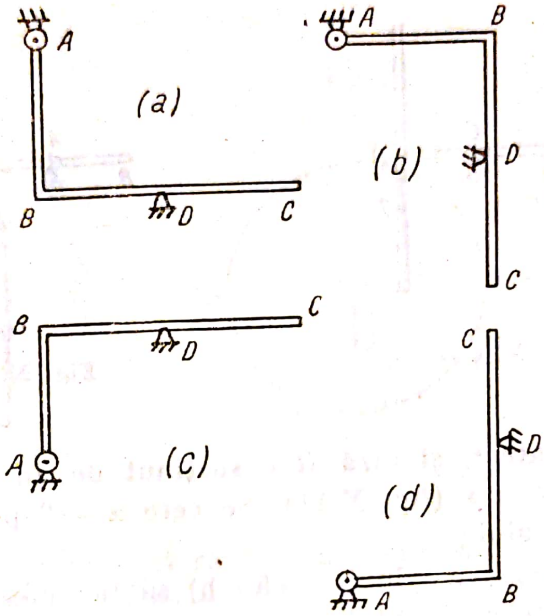


Fig. X.8 *a*, *b*, *c*, *d*.

9. Barele AB și AC egale, de greutate G și lungime l sînt prinse cu un fir la jumătatea lor. Să se determine cum variază forța din articulația F_A și elementele mecanice ale încastrării după tăierea firului, în cazurile din figurile X.9, *a*, *b* și *c*.

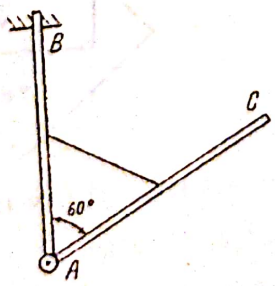


Fig. X.9, *a*

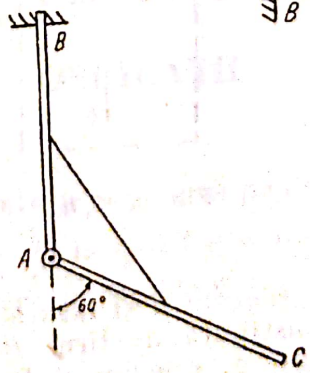


Fig. X.9, *b*

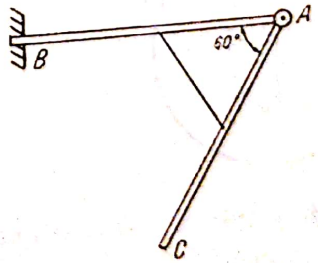


Fig. X.9, *c*

Scanned with OKEN Scanner

10. Două bare egale de greutate G și lungime l sînt lipite între ele avînd articulație în $A\left(AB = \frac{l}{4}\right)$ și rezemate în $C\left(CD = \frac{l}{4}\right)$. Să se determine variația lui F_A (forța de articulație) de la starea statică, imediat după scoaterea reazemului C în cazurile din figurile X.10, *a* și *b*.

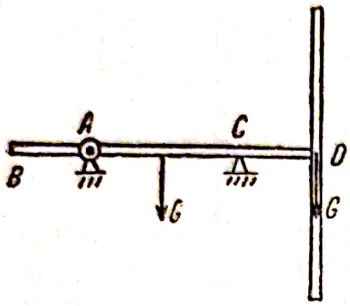


Fig. X.10, *a*

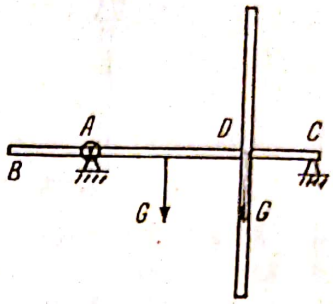


Fig. X.10, *b*

11. Discul de greutate G și rază R e susținut de un fir vertical în punctul B definit de $\sphericalangle\alpha$ (fig. X.11). Se cere $\alpha = ?$ pentru ca F_A imediat după ruperea firului:

a) să rămînă același ca în Statică; b) să fie mai mare ca în Statică; c) să fie mai mic ca în Statică.

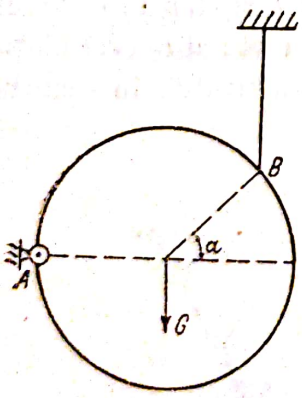


Fig. X.11

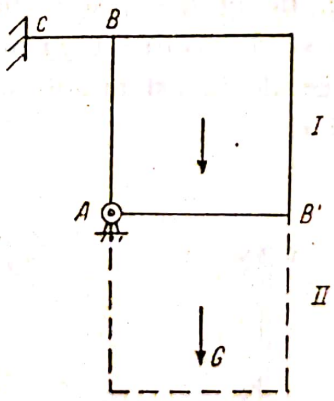


Fig. X.12, *a*

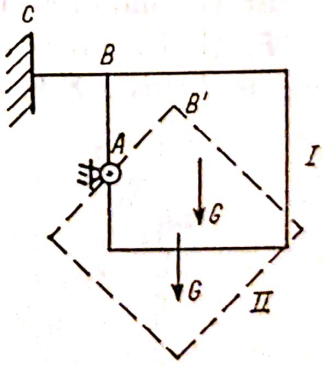


Fig. X.12, *b*

12. a) O placă pătrată de greutate G și latură l articulată în A este în repaus în poziția I susținută de firul BC. Se cere imediat după ruperea firului forța din A, precum și F_A după căderea în poziția II (fig. X.12, *a*).

b) Aceeași problemă pentru figura X.12, *b*.

Scanned with OKEN Scanner

13. Piesa din figura X.13 este formată dintr-o placă pătrată de latură l și greutate G de care e lipit un punct material de greutate G într-un punct al laturii verticale opuse lui A. Placa e prinsă cu un fir vertical $\left(AD = \frac{3l}{4}\right)$ și articulată în A. Articulația A se rupe la $F_A \geqslant \frac{G}{4}$. Ce se va întîmpla cînd se dezlipește brusc punctul material.

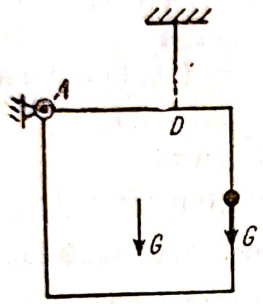


Fig. X.13

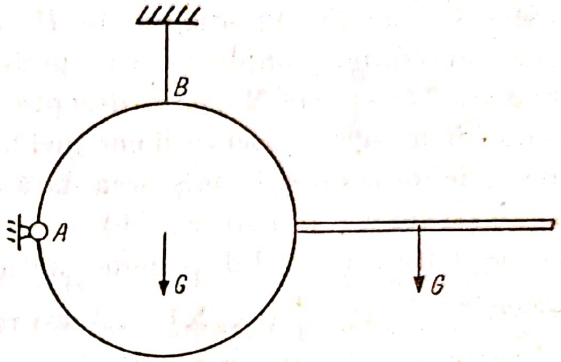


Fig. X.14

14. Fie discul de greutate G și rază R de care este lipită o bară de greutate G și lungime $2R$. Discul este articulat în A și legat în B cu un fir vertical (fig. X.14).
Se presupune:
a) că se rupe firul. Cît este F_A la începutul mișcării?
b) că se desprinde articulația. Cît este T în fir, inițial? (imediat după desprindere).

Capitolul XI

OSCILAȚII

1 Un mobil în mișcare oscilatorie armonică pe dreapta Ox pleacă din origină la $t = 0$, este în $A_1\left(x_1 = \frac{1}{2}\right)$ la $t_1 = 1$ s și în $A_2\left(x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ la $t_2 = 2$ s. Să se determine ecuația mișcării și vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ în A_1 și A_2.

Fig. XI.1

2. Un mobil pleacă din origină în mișcare oscilatorie armonică pe o dreaptă Ox, cu $v = 4$ m/s. După 1 m de la origină în B are viteza $v_B = 2\sqrt{3}$ m/s. Să se determine ecuația mișcării. Să se verifice legea conservării energiei în origină, în B și în A la extremitatea mișcării, mobilul avînd masa m.
3. Un mobil de masă m pleacă din repaus în mișcare oscilatorie armonică de perioadă $T = 8$ s pe o dreaptă orizontală, de la distanța de 3 m de origină. Să se determine viteza în B la $OB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ m de origină. Să se verifice legea conservării energiei în origină, în B, în A la extremitatea traiectoriei.
4. Să se determine amplitudinea, perioada, pentru mișcarea dată de $x = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ pe o dreaptă orizontală.
5. Să se verifice legea conservării energiei la $x = 0$, la $t = 0$ și la extremitatea traiectoriei orizontale în mișcarea dată de :
a) $x = \sqrt{3}\cos \pi t + 3\sin \pi t$; b) $x = \cos \pi t - \sqrt{3}\sin \pi t$.
6. Dacă se atîrnă resortul de lungime naturală l_0 cu o greutate G la capăt se alungește cu $\Delta l_0 = \frac{l_0}{4}$ (fig. XI.6). Acest resort se așază pe o masă orizontală cu frecare $\mu = 0{,}5$ cu un cap fixat în A și se lansează de la $AO = l_0$ cu $v_0 = 10$ m/s. Luînd $l_0 = \frac{1}{2}$ m, se întreabă unde se va opri prima oară ($OB = ?$).

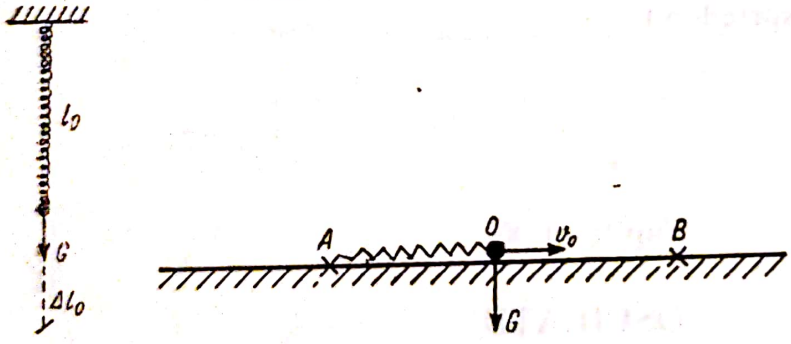


Fig. XI.6

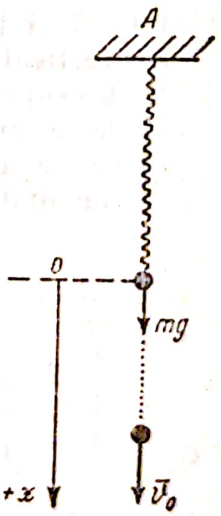


Fig. XI.7

7. Un punct material de masă $m = 2$ se atîrnă de un resort vertical care se alungește cu $\Delta l_0 = \frac{l_0}{4}$ unde $l_0 = \frac{1}{2}$ m. Din acel punct se lansează în jos cu $v_0 = 9$ m/s (fig. XI.7). Să se determine ecuația mișcării.
8. Un punct material de greutate G care întinde static un resort de lungime naturală l_0 cu $\frac{1}{10}$ m vertical, e ridicat la l_0 și lăsat să cadă pe verticală. Care va fi perioada oscilațiilor ?

Scanned with OKEN Scanner

Fig. XI.8

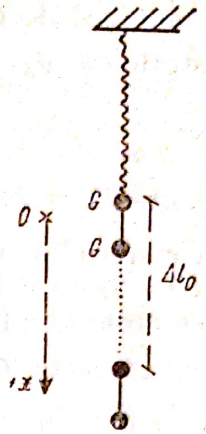


Fig. XI.9

9. Două puncte materiale egale de cîte $G = 50$ N sînt atîrnate de un fir pe care-l alungesc cu $\Delta l_0 = \frac{l_0}{4}$, $l_0 = 1$ m. Se rupe și cade una din ele (fig. XI.9). Se cere mișcarea celeilalte.

10. Un resort de care atîrnă vertical o masă $m = 2$ se alungește static cu $\frac{1}{10}$ m. Pus în mediu fluid, orizontal, se constată pseudoperioada T s $= \frac{2\pi}{6}$. Să se determine coeficientul de amortizare α. Dacă corpul a fost lansat de la $x = \frac{1}{10}$ la $t = 0$ cu $v_0 = 4$ să se determine ecuația mișcării

11. Un resort avînd la capăt un punct material de greutate $G = \frac{1}{2}$ N se lungește cînd e atîrnat vertical cu $\Delta l_0 = \frac{1}{8}$ m. Punctul material lansat singur într-un mediu fluid cu viteza $v_0 = 10$ m/s, se oprește după $\frac{1}{4}$ m (fig. XI.11). Să se determine mișcarea punctului de la lansare cu $v_0 = 10$ m/s pînă la oprire în mediul fluid, cînd e prins de resort.

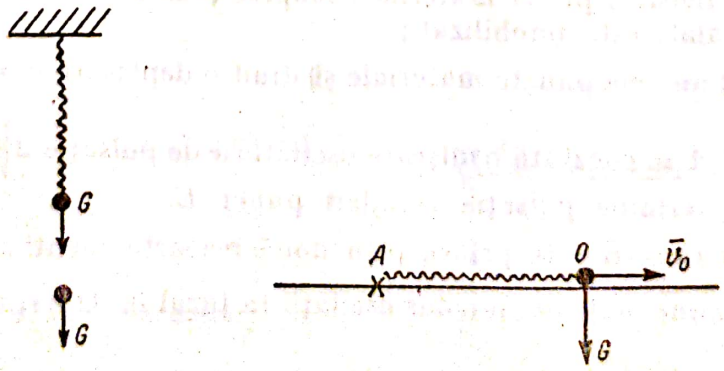


Fig. XI.11

12. Un punct material de greutate $G = 30$ N legat de un resort vertical îl alungește static cu $\Delta l_0 = \frac{1}{10}$ m. I se aplică o forță de 20 N oscilînd cu perioada $T_2 = \frac{2}{9{,}99}$. Să se determine mișcarea cînd la $t = 0 : x = 0,\ v_0 = 0$.

13. Forța oscilantă $P_0 = 20$ N avînd perioada $T_2 = \frac{2\pi}{4{,}99}$ s acționează asupra unui punct material de $G = 40$ N prins de un resort cu coeficient de alungire $K = 100$. Să se determine oscilația proprie și oscilația impusă, presupunînd că mobilul a fost lansat la $t = 0$, deci $x = 0$ cu $v_0 = 10$.

14. Presupunem că forța $P_0 = 20$ N oscilatorie are perioada $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ s și acționează ca mai sus asupra punctului material cu $G = 40$ N prins de resortul cu $K = 100$. Să se determine după cît timp amplitudinea determinată de forța impusă este de 10 ori mai mare decît cea a oscilației proprii.

15. Un punct material de greutate G e prins cu două resorturi de lungime $l_0 = l$ și $K = \frac{4G}{l}$ (fig. XI.15). Se deplasează punctul material cu $x = \frac{l}{4}$. Să se determine perioada micilor oscilații și viteza cu care punctul trece, iar prin O ($A\,A'' = 2\,l$).

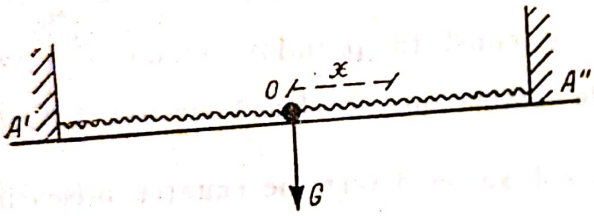


Fig. XI.15

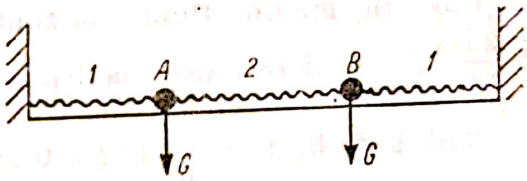


Fig. XI.16

16. Presupunem două puncte materiale de aceeași masă legate ca în figura XI.16.

Toate resoartele au lungime $l_0 = l$ iar resoartele *1* au $K_1 = \frac{4G}{l}$ și resortul *2* are $K_2 = \frac{2G}{l}$. Să se determine:

a) pulsația fiecărui punct material necuplat (adică pulsația unuia din ele cînd celălalt este imobilizat;

b) Liberînd ambele puncte materiale și dînd o deplasare $x = \frac{l}{4}$ punctului material A se constată o mișcare oscilatorie de pulsație $2\sqrt{\frac{g}{l}}$ a acestuia. Să se determine pulsația celuilalt punct B.

17. O roată de rază R este prinsă prin două resoarte identice cu $K = \frac{2G}{R}$.

Să se determine perioada micilor oscilații în jurul lui O fix, cînd resoartele sînt prinse:

a) în A; b) în B.

Se presupune frecarea suficientă ca să nu lunece în O (fig. XI.17).

Scanned with OKEN Scanner

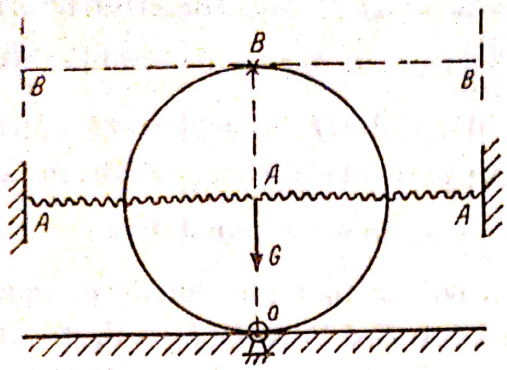


Fig. XI.17

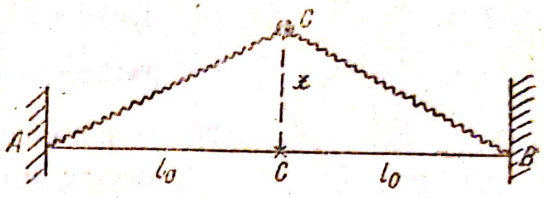


Fig. XI.18

18. Un punct material de greutate G este situat fără frecare pe o masă orizontală și legat în două puncte A și B prin două resoarte de lungime naturală l_0. Fiecare din aceste resoarte întins vertical cu G la capăt se alungește cu $\Delta l_0 = l_0$. Distanța $AG = GB = l = 2\,l_0$. Să se determine perioada micilor oscilații ale lui G pe masă cînd el a fost deplasat cu x (fig. XI.18).

19 Să presupunem că în problema precedentă există și frecare de coeficient $\mu = \frac{1}{10}$. Deplasăm punctul material pe masă cu $\frac{l}{4}$ perpendicular pe AB. Să se determine mișcarea.

20. Aceleași resoarte susțin același punct material în plan vertical. Să se determine poziția de echilibru static (unghiul α al resoartelor cu orizontala). Se trage G în jos cu $\frac{l}{4}$ din această poziție de echilibru static. Să se determine mișcarea.

21. Bara cotită în A sub unghi drept are AB de greutate G și lungime l și AC de greutate $2G$ și lungime $2l$. Bara e ținută ca în figură de resortul prins în C. Acest resort atîrnat vertical cu greutate G la capăt se alungește cu $\frac{l}{4}$. Să se determine perioada micilor oscilații în cazul figurilor XI.21, *a* și XI.21, *b*.

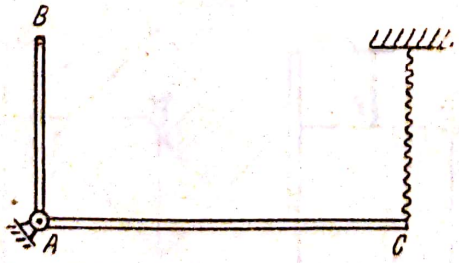


Fig. XI.21, *a*

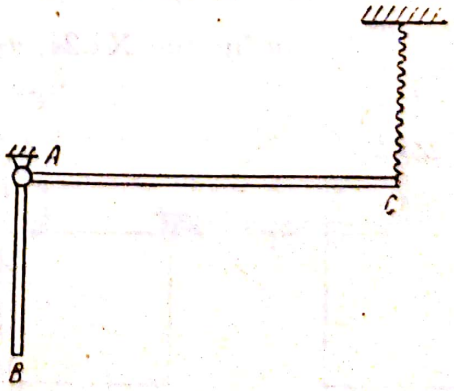


Fig. XI.21, *b*

Scanned with OKEN Scanner

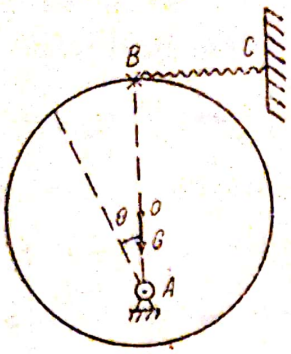


Fig. XI.22

22. Un disc de greutate G și rază R este prins cu un resort BC elastic $\left(K = \frac{4G}{R}\right)$ care în poziția de echilibru nu e întins, $BC = l_0$ (fig. XI.22). Se deplasează puțin discul cu $\hat{\theta}$. Se cere perioada micilor oscilații în raport cu A $\left(OA = \frac{R}{2}\right)$ A fiind un punct fix.

23. O bară cotită sub 60° ca în figura XI.23, *a*, unde fiecare braț are greutate G și lungime l, oscilează în planul vertical în jurul articulației A cu planul :

a) Să se determine perioada micilor oscilații.

b) Se prinde bara apoi astfel încît AC este orizontal, cu un resort $\left(K = \frac{4G}{l}\right)$.

Să se determine unde ($AD = x = ?$) trebuie prins resortul ca perioada micilor oscilații în jurul poziției de echilibru în acest caz să fie aceeași cu cea a corpului fără resort. Se vor studia figurile XI.23, *b* și XI.23, *c*, pentru AC orizontal.

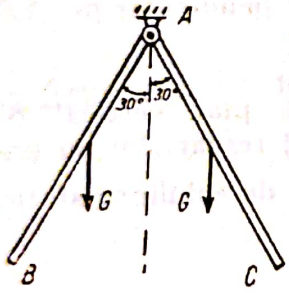


Fig. XI.23, *a*

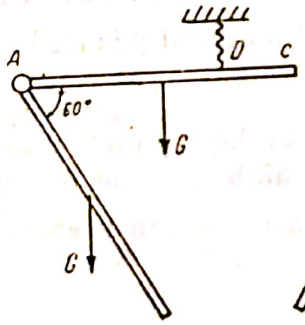


Fig. XI.23, *b*

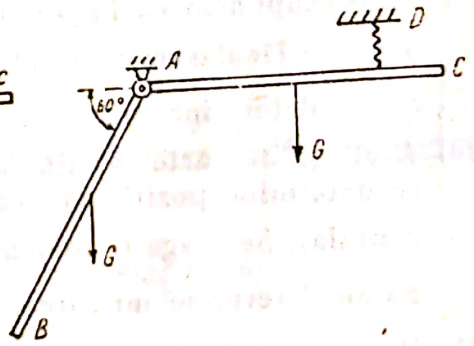


Fig. XI.23, *c*

24. Fie pe o placă pătrată articulată în A de greutate G și latură l de care este lipită o bară de greutate G și lungime l. Să se determine perioada micilor oscilații ale sistemului susținut de resortul cu coeficient de alungire $K = \frac{4G}{l}$, ca în figurile XI.24, *a-h*.

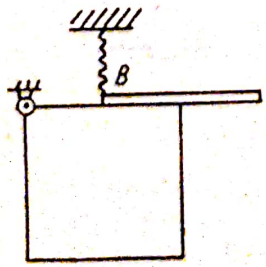


Fig. XI.24, *a*

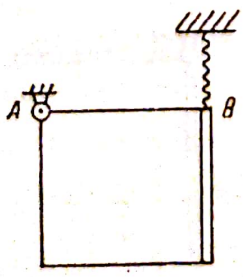


Fig. XI.24, *b*

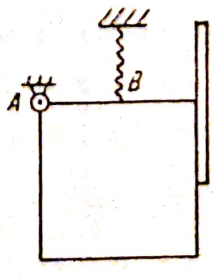


Fig. XI.24, *c*

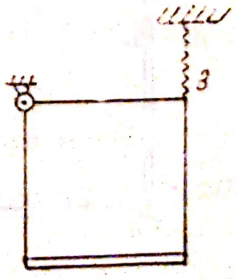


Fig. XI.24, *d*

Scanned with OKEN Scanner

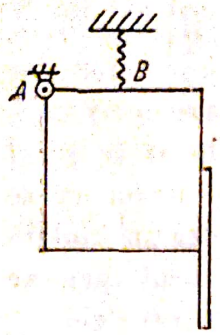


Fig. XI.24, *e*

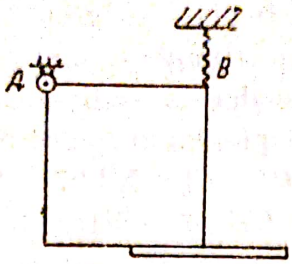


Fig. XI.24, *f*

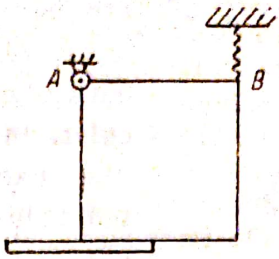


Fig. XI.24, *g*

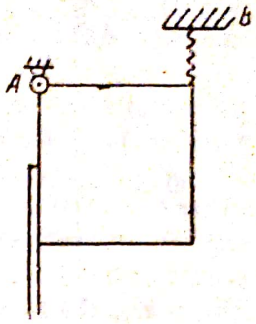


Fig. XI.24, *h*

25. Dintr-o placă pătrată de greutate $4G$ și latură $2l$ se taie o porțiune pătrată de greutate G și latură l ca în figurile XI.25, *a*, XI.25, *b* și XI.25, *c*. Să se determine perioada micilor oscilații în jurul unei axe perpendiculare în A pe planul vertical al hîrtiei în cazurile a), b), c).

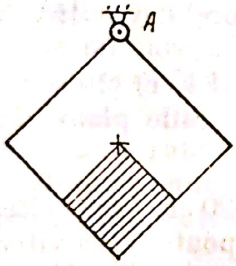


Fig. XI.25, *a*

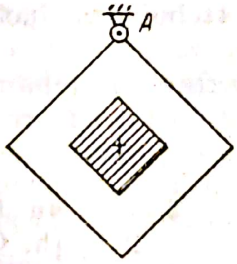


Fig. XI.25, *b*

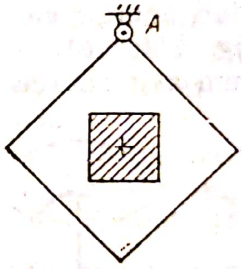


Fig. XI.25, *c*

26. Plăcile din figura precedentă se prind cu un resort $\left(K = \frac{4G}{l}\right)$ în poziția de echilibru static din figurile XI.26, *a*, *b* și *c*. Să se determine perioada micilor oscilații în jurul acestei poziții de echilibru.

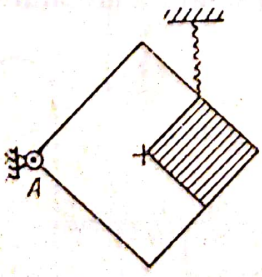


Fig. XI.26, *a*

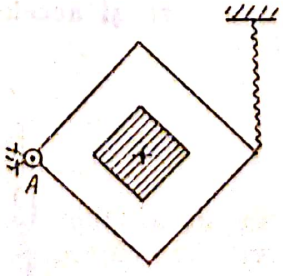


Fig. XI.26, *b*

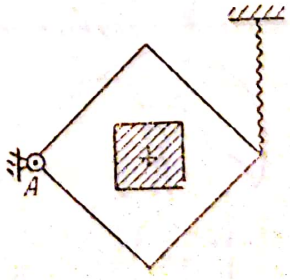


Fig. XI.26, *c*

Scanned with OKEN Scanner

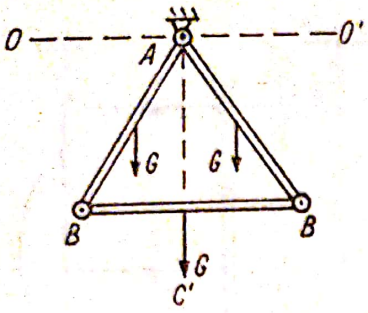


Fig. XI.27

27. Trei bare articulate de greutate G și lungime l, formează un triunghi echilateral. Să se determine perioada micilor oscilații în jurul axei perpendiculare în A pe planul figurii precum și în jurul unei axe OO' (fig. XI.27). Presupunem că se scoate bara BB. Să se determine viteza unghiulară $\overline{\omega}$ cu care trebuie rotit sistemul în jurul unei axe AC ca barele AB să rămînă la 60° între ele.

Capitolul XII

MIȘCĂRI RELATIVE

1. Un om merge cu 3 km/h pe ploaie și ține umbrela verticală (fig. XII.1, *a*) Cînd merge cu 6 km/h trebuie să încline umbrela cu 45° în față (fig. XII.1, *b*).
Cum ar trebui să încline umbrela la repaus (fig. XII.1, *c*) și cu ce viteză și sub ce înclinare cade ploaia în realitate ?

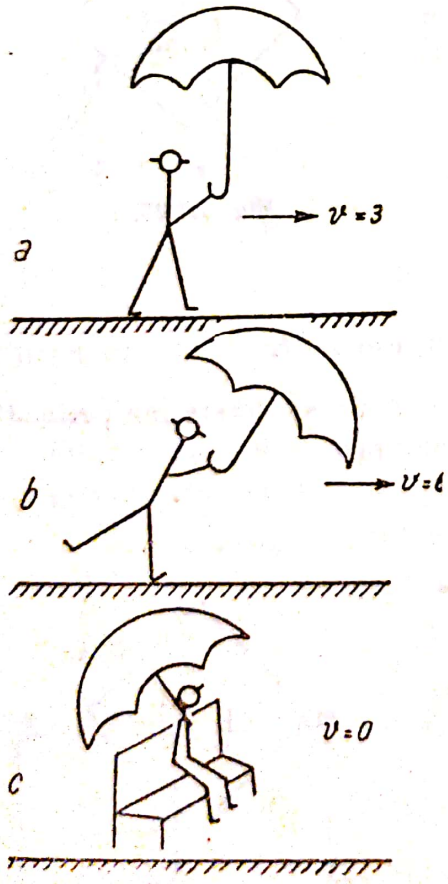


Fig. XII.1

2. Un rîu lat de 120 m are viteza de 2 km/h. O barcă poate avea viteza maximă 3 km/h. Se cere direcția pe care trebuie s-o ia barca pentru a traversa rîul în timp minim.

3. Pe bara orizontală de greutate G și lungime l din figura (XII.3) se deplasează de la un capăt la celălalt un mobil de greutate neglijabilă, astfel încît parcurge bara pornind din repaus, în timpul în care sistemul pornind din repaus se deplasează cu $\frac{l}{4}$. Se cere la sosire viteza și accelerația absolută a mobilului.

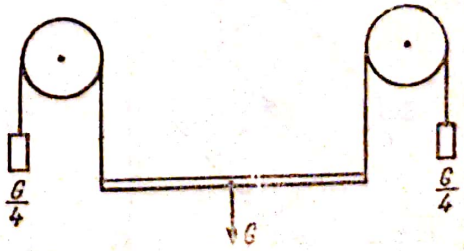


Fig. XII.3

Scanned with OKEN Scanner

4. a) Un tren înaintează cu 72 km/h. Pe fereastra situată la 2 m deasupra solului se aruncă un mobil paralel şi în sens invers cu mişcarea trenului, cu o viteză de 25 m/s. Se cere punctul unde va atinge solul.
b) Aceeaşi problemă dar mobilul este lansat în sensul înaintării trenului.
c) Aceeaşi problemă dar mobilul este lăsat să cadă cu viteză de lansare 25 m/s pe verticală în jos.

5. De pe o platformă a unui vagon se lansează un proiectil sub $\hat{\alpha}$. Distanţa de la punctul de ieşire a proiectilului la sol pe verticală este de 2 m. Viteza vagonului este de 20 m/s, iar a proiectilului de 25 m/s. Să se determine distanţa la care proiectilul loveşte solul cînd $\alpha = 30°$; $\alpha = 45°$; $\alpha = 60°$ (fig. XII.5).

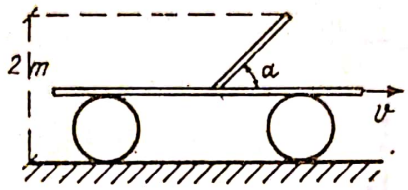


Fig. XII.5

6. Un vehicul accelerează din repaus la viteza de 20 m/s pe 50 m. Înaintează apoi în mişcare uniformă cu 20 m/s şi se opreşte după 10 s de la frînare. Cum se aşază firul unui pendul avînd o ghiulea de masă m, care este prins de tavanul vehiculului, în aceste trei părţi ale mişcării.

7. Două lăzi legate cu un fir care trece peste un scripete fără frecare au în ele cîte un pendul cu un punct material de greutate G şi fir de lungime l. Lada I are greutate $4G$, lada II are greutate G şi are frecare de coeficient $\mu = \frac{1}{2}$ cu planul orizontal (fig. XII.7). Să se determine în mişcare, perioada micilor oscilaţii ale pendulelor.

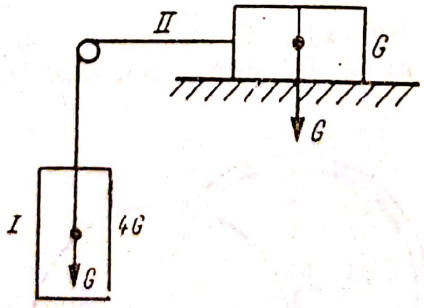


Fig. XII.7

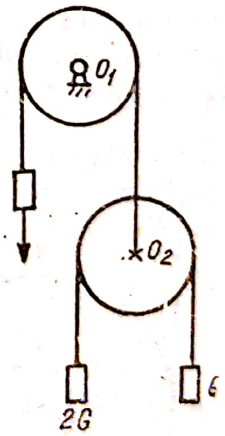


Fig. XII.8

8. Peste un scripete O_1 este trecut un fir avînd la un capăt o greutate G şi la celălalt alt scripete O_2 peste care trece alt fir cu $2G$ şi G la capete (fig. XII.8). Să se determine acceleraţia absolută a lui $2G$. Scripeţii au greutate neglijabilă.

Scanned with OKEN Scanner

9 Pătratul de latură $l = 3$ m se deplasează cu viteza constantă $V = 4$ m/s. Pe dreapta AB pornind din A se deplasează un mobil în mişcare oscilatorie armonică de perioadă $T = \pi$ s (fig. XII.9). Să se determine în N la $\frac{OA}{2}$ viteza şi acceleraţia absolută a mobilului, în cazurile :

a) placa se deplasează orizontal ;

b) placa se deplasează vertical cu $\bar{V}$.

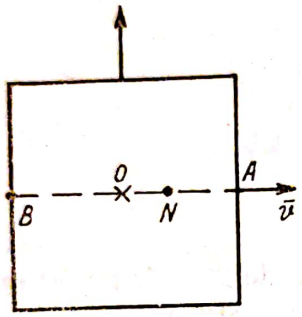


Fig. XII.9

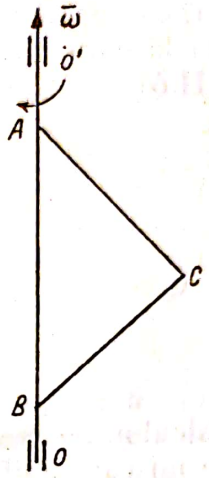


Fig. XII.10

10. Placa în formă de triunghi dreptunghic în C, de latură $AC = BC = 4$ m se roteşte în jurul unui ax OO' vertical şi capătă în $t = 2$ s pornind din repaus, viteza unghiulară $\omega = 6$ rad/s. În acest timp, un mobil pornind din repaus din A a parcurs latura AC (fig. XII.10). Să se determine viteza şi acceleraţia absolută ale mobilului în C.

11. Un mobil de masă m se mişcă pe cercul de rază R din figura XII.11 cu viteză constantă $\bar{V}$. Cercul se roteşte în jurul tangentei TT' cu viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}$ astfel încît face o rotaţie în timp ce mobilul parcurge toată circumferinţa (fig. XII.11). Să se determine în A, B, C, D, viteza şi acceleraţia absolută a mobilului.

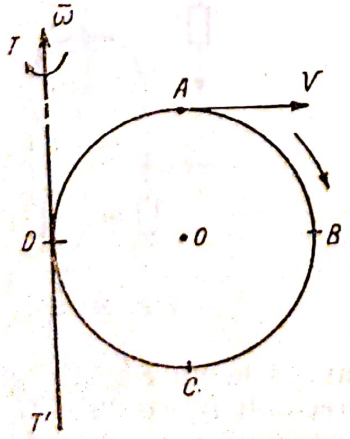


Fig. XII.11

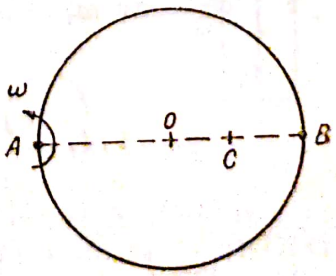


Fig. XII.12

12. Un punct material în oscilație armonică de perioadă $T = \pi$s pleacă din B de pe marginea discului de rază $R = 3$ m. Discul se rotește în planul său cu $\omega = 2$ rad/s în jurul lui A (fig. XII.12). Se cer vitezele și accelerațiile absolute în B, C $\left(OC = \frac{OB}{2}\right)$ și O.

13. *Aberația luminii.* Fie o stea fixă S și o lunetă îndreptată spre ea. Știind că luneta se deplasează cu viteza Pământului $v_P \approx 29{,}7$ km/s iar lumina cu $v_l = 308\,000$ km/s, să se determine unghiul α cu care trebuie înclinată luneta față de poziția reală a stelei ca să prindă raza luminoasă, și care e poziția aparentă a stelei (fig. XII.13).

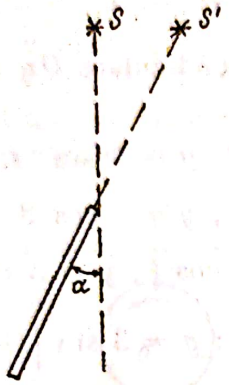


Fig. XII.13

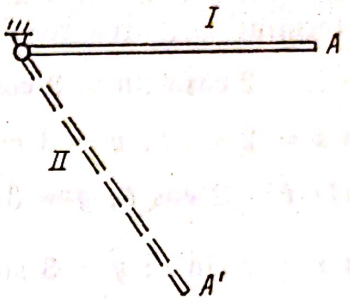


Fig. XII.14

14. Pe o bară OA de greutate G și lungime l se deplasează un mobil de la O către A cu viteză constantă V. Cînd mobilul (considerat de greutate neglijabilă) este în A, bara a căzut în plan vertical din poziția orizontală I în poziția II sub 60° (fig. XII.14). Să se determine în A' : $\bar{v}_{abs}$ și $\bar{a}_{abs}$ a mobilului.

15. O roată de greutate G și rază $R = \frac{1}{4}$ m se rostogolește fără lunecare pe plan orizontal. La începutul mișcării de rostogolire ($t = 0$) viteza centrului de greutate $v_0 = \frac{1}{2}$ m/s. Roata are coeficient de frecare de rostogolire $s = \frac{R}{10}$. Pe o spiță OA care la $t = 0$ este verticală, se deplasează din repaus un mobil de la O către A (greutatea mobilului și a spiței se neglijează). Se cere $\hat{\theta} = ?$ parcurs de spiță cînd mobilul a parcurs OA în $t = 1$ s (fig. XII.15). Se cer $\bar{v}_{abs}$ și $\bar{a}_{abs}$ a mobilului în A. (Se va lua $\pi = 3$; $g = 10$ m/s^2).

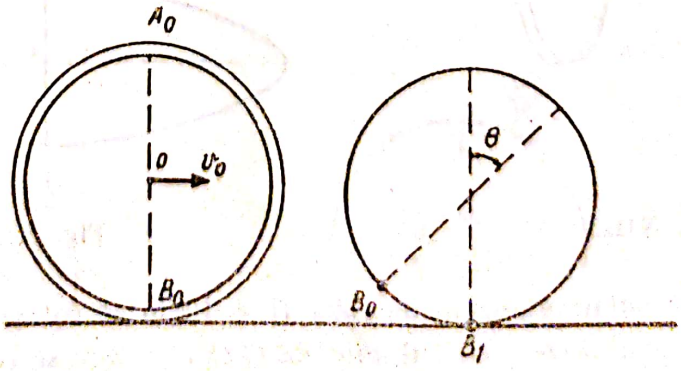


Fig. XII.15

Capitolul XIII

COMPUNERI DE MIȘCĂRI, CENTRU INSTANTANEU

Compuneri de mișcări oscilatorii

1. Fie mișcările oscilatorii armonice pe aceeași dreaptă Ox:

a) $x_1 = 2 \sin t$; $x_2 = 3 \sin t$;
b) $x_1 = 2 \sin t$; $x_2 = 3 \cos t$.

Să se determine mișcarea rezultantă.

2. Fie mișcările oscilatorii armonice pe drepte perpendiculare Ox și Oy. Să se determine mișcarea rezultantă în cazurile:

a) (I) $x = 2 \cos t$; $y = 3 \cos 2t$; (II) $x = 2 \cos t$; $y = 3 \sin 2t$.

b) (I) $x = 2 \sin t$; $y = 3 \cos t$; (II) $x = 2 \sin t$; $y = 3 \cos 2t$

(III) $x = 2 \cos t$; $y = 3 \cos 2t$; (IV) $x = 2 \cos t$; $y = 3 \cos 3t$.

c) (I) $x = 2 \sin t$; $y = 3 \sin t$; (II) $x = 2 \sin t$; $y = 3 \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$

(III) $x = 2 \sin t$; $y = 3 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$; (IV) $x = 2 \sin t$; $y = 3 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Fie o bară verticală OO' de care e prins un braț $AC = l = 4$ cm orizontal la capătul căruia este o roată de rază $r = 3$ cm. Sistemul se învîrtește în jurul axului vertical cu $2\bar{\omega}$, iar roata în jurul lui C cu $\bar{\omega}$ (fig. XIII.3). Să se arate că viteza unui punct al roatei poate fi determinată prin rotația în jurul unui ax pe suportul rezultantei vectorilor $\bar{\omega}$ și $2\bar{\omega}$.

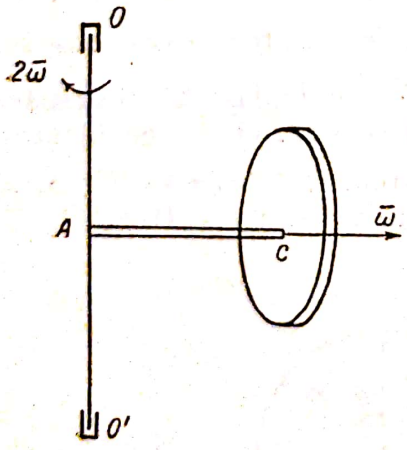


Fig. XIII.3

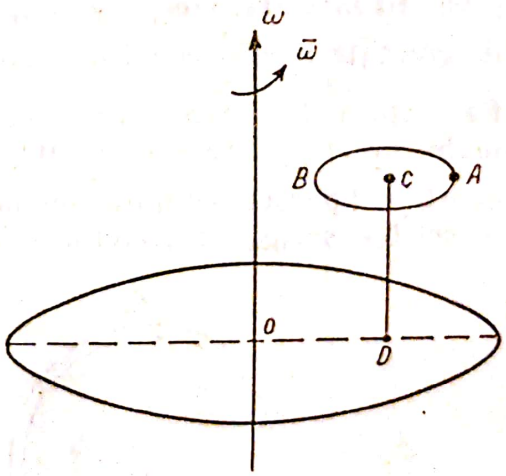


Fig. XIII.4

4. a) Discul circular orizontal de rază $R = 10$ m se rotește cu $\bar{\omega} = 4$ rad/s în jurul axului OO'. Discul mic de rază $r = 2$ m se rotește în sens invers cu $3\bar{\omega}$ în jurul unui ax CD fixat pe discul mare în D la distanța

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{R}{2}$ de centrul acestuia. Se cere viteza punctelor A și B de pe circumferința discului mic în poziția din figura XIII.4.

b) Care ar fi viteza lui A și B dacă $3\,\bar{\omega}$ ar fi de același sens cu $\bar{\omega}$.

5. Să se arate în problema precedentă că în cazul cînd viteza discului mic este $-\bar{\omega}$, acest disc este în translație.

6. a) Un vehicul înaintează cu $\bar{v} = 15$ m/s. Pe vehicul este situată o roată de rază $R = \frac{1}{2}$ m care se rotește cu $\bar{\omega} = 40$ rad/s în jurul lui O (fig. XII.6). Să se determine mișcarea unui punct oarecare al roții de pe diametrul care trece prin A.

b) Care vor fi vitezele cînd roata este într-un plan orizontal în vehicul, rotindu-se cu același $\bar{\omega}$.

c) Să se determine viteza unui punct oarecare M al roții.

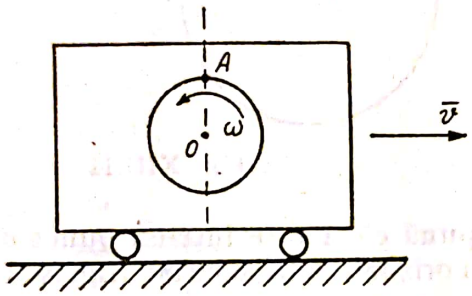


Fig. XIII.6

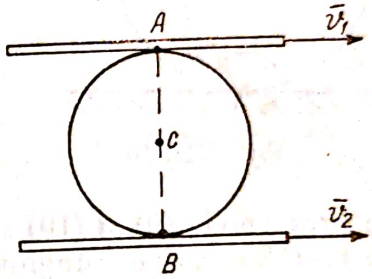


Fig. XIII.7

7. Un cilindru de rază $R = 2$ m este rostogolit prin antrenarea a două benzi care se deplasează cu $\bar{v}_1 = 20$ m/s respectiv $\bar{v}_2 = 12$ m/s (fig. XIII.7). Să se determine:

a) Viteza $\bar{v}_C$ a centrului C al roții; viteza de rotație $\bar{\omega}$ a roții; punctul în jurul căruia se va face rotația. Să se descompună mișcarea în translație și rotație;

b) Aceeași problemă dar $\bar{v}_1$ are sens contrar.

8. O locomotivă înaintează cu 72 km/h. Roata are diametrul $d = 1{,}2$ m (fig. XIII.8). Să se găsească viteza și direcția mișcării punctelor situate la 0,9 m deasupra solului, și viteza lui A și B în raport cu centrul roții.

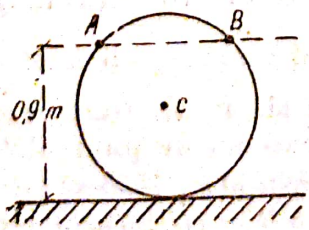


Fig. XIII.8

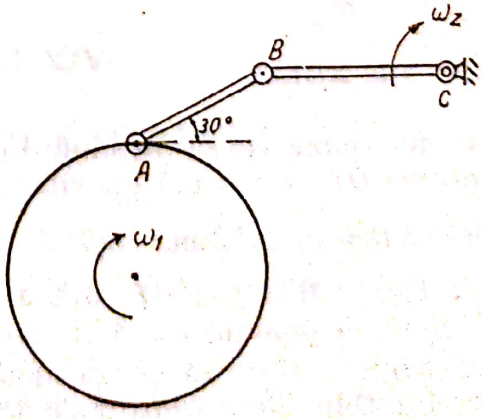


Fig. XIII.9

9. Fie o roată de rază R care se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul centrului O. În A este articulată o bară AB de lungime R de care e articulată altă bară BC de lungime R. Să se determine în poziția din figura XII.9 viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ a barei BC.

10. Aceeași problemă de mai sus dar roata se rotește în jurul punctului de contact cu solul (fig. XIII.10).

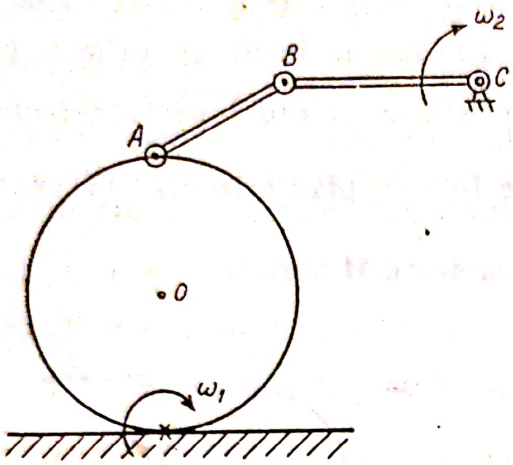


Fig. XIII.10

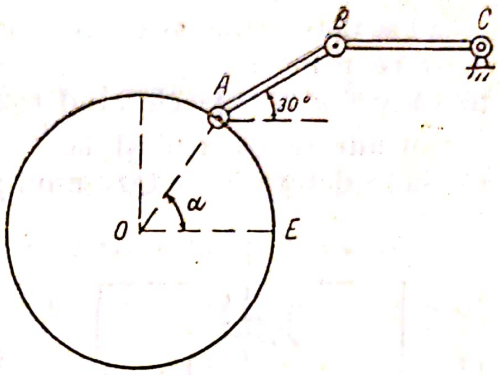


Fig. XIII.11

11. În problemele (9) și (10) să se presupună că A este într-un punct definit de $\sphericalangle AOE = \alpha = 60°$ unghiul lui AB cu orizontala fiind de 30° (fig. XIII.11).

12. Se cer vitezele punctelor de articulație C, D, E și $\bar{\omega}_2$ a barei CB cînd este dată viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ a barei AE. Date $CE = DE = l$; $DEC = 90°$, $CB = EA = \frac{CD}{2}$ (fig. XIII.12).

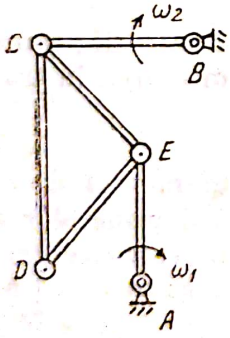


Fig. XIII.12

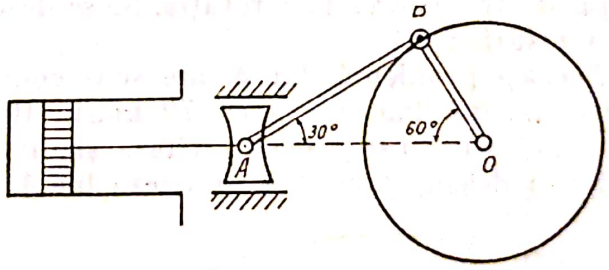


Fig. XIII.13

13. Să se determine viteza pistonului în poziția din figura XIII.13 unde raza manivelei $OB = r = 0{,}5$ m, viteza manivelei $n = 240$ rot/min, lungimea bielei $AB = l = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m.

14. Două bare $AB = l$ și BD sînt articulate între ele în B. Bara AB este articulată în punctul fix A, iar bara BD se reazemă de punctul fix C. Bara AB se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ constantă. Se cere viteza $\bar{v}_0$ a barei în C în diferite poziții ale barelor ($AC = AB = l$). Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării (fig. XIII.14).

Scanned with OKEN Scanner

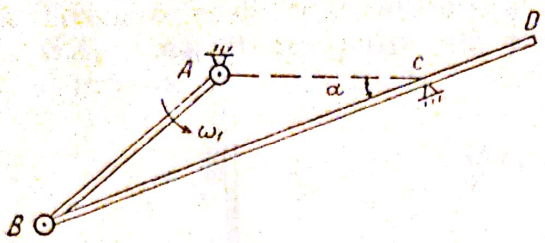


Fig. XIII.14

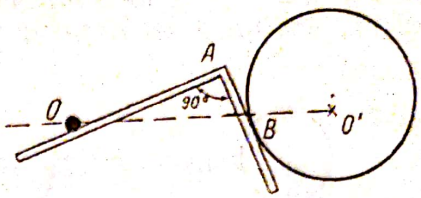


Fig. XIII.15

15. O bară cotită sub unghi drept se reazemă de cuiul O și de cercul de centru O' și rază R ($OO' = l$). Să se determine baza și rostogolitoarea (fig. XIII.15).

16. O bară se deplasează cu punctul B în contact cu solul având $\bar{v}_B$ constant. Bara se reazemă de un cub de latură l. Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării (fig. XIII.16).

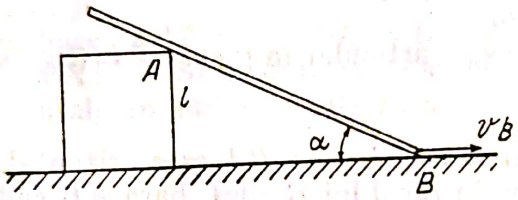


Fig. XIII.16

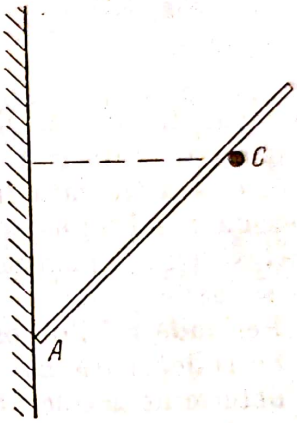


Fig. XIII.17

17. O bară se deplasează cu punctul A în contact cu un perete vertical cu viteza constantă $\bar{v}_A$. Bara care face $\sphericalangle \alpha$ cu peretele, se reazemă pe un cui C la distanța l de peretele vertical (fig. XIII.17). Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării.

Capitolul XIV

ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

1. O bară de greutate G și lungime l are lipit la capăt un disc de greutate $\frac{G}{2}$ și rază $\frac{l}{3}$. Sistemul e articulat în A și cade în plan vertical din poziția orizontală în poziția II dată de $\hat{0}$. Să se determine accelerația unghiulară în poziția II, cu ajutorul ecuației lui Lagrange (fig. XIV.1). Să se verifice cu ajutorul relației $\bar{m}_{ext} = I_A \bar{\varepsilon}$.

Scanned with OKEN Scanner

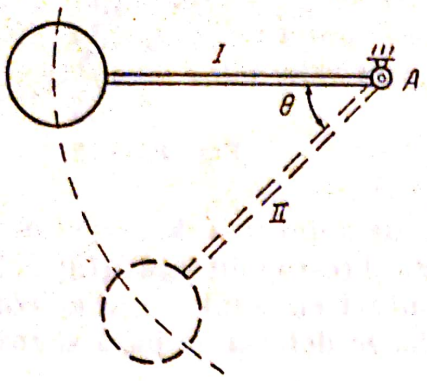


Fig. XIV.1

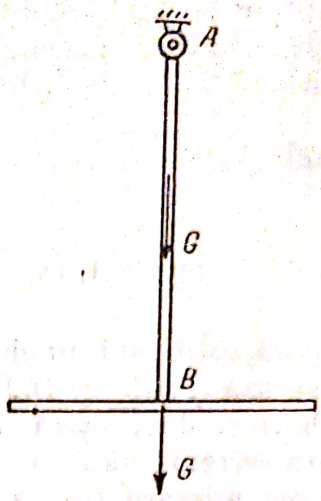


Fig. XIV.2

2. Fie teul din figura XIV.2 format din două bare egale de greutate G și lungime l, lipite între ele. Să se determine perioada micilor oscilații cînd bara este articulată în A și oscilează în plan vertical. Să se verifice prin metoda pendulului simplu sincron.

3. Același teu din poziția precedentă este articulat în jurul lui B (fig. XIV.3). Să se determine :

a) Perioada micilor oscilații.

b) Se ridică bara BA în jurul lui B astfel încît BA este orizontal. Să se determine accelerația în rotație în jurul lui B cînd bara AB cade din poziția orizontală rotindu-se în jurul lui B.

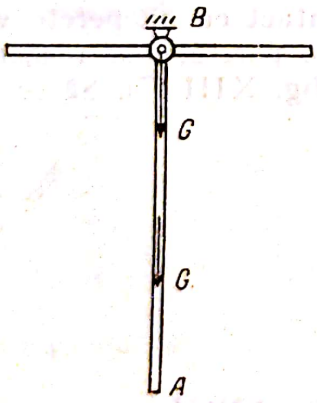


Fig. XIV.3

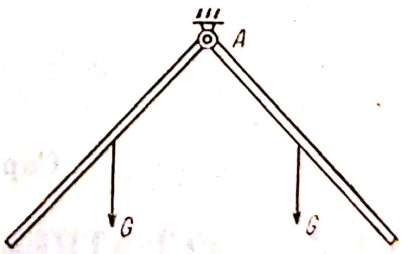


Fig. XIV.4

4. O bară îndoită în formă de unghi drept are cele două brațe de greutate G și lungime l. Bara e articulată în punctul unde e cotită, astfel încît oscilează într-un plan vertical (fig. XIV.4). Să se determine cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange, perioada micilor oscilații. Să se verifice prin pendulul simplu sincron cu bara.

Scanned with OKEN Scanner

5. Trei bare egale de greutate G și lungime l, articulate între ele și în A_1 și A_2 se deplasează puțin din poziția de echilibru (fig. XIV.5). Să se determine perioada micilor oscilații în jurul poziției de echilibru static.

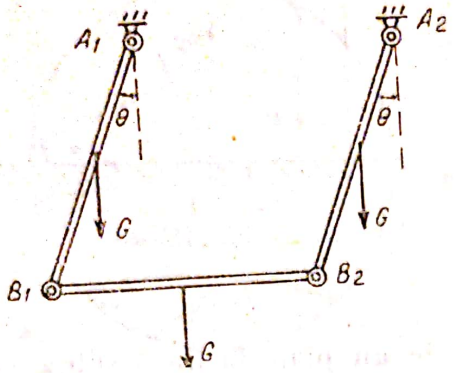


Fig. XIV.5

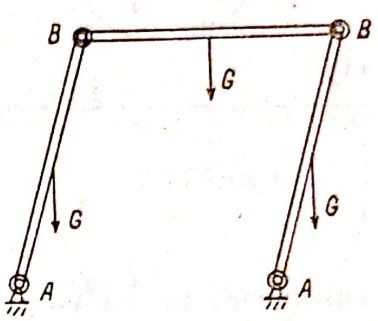


Fig. XIV.6

6. Trei bare egale de greutate G și lungime l, articulate ca în figura XIV.6 se deplasează puțin din poziția cu AB vertical. Se cer viteza și accelerația unghiulară cu care sosesc la solul AA. Să se verifice prin ecuația lui Lagrange.

7. Trei bare egale $AD = DC = CB$ de greutate G și lungime l, stau ca în figura XIV.7. Să se determine accelerația sistemului cînd AD și BC devin orizontale în cădere ($AB=l$; $\alpha=45°$ la începutul mișcării).

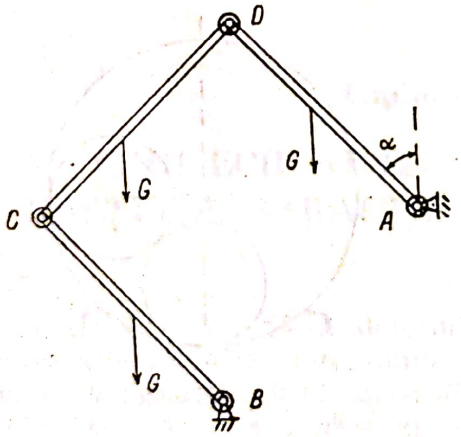


Fig. XIV.7

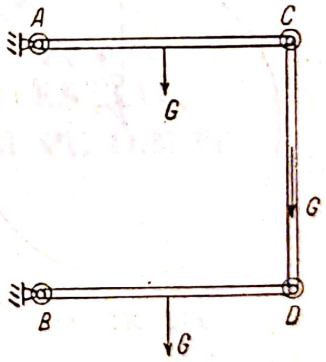


Fig. XIV.8

8. Trei bare egale de greutate G și lungime l sînt articulate ca în figura XIV.8 într-un plan vertical. Să se determine:

a) mișcarea din poziția din figură.

b) Să se determine perioada micilor oscilații din jurul poziției de echilibru static.

9. Un corp cu secțiune triunghiulară de unghi α ca în figura XIV.9 și masă M poate luneca fără frecare pe un plan orizontal. Pe planul înclinat se rostogolește o sferă de masă m, rază R. Să se determine spațiul s_{abs} parcurs de sferă în timpul t.

Scanned with OKEN Scanner

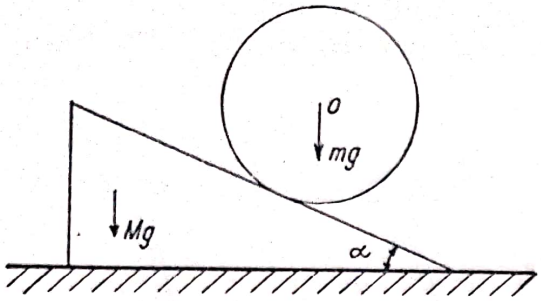


Fig. XIV.9

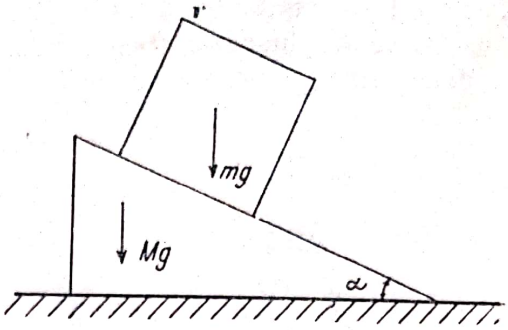


Fig. XIV.10

10. Un cub lunecă pe un corp mărginit de un plan înclinat sub $\hat{\alpha}$, care el însuşi lunecă pe planul orizontal fără frecare. Cubul are masă m iar corpul masă M. Să se determine $\bar{s}_{abs}$ al cubului în timpul t (fig. XIV.10).

11. Pe o sferă fixă de rază R este aşezată o sferă de greutate G şi rază r scoasă puţin din poziţia de echilibru static (fig. XIV.11). Să se determine mişcarea şi frecarea pentru a nu luneca.

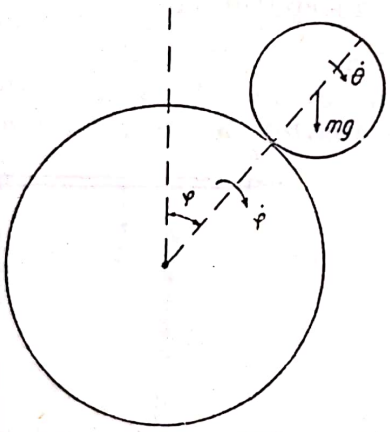


Fig. XIV.11

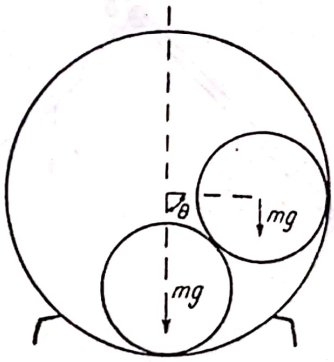


Fig. XIV.12

12. În interiorul unei sfere fixe de rază R se rostogoleşte sfera mică de greutate G şi rază r, cu frecare (fig. XIV.12). Se cere mişcarea.

13. Într-un vas în formă de calotă sferică de rază $R = \frac{1}{10}$ m şi unghi la centrul sferei $AOC = 60°$, este un mobil de masă m. Vasul se roteşte cu $\dot{\theta} = \omega = \text{const} = 2$ rad/s (fig. XIV.13).

Se cere acceleraţia unghiulară $\ddot{\varphi}$ cu care mobilul ajunge la baza A a vasului.

Scanned with OKEN Scanner

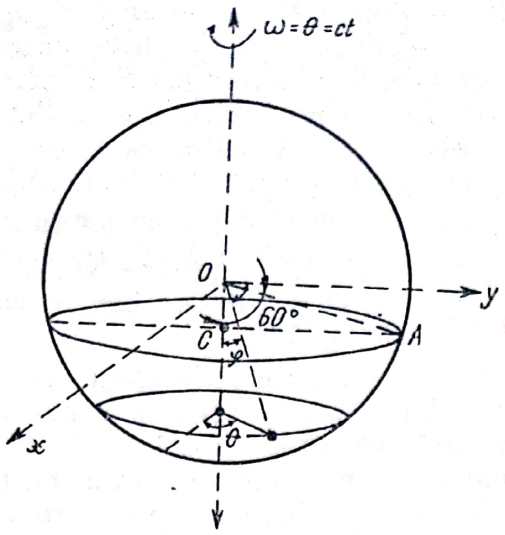


Fig. XIV.13

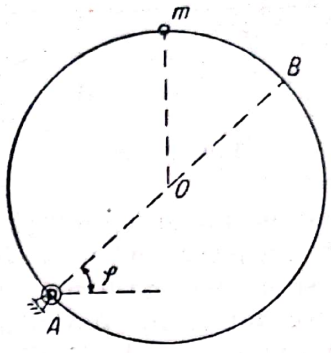


Fig. XIV.14

14. Într-un plan orizontal este situat un cerc de sîrmă de rază R pe care lunecă un inel de masă m. Cercul se roteşte cu $\omega = \dot{\varphi} = \text{const}$ în jurul unui punct fix al său A în planul orizontal (fig. XIV.14). Să se determine mişcarea inelului.

Capitolul XV

LINII ECHIPOTENȚIALE, POTENȚIAL, FORȚE DE ATRACȚIE, MIȘCĂRI PE ORBITE

1. Fie funcţia $U = 4x$. Să se determine :
a) liniile echipotenţiale ; b) liniile de forţă ;
c) forţa în punctele A (3, 2) şi B (2, 3).

2. Fie $U = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$.
Să se determine :
a) liniile echipotenţiale ; b) liniile de forţă ;
c) forţa în punctele A (5, 3), B (8, 7) şi C (—1, —3).

3. Fie $U = \frac{x^2}{4} + y^2$
Să se determine :
a) liniile echipotenţiale ; b) liniile de forţă ;
c) forţele în punctele A (0, 1) şi B (6, 4).

4. Fie $U = x^2 - 4y$
Să se determine :
a) liniile echipotenţiale ; b) liniile de forţă ;
c) forţele în punctele A (1, 2) şi B (2, 1).

Scanned with OKEN Scanner

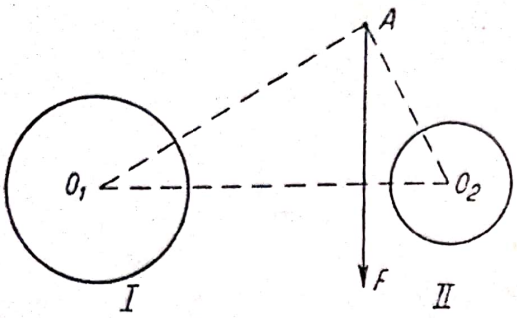


Fig. XV.5

5. Fie două sfere la distanța $O_1O_2 = 5R$ una de alta (O_1, O_2 fiind centrale sferelor). Prima are raza R și masa specifică γ (fig. XV.5). Să se determine raza x a celeilalte, care are aceeași masă specifică, astfel încît rezultanta forțelor de atracție ale lor în punctul $A(\overline{O_1A} = 4R,\ \overline{O_2A} = 3R)$ să fie verticală. Să se determine și valoarea lui F.

6. Să se determine potențialul newtonian al unei bare de lungime l și masă m într-un punct A situat în prelungirea barei la distanța s de capătul barei. Să se determine forța atractivă datorită acestui potențial.

7. Să se determine potențialul newtonian al unui cerc de rază R și masă m într-un punct A situat pe perpendiculara la planul cercului prin centru, la distanța s.

8. Să se determine greutatea unui corp de masă m pe Lună, respectiv pe Marte, știindu-se că raza lor în km este respectiv 1 738 și 3 407, iar masa lor este respectiv $0{,}07345 \cdot 10^{24}$ kg și $0{,}643 \cdot 10^{24}$ kg. Se știe că constanta atracției este $K = 6{,}670 \cdot 10^{-11}$ în sistemul universal.

9. Să se determine accelerația gravității g_ρ la o distanță R de suprafața Pământului (R = raza Pământului).

10. Să se determine viteza perpendiculară pe suprafața Pământului respectiv Lunii sau a lui Marte, dată unui mobil de pe aceste suprafețe pentru ca mobilul să nu se mai reîntoarcă.

11. Să se determine viteza $\bar{v}_0$ cu care se rotește un mobil de masă m în jurul Pământului, respectiv Lunii sau lui Marte, la o distanță de suprafața lor egală cu raza lor, rotirea făcîndu-se pe orbită circulară.

12. Să se determine altitudinea (distanța de suprafața Pământului) la apogeul traiectoriei unui satelit al Pământului, perigeul traiectoriei sale fiind la $\rho_P = 2R$ de centrul Pământului, viteza de intrare pe traiectoria eliptică la perigeu fiind $v_P = 6$ km/s.

13. Să se determine timpul T necesar ca satelitul să parcurgă elipsa de semiaxă $a = 8\,440$ km cu ajutorul legii lui Kepler.

14. Un satelit are perigeul la 130 km altitudine și durata unei rotații în jurul Pământului este de $1\frac{1}{2}$ h.

Se cere viteza satelitului la apogeu și perigeu.

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI

Scanned with OKEN Scanner

Partea I

STATICA

Capitolul I

FORȚE CONCURENTE ÎN PLAN

1 a) Inelul G (același fir : același T) :

$$\Sigma X_i = 0 \qquad T\cos\alpha - T\sin\alpha = P\,;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad T\cos\alpha + T\sin\alpha = G.$$

De unde : $P = G\,\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; $T = \dfrac{G}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

b) Aceeași figură I.1, *a* :

$$\Sigma X_i = 0 \qquad T_1\cos\alpha - T_2\sin\alpha = 0\,;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad T_1\sin\alpha + T_2\cos\alpha = G.$$

De unde : $T_1 = G\sin\alpha$; $T_2 = G\cos\alpha$

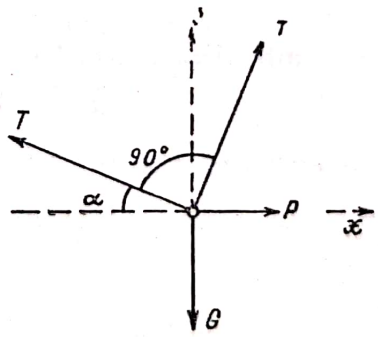


Fig. I.1, *a*

2. a) Echilibrul unui inel B (fig. I.2, *a*) :

$$\Sigma X_i = 0 \qquad T\cos\alpha - G = 0\,;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad T\sin\alpha - G = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1\,;\quad \alpha = 45°.$$

Discuție : α nu depinde de G, dar $T = G\sqrt{2}$ depinde de G. Dacă distanța $AA' < AB\sqrt{2}$ inelele se ating și există situația din figura I.2, a' :

$$T = \frac{G}{\sin \alpha} \quad \text{unde } \alpha > 45°.$$

b) Echilibrul unui inel B (fig. I.2, b) :

$$\Sigma X_i = 0 \qquad T \cos \alpha - G = 0 ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad T \sin \alpha - (G + P) = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G + P}{G} > 1 ; \quad \alpha > 45°.$$

Aci $\sphericalangle \alpha$ depinde de G și P, iar $T = \dfrac{G^2}{\sqrt{G^2 + (G + P)^2}}$.

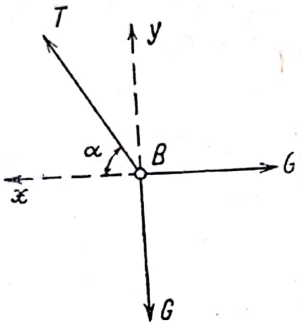


Fig. I.2, a

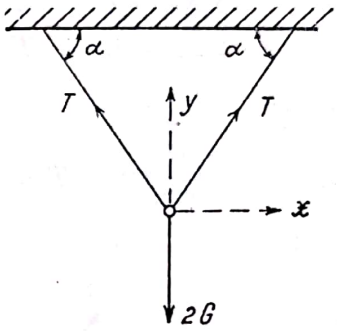


Fig. I.2, a'

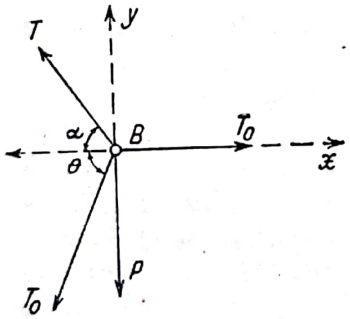


Fig. I.3, a

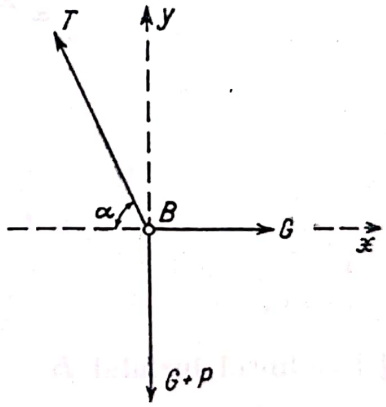


Fig. I.2, b

3. a) Tensiunea în firul punctat $T_0 = G \sin \theta$.
Echilibrul inelului B (fig. I.3, a) :

$$\Sigma X_i = 0 \qquad G \sin \theta - G \sin \theta \cos \theta - T \cos \alpha = 0 ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad T \sin \alpha - P - G \sin^2 \theta = 0,$$

de unde : $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{P + G \sin^2 \theta}{G \sin \theta (1 - \cos \theta)}$;

$$T^2 = 2G \sin^2 \theta \, (G - G \cos \theta + P) + P^2.$$

Pentru $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ și $P = 0$ avem : $\operatorname{tg} \alpha = 1$ și $T = G\sqrt{2}$ (probl. 2 a)

Scanned with OKEN Scanner

4. a) T_1 este tensiunea în firul punctat;
T — tensiunea în firul pendulelor.
Din echilibrul lui G: $T_1 = \frac{G}{2\cos\theta}$.
Din echilibrul inelului B:
$\Sigma X_i = T_1(1 - \sin\theta) - T\cos\alpha = 0$; $\Sigma Y_i = T\sin\alpha - T_1\cos\theta = 0$.
De unde:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} \text{ și } T = \frac{G}{2\sin\alpha}.$$

b) $T_1 = \frac{G}{2\cos\theta}$. Din echilibrul inelului B (fig. I.4, *b*):

$$\Sigma X_i = 0 \qquad T - T\cos\alpha - T_1\sin\theta = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad T\sin\alpha - T_1\cos\theta = 0.$$

Rezultă:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad T = \frac{G}{2\sin\alpha}; \quad T_1 = \frac{G\sqrt{2}}{2\sin\alpha}\sqrt{1 - \cos\alpha}.$$

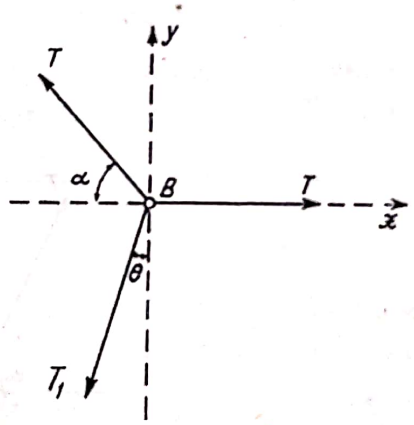


Fig. I.4, *b*

5. a) Echilibrul inelului B (fig. I.5, *a*):

$$\Sigma X_i = 0 \qquad T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad T_1\sin\alpha_1 + T_2\sin\alpha_2 - G_1 = 0.$$

Obținem: $T_1 = \frac{G_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$; $T_2 = \frac{G_1\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$

a′) Echilibrul inelului C (fig. I.5, *a*):

$$\Sigma X_i = 0 \qquad P\cos\alpha_3 - T_2\cos\alpha_2 = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad P\sin\alpha_3 - T_2\sin\alpha_2 - G_2 = 0.$$

De unde:

$$P = \frac{G_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\cos\alpha_3\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

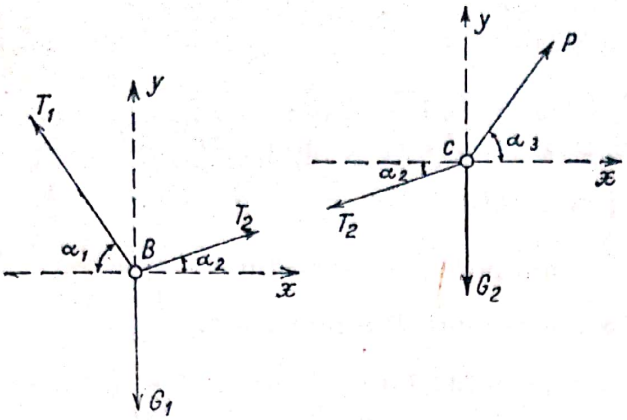


Fig. I.5, *a*

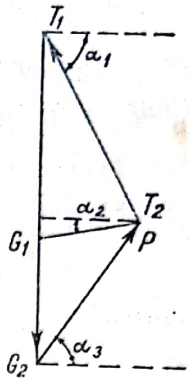


Fig. I.5, *a'*

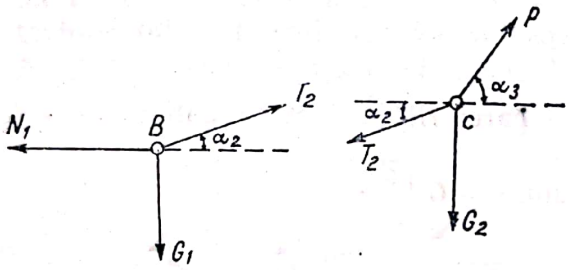


Fig. I.5, *b*

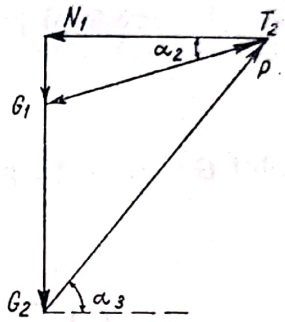


Fig. I.5, *b'*

unde α_3 este dat de:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{G_1 \cos \alpha_1 + G_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2)}{G_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}$$

Grafic. Se construieşte mai întîi triunghiul forţelor G_1, T_1, T_2 pentru echilibrul lui B. Apoi pentru echilibrul lui C se duce T_2 în sens invers, apoi G_2 şi se deduce P şi α_3 (fig. I.5, *a'*).

b) Echilibrul lui B (fig. I.5, *b*):
Rezultă:

$$T_2 = \frac{G_1}{\sin \alpha_2}.$$

Echilibrul lui C (fig. I.5, *b*):
Rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{G_1 + G_2}{G_1} \operatorname{tg} \alpha_2;$$

$$P^2 = \frac{G_1^2}{\sin^2 \alpha_2} + G_2^2 + 2 G_1 G_2.$$

Grafic (fig. I.5, *b'*). Se duce întîi $\bar{G}_1$ apoi paralele la $\bar{T}_2$ şi N. Se duce apoi $\bar{T}_2$ cu sens invers, $\bar{G}_2$ şi se închide cu $\bar{P}$.

Scanned with OKEN Scanner

6. a) Din echilibrul unei greutăţi G : $T = \frac{G}{2\cos\alpha}$;

Din echilibrul în B : $2T\cos\alpha = T_0$; $T_0 = G$.

Concluzie. T_0 nu depinde de α, iar T creşte cu cît firul în G se apropie mai mult de orizontală $\left(\alpha \text{ creşte către } \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $P = \frac{G}{2\sin\theta\cos\alpha}$ cu cît θ e mai mare, P e mai mic ;

cu cît α e mai mare P e mai mare.

c) Obţinem :

$$T_1 = \frac{G\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}\ ;\quad T_2 = \frac{G\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}\ ;\quad T_0 = \frac{2G\sin\varphi\cos\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}\ .$$

7. *Fără frecare*

Inelul P : Proiecţii pe direcţia barei AB :

$$T\cos\theta = \frac{P}{2};$$

Inelul G : Proiecţii pe direcţia barei BC :

$$T\sin\theta = G\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Deci : $\operatorname{tg}\theta = \frac{G\sqrt{3}}{P}$; $T = \frac{1}{2}\sqrt{P^2+3G^2}$.

(1) *Cu frecare* μ *la greutatea* P

Proiecţii pe AB : $\frac{P}{2} = T\cos\theta \pm \mu N_P$.

Proiecţii perpendiculare pe AB : $\frac{P\sqrt{3}}{2} + T\sin\theta = N_P$. Inelul G : $T\sin\theta = G\sin 60°$

Se obţine : $\operatorname{tg}\theta = \frac{G\sqrt{3}}{P \mp \mu\sqrt{3}(P+G)}$ iar $T = \frac{G\sqrt{3}}{2\sin\theta}$.

(2) *Cu frecare* μ *la greutatea* G

Proiecţii pe AB :

$$\frac{P}{2} = T\cos\theta\ ;$$

Proiecţii pe BC :

$$G\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mu N_G = T\sin\theta.$$

Proiecţii perpendiculare pe BC : $N_G = \frac{G}{2} + T\cos\theta$

Obţinem : $\operatorname{tg}\theta = \frac{G\sqrt{3} \pm \mu(G+P)}{P}$; $T = \frac{P}{2\cos\theta}$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Dacă θ este unghiul firului, care unește inelul cu cuiul, cu verticala avem :

a) Proiecții de tangentă : $P \sin(\theta - \alpha) + G \sin \alpha = 0$.

Aci $\theta > \alpha$ (fig. I.8, *a*) aceasta dă $P < 0$ (imposibil în cazul unui fir, posibil în cazul unei bare fără greutate proprie în locul firului).

b) $G \sin \alpha$ (proiecția lui G pe tangentă) nu e echilibrată (fig. I.8, *b*).

Caz imposibil.

c) $P = \dfrac{G \sin \alpha}{\sin(\alpha - \theta)}$ caz posibil (fig. I.8, *c*) din care se pot deduce și cazurile (a) și (b).

Discuție :

$P_{minim} = 2G \cos \dfrac{\alpha}{2}$ - cînd cuiul e situat pe cerc.

Dacă cuiul este în afara cercului : $P = \dfrac{G \sin \alpha}{\sin(\alpha - \theta)}$, θ scade, $P \to G$.

Metoda grafică

a) Se construiește triunghiul forțelor $\bar{G}, \bar{P}, \bar{N}$ unde $\bar{G}$ se cunoaște complet, iar $\bar{P}$ și $\bar{N}$ ca direcții. Se vede că $\bar{P}$ apasă pe inel (compresiune) deci trebuie înlocuit firul cu o bară.

b) $\bar{P}$ și $\bar{N}$ paralele, poligon neînchis. Imposibil.

c) Se poate deduce $\bar{P}$ și $\bar{N}$.

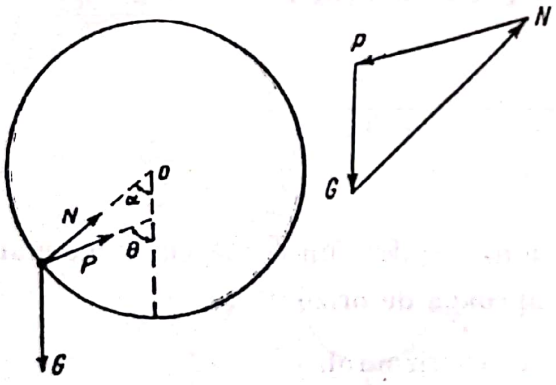


Fig. I.8, *a*

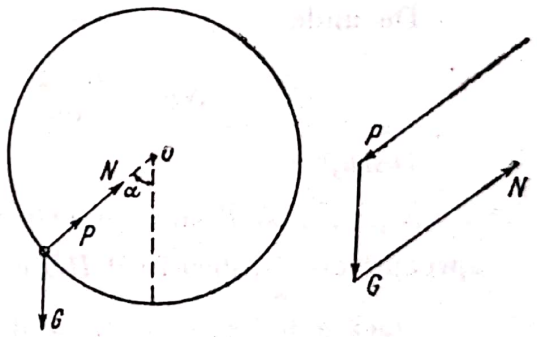


Fig. I.8, *b*

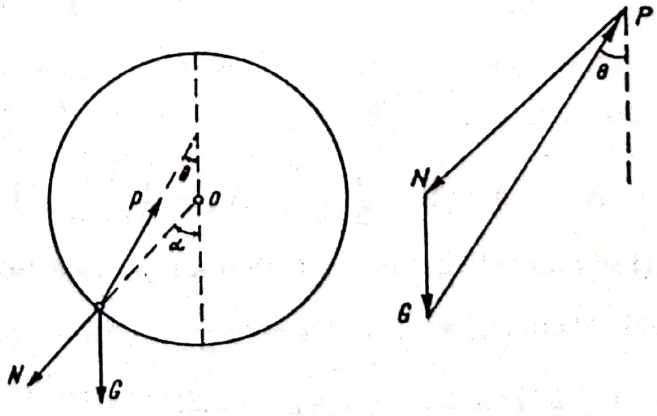


Fig. I.8, *c*

Scanned with OKEN Scanner

9. a) Echilibrul lui G dă : $T = \frac{G}{2\cos\theta}$.

Echilibrul firului în A (fig. I.9, *a*) :

$$\Sigma Y_i = 0 \text{ dă } N_A = G\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}.$$

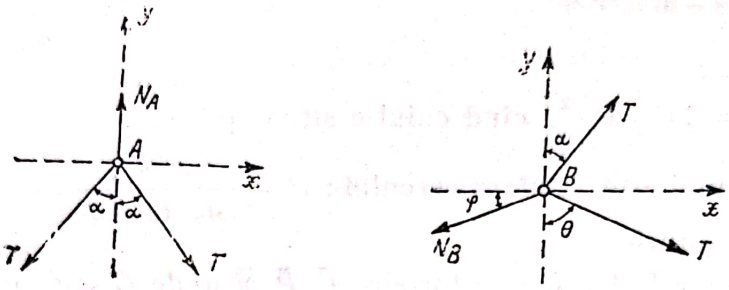


Fig. I.9, *a*

Echilibrul firului în B (fig. I.9, *a*) :

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_B\cos\varphi = T\sin\alpha + T\sin\theta;$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_B\sin\varphi = T\cos\alpha - T\cos\theta.$$

De unde

$$N_B = \frac{G\sqrt{2}}{2\cos\theta}\sqrt{1-\cos(\alpha+\theta)}.$$

Discuţii :

$\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ şi $\bar{T}$ sînt cu atît mai mari pentru un $\bar{G}$ dat cu cît θ e mai aproape de $\frac{\pi}{2}$, deci firul BB e mai aproape de orizontală.

Dacă $\alpha = \theta$; $N_A = G_1 = 0$, N_B este orizontal.

Dacă se desparte G în două părţi egale astfel încît firele BG să cadă vertical, $\theta = 0$; $T = \frac{G}{2}$; $N_A = G\cos\alpha$; $N_B = \frac{G\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\alpha}$.

b) Cuiul A : $N_A = G\sqrt{3}$;

Cuiul B : $N_B = G\sqrt{2+\sqrt{3}}$

c) $T = \frac{G}{2\cos\theta}$; $N_A = T\sqrt{2} = \frac{G\sqrt{2}}{2\cos\theta}$; $N_B = \frac{G\sqrt{2}}{2\cos\theta}\sqrt{1-\cos\theta}$.

Dacă şi aci se desparte greutatea G în două şi firele BG atîrnă verticale cu $\frac{G}{2}$ la capăt, avem : $T = \frac{G}{2}$; $N_A = \frac{G\sqrt{2}}{2}$; $N_B = 0$.

d) $T = \frac{G}{2\cos\theta}$; $N_A = T = \frac{G}{2\cos\theta}$; $N_B = \frac{G}{2\cos\theta}\sqrt{2-\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$

Scanned with OKEN Scanner

Despărțind greutatea G și firele așezîndu-se verticale, la echilibru avem :

$$T = \frac{G}{2} ; \quad N_A = \frac{G}{2} ; \quad N_B = \frac{G\sqrt{2}}{2} .$$

10. a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$; $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (fig. I.10, *a*).

Analitic (axa *Ox*, orizontală, respectiv *Oy* verticală):

Sfera

$$\Sigma X_i = 0 \qquad N_1 \sin \alpha - N_0 = 0,$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad N_1 \cos \alpha - G = 0,$$

De unde :

$$N_1 = \frac{3G\sqrt{2}}{4} ; \quad N_0 = \frac{G\sqrt{2}}{4} .$$

Emisfera

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow R_A = R_B ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow R_A = R_B = \frac{5G}{2 \cos 0} .$$

Grafic. Pentru sferă poligonul din figura I.10, *a'*. Pentru emisferă poligonul din figura I.10, *a''*.

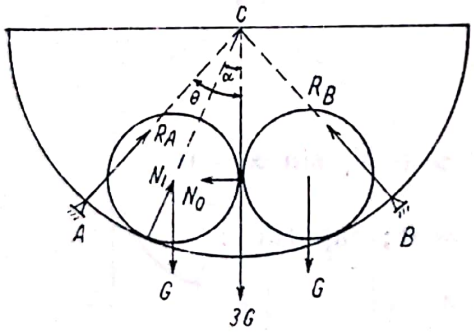


Fig. I.10, *a*

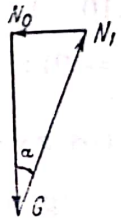


Fig. I.10, *a'*

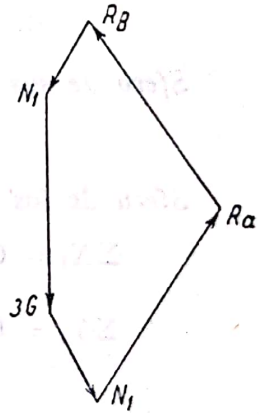


Fig. I.10, *a''*

b) Cele trei centre sînt în vîrfurile unui triunghi echilateral iar α este unghiul lui $\bar{N}_1$ cu verticala (fig. I.10, *b*).

Sfera de sus

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N = \frac{P\sqrt{3}}{3} .$$

Sfera de jos

$$\Sigma X_i = 0 \qquad N_1 \sin \alpha - \frac{P\sqrt{3}}{6} - N_0 = 0,$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad N_1 \cos \alpha - G - \frac{P}{2} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

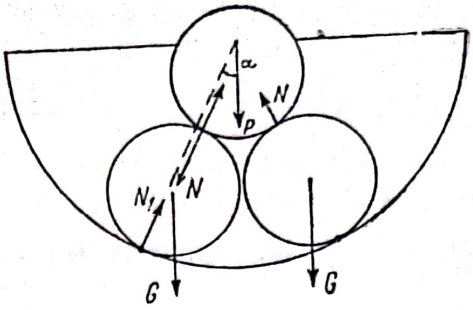


Fig. I.10, b

la despărţirea sferelor $N_0 = 0$, deci

$$P = \frac{6\,G\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{3} - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

ca $P > 0$ trebuie ca $3\,\mathrm{tg}\,\alpha < \sqrt{3}$; $\mathrm{tg}\,\alpha < \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\alpha < 30°$, în cazul figurii: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ deci problema e posibilă.

$$P = \frac{4\sqrt{6} + 6}{5} \approx 3{,}23\,G.$$

c) Se caută φ (unghiul liniei centrelor cu verticala)

$$\left(\sin\varphi = \frac{r}{r + r_1}\right)$$

Sfera de sus

$$N = \frac{G}{2\cos\varphi}$$

Sfera de jos (fig. I.10, *c*):

$$\Sigma X_i = 0 : (N_0 = 0) : -\frac{G}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi + N_1 \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0 : N_1 \cos\alpha - G - \frac{G}{2} = 0\,;\ \text{căpătăm:}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = 3\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$r_1 = \frac{r}{3\,\mathrm{tg}\,\alpha}\left(\sqrt{1 + 9\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha\right) \text{ sau în cazul}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}};\quad r_1 = \frac{r}{3}\left(\sqrt{17} - 3\right).$$

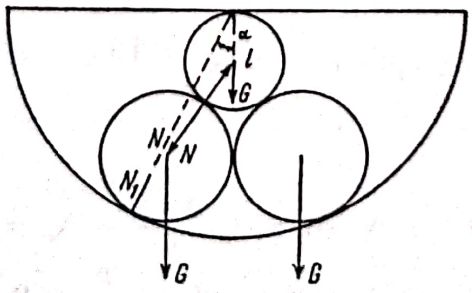


Fig. I.10, *c*

11. a) Din triunghiul format de centre se vede că reacțiunile la cilindrul de sus fac $\sphericalangle \alpha$ cu verticala dat de $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Cilindrul de sus (fig. I.11, *a*)

$$\Sigma Y_i = 0;\ 2N \cos \alpha - 2T - 2G = 0.$$

Cilindrul de jos (fig. I.11, *a*)

$$\Sigma X_i = 0;\ T - N \sin \alpha - N_A = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0;\ T - N \cos \alpha - G + N_0 = 0.$$

Deci :

$$T = \frac{G}{2\sqrt{2}-1};\ N = \frac{3G}{2\sqrt{2}-1};\ N_0 = 2G.$$

b) Din echilibrul unui cilindru mic (fig. I.11, *b*)

$$\Sigma X_i = 0;\ T = N \sin \alpha = \frac{N}{3};$$

$$\Sigma Y_i = 0;\ -T - G + N \cos \alpha = 0.$$

Obținem :

$$T = \frac{G}{2\sqrt{2}-1};\ N = \frac{3G}{2\sqrt{2}-1}.$$

Din echilibrul unui cilindru mare deducem $N_0 = 4G$.

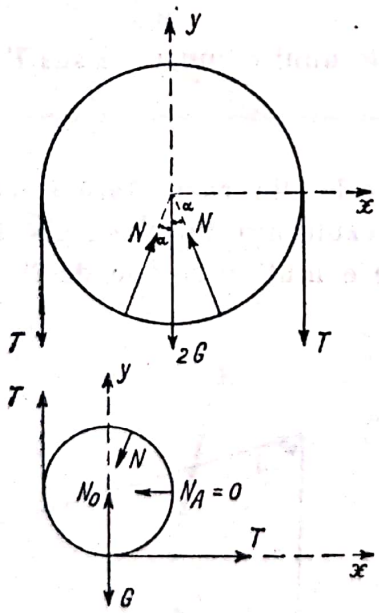


Fig. I.11, *a*

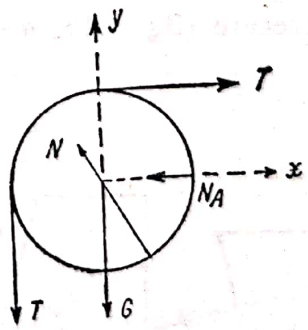


Fig. I.11, *b*

12. a) *Cilindrul de sus* (fig. I.12, *a*, stînga)

$$\Sigma Y_i = 0;\ -2T\frac{\sqrt{3}}{2} - G + 2N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

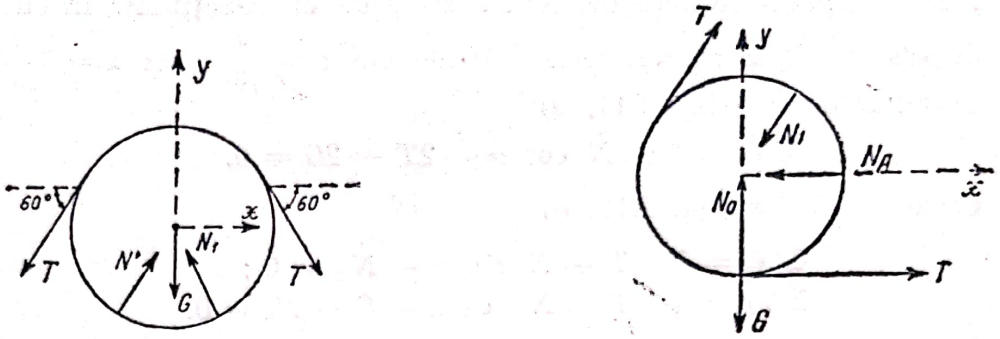


Fig. I.12, *a*

Cilindrul de jos (fig. I.12 *a*, dreapta ($N_A = 0$)

$$\Sigma X_i = 0;\ -N_1 \frac{1}{2} + T + \frac{T}{2} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0;\ N_0 - G - N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + T \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

de unde

$$T = \frac{G\sqrt{3}}{6};\ N_0 = \frac{3G}{2};\ N_1 = \frac{G\sqrt{3}}{2}.$$

b) Se găseşte din ecuaţiile de proiecţii ale unui cilindru de sus $T = \frac{G\sqrt{3}}{3}$; iar de la cilindrul de jos $N_0 = 3G$.

13. *Corpul A*. Forţele din linii pline sînt cele din cazul fără frecare, cele punctate în cazul cu frecare. $\bar{S}$ este rezultanta lui $\bar{N}$ cu $\mu\bar{N}$ înclinată cu $\sphericalangle\varphi$ faţă de $\bar{N}$. $\bar{F}$ în cazul cu frecare e mult mai mic decît în cazul fără frecare (fig. I.13, *a*—*d*).

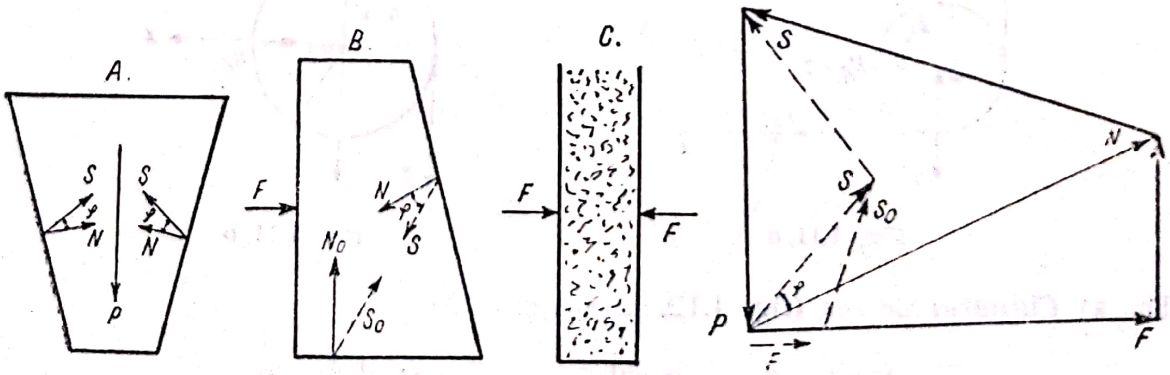


Fig. I.13, *a* Fig. I.13, *b* Fig. I.13, *c* Fig. I.13, *d*

14. a) **Grafic** (fig. I.14, *a*). *Poligonul forțelor pentru G* (fig. I.14, *a'*) (necunoscute $\bar{N}_1$, $\bar{T}$).
Găsim

$$T = \frac{G}{2}\ ,\quad N_1 = G\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Poligonul forțelor pentru $2\bar{G}$ (fig. I.14, *a''*) (cunoscute $2\bar{G}$ și $\bar{T}$).
Forța $\bar{S}_2$ care închide triunghiul cu $2\bar{G}$ și $\bar{T}$ este rezultanta lui $\bar{N}_2$ cu $\mu\bar{N}_2$ și face un unghi φ ($\operatorname{tg}\varphi = \mu$) cu $\bar{N}_2$ care e perpendicular pe $\bar{T}$.
Proiectînd pe direcția lui $2\bar{G}$ găsim

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ .$$

Analitic. Din echilibrul corpului *G* (proiecții pe tangentă) : $T = \frac{G}{2}$.

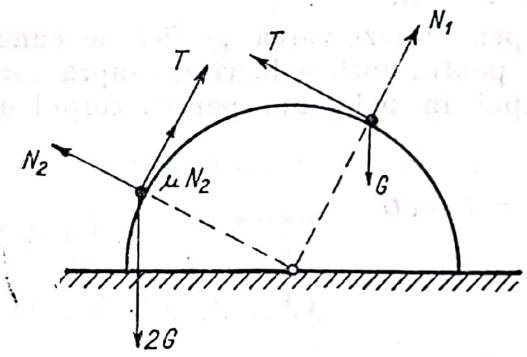


Fig. I.14, *a*

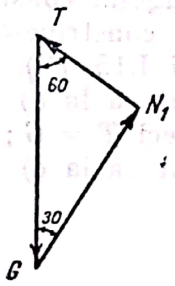


Fig. I.14, *a'*

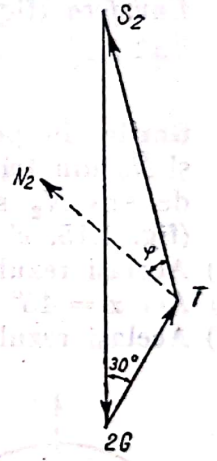


Fig. I.14, *a''*

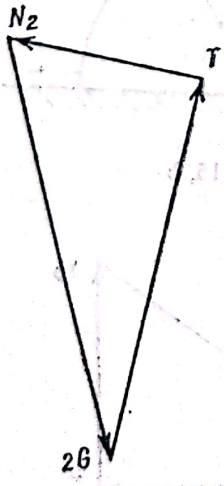


Fig. I.14, *b'*

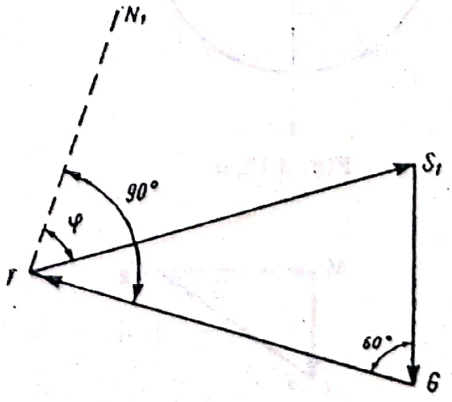


Fig I.14, *b''*

Din echilibrul corpului 2 G (proiecții pe tangentă):

$$T = 2G\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu N_2 \text{ și } N_2 = G;$$

deci $\mu = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \approx 1{,}2.$

b) **Grafic.** Se construiește mai întîi poligonul pentru $2\bar{G}$ (fig. I.14, b'). Se determină $\bar{T}$ care ca mărime se construiește la poligonul pentru $\bar{G}$ (fig. I.14, b'').

Analitic, se găsește $T = G\sqrt{3}$; $\mu = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

15. a) Sfera (fig. I.15, a)

$$\Sigma X_i = 0; \quad N_2 \sin\alpha - N_1 = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_2 \cos\alpha - G = 0.$$

de unde

$$N_2 = \frac{G}{\cos\alpha}; \quad N_1 = G \operatorname{tg}\alpha.$$

Emisfera (fig. I.15, b)

$$\Sigma X_i = 0; \quad T = N_2 \sin\alpha = G \operatorname{tg}\alpha;$$
$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_0 = P + G.$$

Grafic. În poligonul forțelor pentru rezolvarea grafică se cunosc $\bar{P}$ și $\bar{N}_2$ din triunghiul construit pentru forțele lucrînd asupra corpului de sus $\bar{N}_2$ se construiește apoi în poligonul pentru corpul de jos (fig. I.15, c' și I.15, c'').

b) Același rezultat ca la a)

c) Aci $\alpha = 45°$ deci $T = G$; $N_0 = P + G$

d) Același rezultat ca la c)

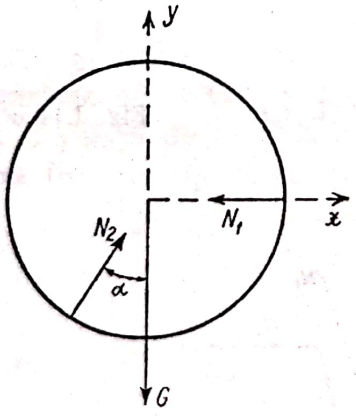


Fig. I.15, a

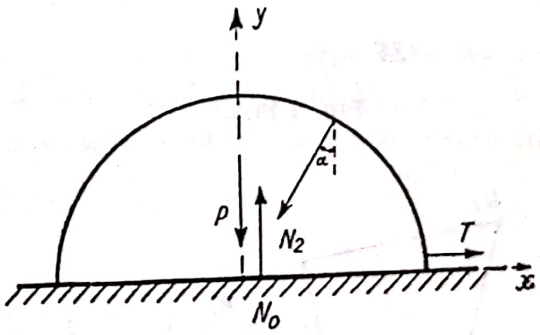


Fig. I.15, b

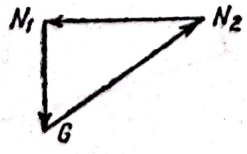


Fig. I.15, c'

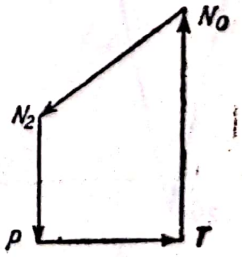


Fig. I.15, c''

Scanned with OKEN Scanner

16. a) *Corpul G* (fig. I.16, *a*)
Din proiecții paralele cu planul $F = G \operatorname{tg} \alpha$
Corpul P (fig. I.16, *a'*)

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow F = \mu_p N_p ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_P = P$$

deci

$$P = \frac{G}{\mu_P} \operatorname{tg} \alpha.$$

b) În figura de la corpul P nu mai există $\mu_P N_p$ deci F nu mai e echilibrat decît dacă $F = 0$ adică
$G \sin \alpha \leqslant \mu_G G \cos \alpha$; $\mu_G \geqslant \operatorname{tg} \alpha_G$.

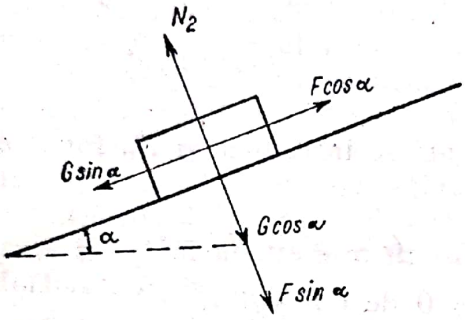


Fig. I.16, *a*

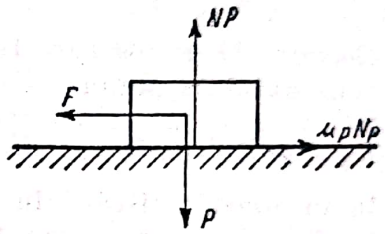


Fig. I.16, *a'*

17. *Corpul G* (fig. I.17, *a*) analog ca la problema 16.

Găsim $F = G \dfrac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$

Corpul P (fig. I.17, *a'*).

$$P = \frac{G}{\mu_P} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} .$$

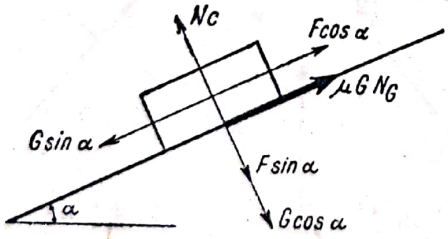


Fig. I.17, *a*

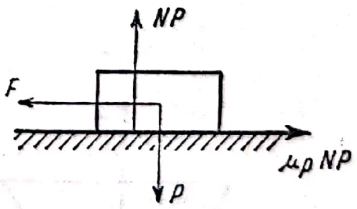


Fig. I.17, *a'*

18. a) *Corpul (1)* de sus (fig. I.18, *a*)

$$\Sigma Y_i = 0 ; \; 2N \cos 60^\circ = G \Rightarrow N = G$$
$$[\Sigma X_i = 0 \text{ dă } N = N \text{ (simetrie)}]$$

Grafic. Din triunghiul forțelor $N = G$.

Scanned with OKEN Scanner

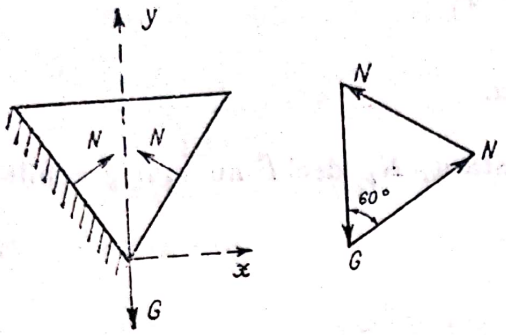


Fig. I.18, *a*

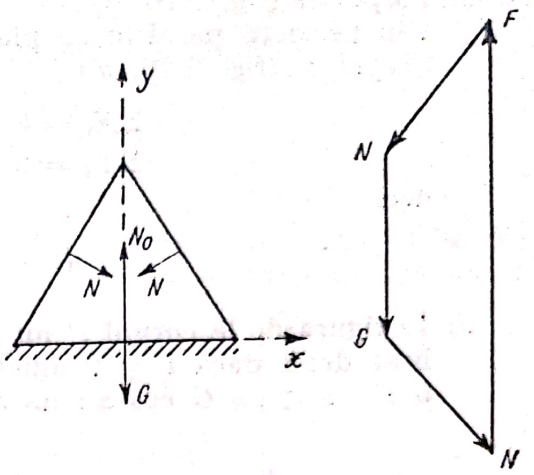


Fig. I.18, *a'*

Corpul (2) de jos (fig. I.18, *a'*) (aci se introduce şi N_0 forţa de reazem dată de planul orizontal)

$$\Sigma Y_i = 0\,; \quad -2N\cos 60^\circ - G + F + N_0 = 0$$

la începutul mişcării în sus $N_0 = 0$ deci $F = 2G$.

Grafic ($\bar{N}$ cunoscut din triunghiul de forţe pentru corpul *1*).

b) Presupunem acelaşi μ între corpuri şi între corp şi planul înclinat.

Corpul (1) din dreapta (fig. I.18, *b*)

$$\Sigma X_i = 0\,; \quad \frac{N\sqrt{3}}{2} - \mu\frac{N}{3} - N'\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu N'}{2} = 0\,;$$

$$\Sigma Y_i = 0\,; \quad \frac{N}{2} + \frac{N'}{2} + \mu\frac{N\sqrt{3}}{2} - \mu N'\frac{\sqrt{3}}{2} = G.$$

Corpul (2) (fig. I.18, *b'*)

$$\Sigma Y_i = 0\,; \quad F - 2\frac{N}{2} - 2\mu N\frac{\sqrt{3}}{2} - G = 0.$$

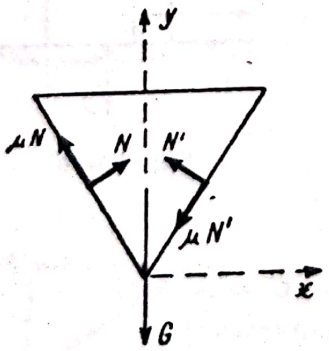


Fig. I.18, *b*

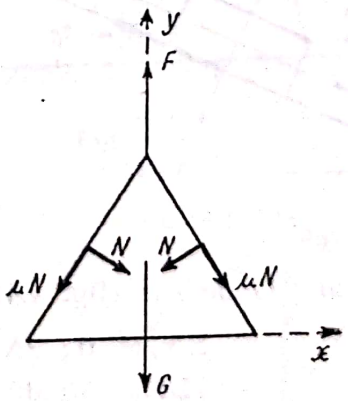


Fig. I.18, *b'*

Căpătăm :

$$N = \frac{G\,(\sqrt{3}+\mu)}{\sqrt{3}\,(1+\mu^2)};\quad N' = \frac{G\,(\sqrt{3}-\mu)}{3\,(1+\mu^2)};$$

$$F = \frac{G\,(\sqrt{3}+\mu)\,(1+\mu\sqrt{3})}{\sqrt{3}\,(1+\mu^2)} + G,$$

care pentru $\mu = 0$ dă valorile de la a).

Observație. Se constată că corpurile (*1*) au tendință de răsturnare din cauza forțelor de frecare, de aceea $\bar{N}'$ se va deplasa în sus pe plan. Se poate calcula poziția sa prin momente ale forțelor în raport cu O (mijlocul bazei orizontale).

Grafic. Asupra corpurilor lucrează :

Corpul 1 (fig. I.18, *b''*) $\bar{G}$; $\bar{S}$ (rezultanta lui $\mu\bar{N}$ cu $\bar{N}$ care face $\sphericalangle\varphi$ cu $\bar{N}$ unde $\operatorname{tg}\varphi = \mu$) și $\bar{S}'$ (rezultanta lui $\mu\bar{N}'$ cu $\bar{N}'$ care face același $\sphericalangle\varphi$ cu $\bar{N}'$). Din triunghiul lui $\bar{G}$, $\bar{S}$, $\bar{S}'$ deducem $\bar{S}$.

Corpul 2 (fig. I.18, *b'''*). Fie $\bar{F}_0$ forța necesară în cazul fără frecare și $\bar{F}_1$ forța necesară în cazul cu frecare. Se obține din poligonul forțelor, $F_1 > F_0$.

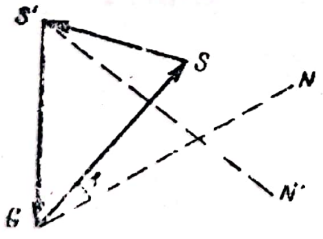


Fig. I.18, *b''*

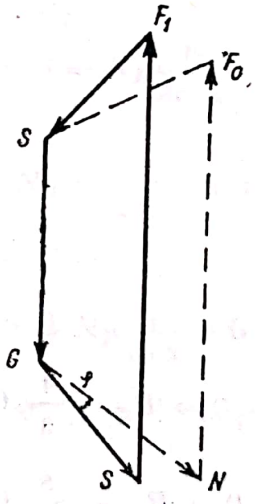


Fig. I.18, *b'''*

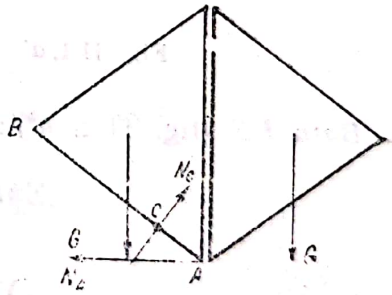


Fig. I.19

19. La limită, reacțiunile $\bar{N}_A$ între prisme sînt în A (fig. I.19). Cele trei forțe $\bar{G}$, $\bar{N}_A$ și $\bar{N}_c$ trebuie să fie concurente, iar $\bar{N}_c$ este perpendicular pe latura AB ; se determină deci $AC = \frac{h}{3}\sin\alpha$ unde $h = l\sin\alpha$ este înălțimea triunghiului deci $AC = \frac{l}{3}\sin^2\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

FORȚE OARECARE ÎN PLAN

1. Metoda analitică. $\Sigma M_A = 0$: $Fx = G\left(x - \frac{l}{2}\right)$; $F = G\left(1 - \frac{l}{2x}\right)$ dacă $x = \frac{l}{2}$, ($\bar{N}_A$ pe același suport cu $\bar{G}$), $F = 0$. În acel caz reazemul A dă o reacțiune care echilibrează pe $\bar{G}$. Dacă $x < \frac{l}{2}$, $\bar{F}$ va lucra în jos.

Metoda grafică. Forțele necunoscute sînt desenate punctat. Se duce $\bar{G}$ în poligonul forțelor (fig. II.1, a''). Se iau polul O și razele I și III. Se duce paralelă la I în fig. II.1, a' prin O_1 luat arbitrar, care taie verticala lui $\bar{G}$ în O_2 prin care se duce paralelă la III; se capătă O_3. Paralela la O_1O_3 prin O dă $\bar{F}$ și $\bar{N}_A$.

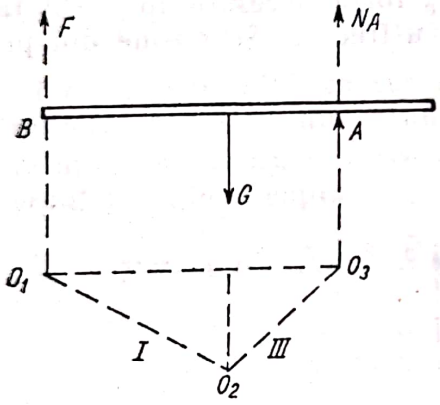


Fig. II.1, a'

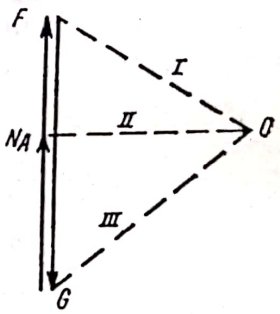


Fig. II.1, a''

2. *Bara EF* (fig. II.2, a') :

$$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow R_F = \frac{4}{3}\,G\,;$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow R_E = \frac{5}{3}\,G.$$

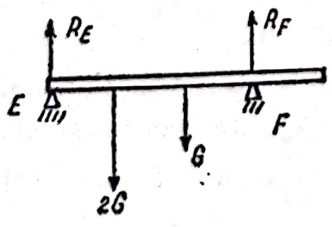


Fig. II.2, a'

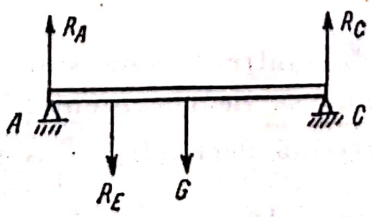


Fig. II.2, a''

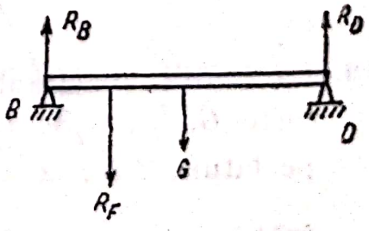


Fig. II.2, a'''

Scanned with OKEN Scanner

Bara AC (fig. II.2, *a''*):

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_c = \frac{11}{12} G;$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow R_A = \frac{21}{12} G.$$

Bara BD (fig. II.2, *a'''*):

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_D = \frac{5G}{6};$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3}{2} G.$$

3. *Bara AB*. În momentul răsturnării $R_A = 0$, deci:

$$\Sigma M_C = 0; \quad N_B \frac{l}{8} = G3 \frac{l}{8}; \quad N_B = 3G \text{ (forță verticală în jos).}$$

Bara DE. Pentru a avea $N_B = 3G$ (forță verticală în sus la această bară) trebuie ca $F = 2G$, deci dacă $DB = x$

$$\Sigma M_B = 0; \quad 2Gx - G\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0 \text{ de unde } x = \frac{l}{6}.$$

4. Luînd momente în raport cu A se găsește $x = \frac{17 - 8 \sin \alpha}{16 (2 \sin \alpha + 1)}$;

$$T = \frac{3G}{1 + 2 \sin \alpha}$$

5. a) *Bara AC* (fig. II.5, *a'*):

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_B \frac{h_1}{\sin \alpha} = P \frac{a}{2} \cos \alpha$$

de unde

$$N_B = \frac{Pa}{2h_1} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Bara AE (fig. II.5, *a''*):

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_D \frac{h_2}{\sin \theta} = G \frac{l}{2} \cos \theta \text{ deci}$$

$$N_D = G \frac{l}{2h_2} \cos \theta \sin \theta.$$

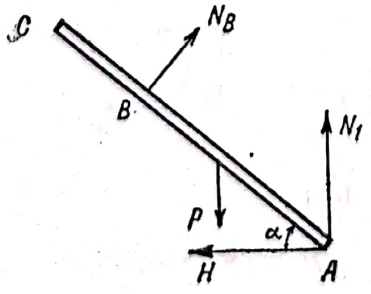


Fig. II.5, *a'*

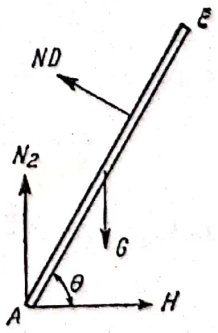


Fig. II.5, *a''*

Sistemul solidificat : $\Sigma X_i = 0$; $N_D \sin \theta = N_B \sin \alpha$

$$\frac{Pa}{2\,h_1} \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{G\,l}{2\,h_2} \sin^2 \theta \cos \theta. \qquad (1)$$

Proiectînd BA și AD pe orizontală :

$$\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{h_2}{\operatorname{tg} \theta} = L. \qquad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) se deduc $\hat{\alpha}$ și $\hat{\theta}$.

Observație. La bara AC, din $\Sigma X_i = 0$ se obține H
iar din $\Sigma Y_i = 0$ se obține N_1.
La bara AE, din $\Sigma X_i = 0$ se obține H
iar din $\Sigma Y_i = 0$ se obține N_2

se vede că nu este nevoie de aceste necunoscute pentru rezolvarea problemei.

b) *Bara* AC (fig. II.5, b')

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_C = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Bara AE (fig. II.5, b'')

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_D = \frac{G\,l}{2\,h} \sin \theta \cos \theta.$$

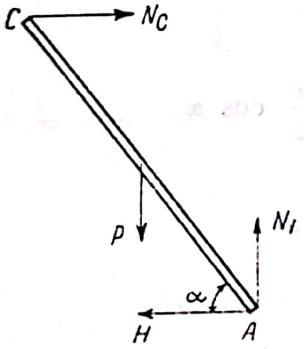


Fig. II.5, b'

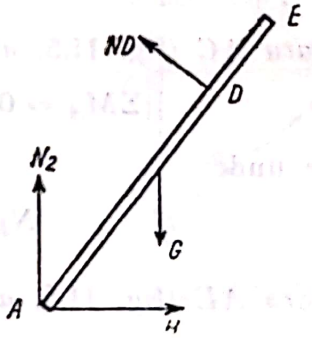


Fig. II.5, b''

Sistemul solidificat : $N_C = N_D \sin \theta$

sau $$\frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{G\,l}{2\,h} \sin^2 \theta \cos \theta ; \qquad (1)$$

iar proiecțiile barelor pe orizontală

$$a \cos \alpha + \frac{h}{\operatorname{tg} \theta} = L. \qquad (2)$$

c) Analog $N_C = \dfrac{P \cos \theta}{2 \sin \theta} = N_D = \dfrac{G \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$ deci

$$G \operatorname{ctg} \alpha = P \operatorname{ctg} \theta ; \qquad (1)$$
$$a \cos \alpha + l \cos \theta = L. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

6. a) *Bara* AB (fig. II.6, a'):

$$\Sigma M_B = 0; \quad -N_E \frac{3l}{4} + G\frac{l}{4} = 0 \Rightarrow N_E = \frac{G}{3}.$$

Bara CD (fig. II.6, a''):

$$\Sigma M_C = 0; \quad N_D \frac{l}{2} \sin\theta - G\frac{l}{4}\cos\theta = 0 \Rightarrow N_D = \frac{G}{2}\operatorname{ctg}\theta.$$

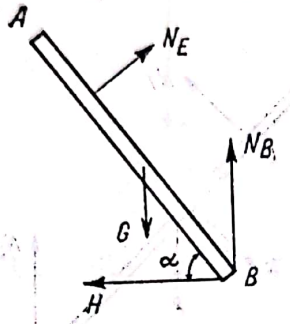


Fig. II.6, a'

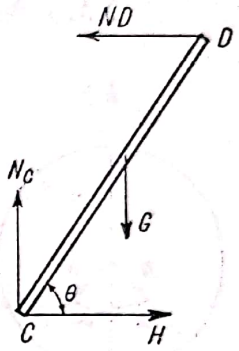


Fig. II.6, a''

Sistem solidificat:

$$N_D = N_E \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci } \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}; \quad \theta = 60°.$$

Proiecții pe Ox:

$$l = \frac{3l}{4}\cos 60° + x + \frac{l}{2}\cos 60°; \quad x = \frac{3l}{8}.$$

b) Figura II.6, b' prezintă echilibrul barei AB, iar figura II.6, b'' echilibrul barei CD.

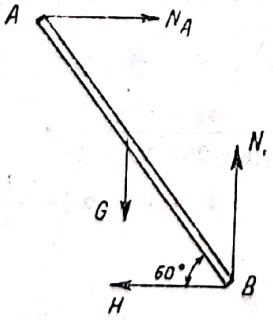


Fig. II.6, b'

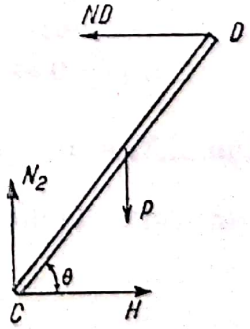


Fig. II.6, b''

Din solidificare $N_A = N_D$.

Din ΣM_B la bara AB: $N_A = \frac{G\sqrt{3}}{6}$;

Scanned with OKEN Scanner

Din ΣM_C la bara CD: $N_D = \frac{G}{2 \operatorname{tg} \theta}$;

se obține: $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$; $\theta = 60°$; $x = \frac{3l}{8}$.

7. a') *Sfera* (fig. II.7, a'):

$$\Sigma Y_i = 0 : 2N \cos \alpha - G = 0 \Rightarrow N = \frac{G}{2 \cos \alpha}.$$

Bara din stînga (fig. II.7, a''):

$$\Sigma M_A = 0 : -N_1 \frac{l}{2 \cos \alpha} + P \frac{l}{2} \cos \alpha + NR \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

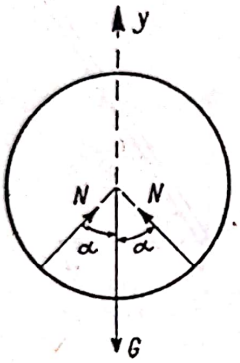


Fig. II.7, a'

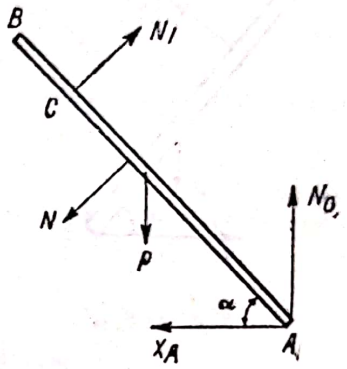


Fig. II.7, a''

De unde $N_1 = P \cos^2 \alpha + \frac{G}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

(a'') $\Sigma X_i = 0$ (la despărțire $X_A = 0$):

$$N_1 \sin \alpha - N \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = N$$

$$G = \frac{4P \cos^3 \alpha}{2 + \sin \alpha}.$$

b) Pentru sferă găsim aceeași relație $N = \frac{G}{2 \cos \alpha}$.

Bara

$$DA = \frac{l}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{G}{8 \cos^2 \alpha} \sin \alpha + \frac{P}{2} \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0.$$

Din $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_1 = N \sin \alpha$ deci $G = \frac{4P \cos^3 \alpha}{\sin \alpha (2 \sin 2\alpha - 1)}$.

Observație. Trebuie pentru $G > 0$: $4 \cos^2 \alpha > 1 \Rightarrow \cos \alpha > \frac{1}{2}$; $\alpha < 60°$

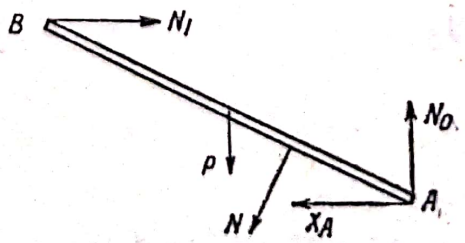


Fig. II.7, b

8. Echilibrul lui P (fig. II.8): $2T\cos 60° = P \Rightarrow T = P$.
Echilibrul barei $\Sigma M_A = 0$: $G\frac{l}{4} - T\frac{l}{2} = 0$; $T = \frac{G}{2} = P$.

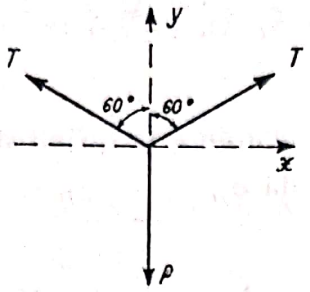


Fig. II.8

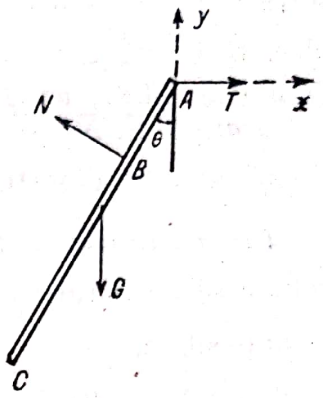


Fig. II.9

9. a) Una din bare (fig. II.9): $\Sigma Y_i = 0$: $N = \frac{G}{\sin\theta}$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N\frac{l}{4\sin\theta} - G\frac{l}{2}\sin\theta = 0.$$

deci $\sin^3\theta = \frac{1}{2}$; $\theta \approx 53°$.

b) $T = P$ Din solidificare $\Sigma Y_i = 0$; $N\frac{\sqrt{3}}{2} = G + \frac{P}{2}$.

Din $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Nx = G\frac{l\sqrt{3}}{4}$, din $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \frac{N}{2} = T\frac{\sqrt{3}}{2}$ deci:

$P = G$; $N = G\sqrt{3}$; $x = \frac{l}{4}$. Grafic se vede că $\bar{G}, \bar{N}, \bar{T}$ sînt concurente numai dacă unghiul firului cu bara este mai mare de 90°.

10. Studiem grafic posibilităţile de echilibru.
a) Poziţia din figura din enunţ este posibilă: $G = N$; $T = 0$ frecarea nu lucrează.
(a') $\bar{S}$ (rezultanta lui $\bar{N}$ reacţiunea din B cu $\mu\bar{N}$) trebuie să fie concurentă cu $\bar{G}$ şi $\bar{T}$. Poligonul forţelor dă $\bar{T}$ compresiune, deci problema e imposibilă cînd AA este un fir (fig. II.10, a').

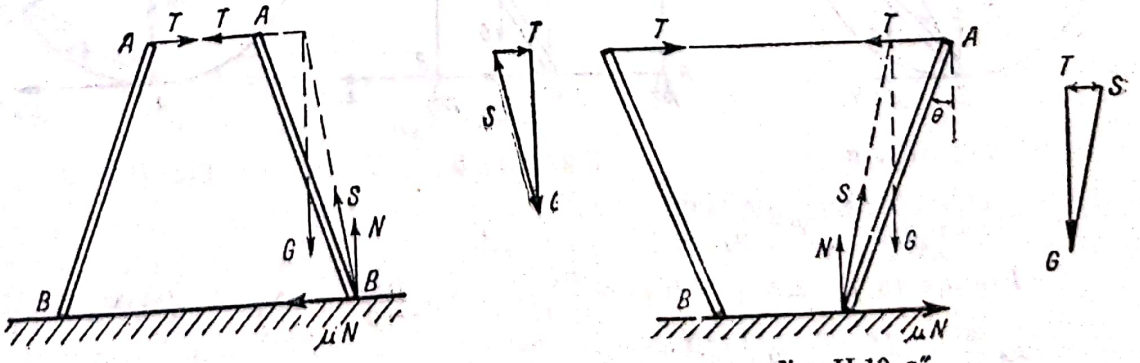


Fig. II.10, a'

Fig. II.10, a''

(a'') Aci poligonul forțelor dă $\bar{T}$ tracțiune deci problema e posibilă (fig. II.10, *a''*):

$\Sigma M_B = 0 : G\frac{l}{2}\sin\theta - T\,l\cos\theta = 0 \Rightarrow T = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\theta = \mu N$, iar $N = G$ deci $\operatorname{tg}\theta = 2\mu$.

11. a) *Bara* (fig. II.11, *a*). *Frecare numai în C.*

Grafic: $\bar{G}$, $\bar{N}_D$ și $\bar{S}_C$ (rezultanta lui $\bar{N}_C$ cu $\mu_C\bar{N}_C$) trebuie să fie concurente. Se găsește $\operatorname{tg}\varphi_c = \mu_c = \frac{1}{2}$.

Frecare numai în D: $\bar{G}$ și $\bar{N}_C$ sînt concurente la infinit deci și $\bar{S}_D$ trebuie să fie paralel cu $\bar{G}$ și $\bar{N}_C$ ceea ce dă $\varphi_D = \frac{\pi}{2}$, $\mu_D = \infty$, soluție imposibilă.

Analitic $\Sigma M_c = 0 ; G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_D\frac{l\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_D = \frac{G}{2} = \mu_c N_c ;\quad N_c = G ;\quad \mu_c = \frac{1}{2}$. *Frecare în D:* N_D nu e echilibrat;

$\Sigma X_i = 0$ nu e satisfăcută, caz imposibil.

b) *Bara* (fig. II.11, *b*). Din $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_c = G$; din $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu_c N_c = N_D$; iar din $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow N_D = \frac{G}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; deci $\mu_c = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Analog ca la (a) $\mu_D = \infty$, deci soluție imposibilă.

Reacțiunile. Din sistemul solidificat: $\Sigma M_A = 0$ găsim $R_B = \frac{5G}{4}$; $R_A = \frac{3G}{4}$.

c) Bara AB (fig. II.11, *c*): *Frecare în B,* $\bar{N}_A$ și $\bar{G}$ sînt concurente la infinit deci și $\bar{S}_B$ (rezultanta lui $\bar{N}_B$ cu $\mu_B\bar{N}_B$) trebuie să fie verticală.

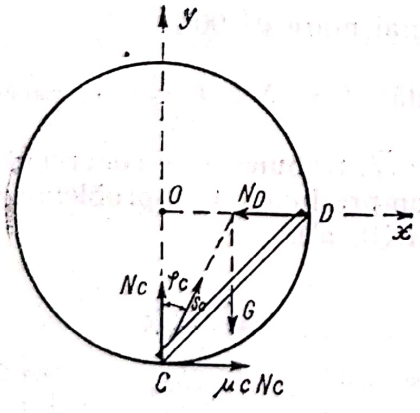


Fig. II.11, *a*

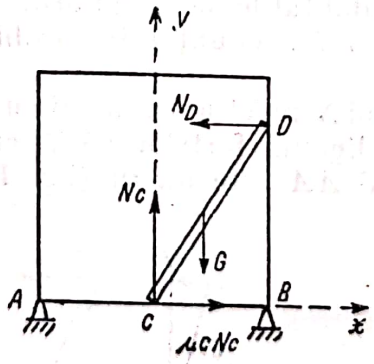


Fig. II.11, *b*

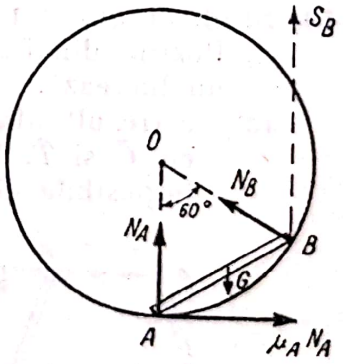


Fig. II.11, *c*

Deci: $\varphi_B = 60°$; $\mu_B = \operatorname{tg}\varphi_B = \sqrt{3}$.

Frecare în A. $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow G\frac{R\sqrt{3}}{4} = N_B\frac{R\sqrt{3}}{2}$; $N_B = \frac{G}{2}$; $N_A = \frac{3G}{4}$; $\mu_A\frac{3G}{4} = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $\mu_A = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Grafic se vede că $\bar{N}_B$ și $\bar{G}$ se intersectează la $\frac{OB}{2}$; deci $\bar{S}_A$ (rezultanta lui $\bar{N}_A$ cu $\mu_A\bar{N}_A$) este înălțimea triunghiului OAB, face deci 30° cu $\bar{N}_A$; $\varphi_A = 30°$; $\mu_A = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. *Bara* AB. $\Sigma M_A = 0 : N_B \frac{2l}{\sqrt{3}} - G\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_B = \frac{G\sqrt{3}}{4}$;

$$\Sigma Y_i = 0 : N_A = G - \frac{G\sqrt{3}}{8};$$

$$\Sigma X_i = 0 : \mu_A N_A = N_B \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu_A = \frac{3}{8-\sqrt{3}}.$$

Bara CD. $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow N_c = \frac{G\sqrt{3}}{8}$;

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_D = \frac{G}{4};$$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu_D = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Notăm cu N_0 reacțiunea solului asupra cubului, iar N_B și N_c au sensuri inverse decît la bare.

Cubul. $\mu_c N_0 = \frac{G}{8}(3 - \sqrt{3})$

$$N_0 = 2\ G + \frac{\sqrt{3}\ G}{8} = \frac{G}{8}(16 + \sqrt{3}) \Rightarrow \mu_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{16+\sqrt{3}}.$$

13. a) Oricare ar fi α, $T = N_B = \frac{G}{2}$ deci $P = T = \frac{G}{2}$ nu depinde de α în cazul fără frecare (fig. II.13, *a*).

b) *Frecare în B.* (μ_B dat).

(b′) *B tinde să lunece spre dreapta*

$\mu_B N_B$ este spre stînga, T se înclină cu θ (fig. II.13, *b′*).

$$\Sigma M_A = 0 : N_B\ l\ \cos\alpha - \mu_B N_B\ l\ \sin\alpha - G\frac{l}{2}\cos\alpha = 0$$

$$(1)\quad N_B = \frac{G}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_B \sin\alpha}$$

$$\Sigma X_i = 0 :\ T\ \sin\theta - \mu_B N_B = 0$$
$$Y_i = 0 :\ T\ \cos\theta - G + N_B = 0$$

de unde $P = T = \sqrt{G^2 + (1+\mu_B^2)N_B^2 - 2\,G\,N_B}$ unde N_B e dat de (1)

(b″) *B tinde să lunece spre stînga* (fig. II.13, *b″*). Analog $\Sigma M_A = 0$ dă ca rezultat:

$N'_B = \frac{G}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_B \sin\alpha}$. Celelalte calcule, analog cu (b′).

Scanned with OKEN Scanner

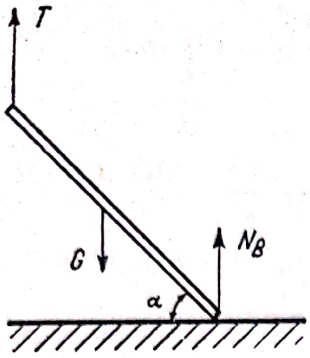


Fig. II.13, *a*

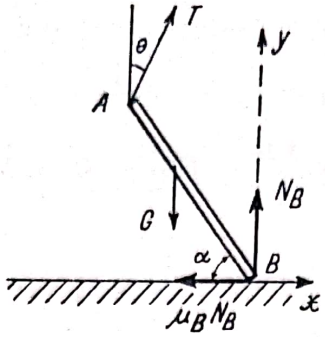


Fig. II.13, *b'*

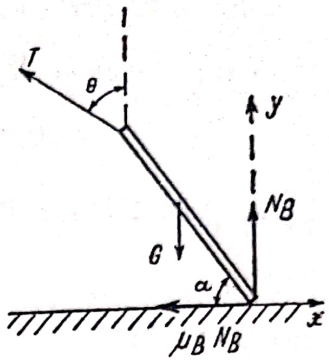


Fig. II.13, *b''*

Găsim $\sqrt{G^2+(1+\mu_B^2)N_B'^2-2G\,N_B'} \leqslant P \leqslant \sqrt{G^2+(1+\mu_B^2)N_B^2-2G\,N_B}$ pentru $\mu_B = 0$ există o singură valoare $P = \frac{G}{2}$.

14. Sistemul solidificat. Din $\Sigma M_D = 0$ avem $R_E = 6{,}4\ G$; $R_D = 9{,}6\ G$.

a) Se desprinde inelul B (fig. II.14, *a*) $\Sigma M_A = 0 : 4G\ 2l \sin\alpha - 2\,Gl \cos\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$; $R_A = 6\,G$; $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow R_D = 9{,}8\,G$; $R_E = 6{,}2\,G$.

b) Se desprinde inelul A (fig. II.14, *b*) $\Sigma M_B = 0 : 2Gl \cos\alpha - 4G(2l \sin\alpha - 2l \cos\alpha) = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$; $R_B = 6G$; $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow R_D = 8{,}6\ G$, $R_E = 7{,}4\ G$.

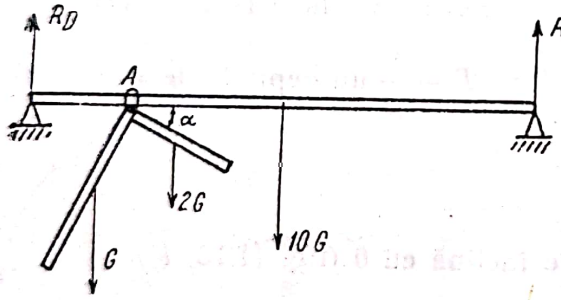


Fig. II.14, *a*

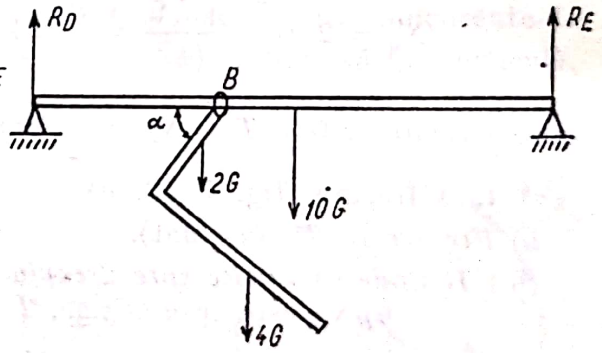


Fig. II.14, *b*

15. a) *Frecare numai la A*

$\Sigma X_i = 0 : 6G \sin\theta = \mu_A N_A$;

$\Sigma Y_i = 0 : 6G \cos\theta = N_A + N_B$;

$\Sigma M_B = 0 : N_A = G(5 \cos\theta - 4 \sin\theta)$.

$$\mu_A = \frac{6 \operatorname{tg}\theta}{5 - 4 \operatorname{tg}\theta}. \qquad (1)$$

Se desprinde inelul B. La A trebuie $\mu_A' = \operatorname{tg}\theta < \mu_A$ (fig. II.15).

Scanned with OKEN Scanner

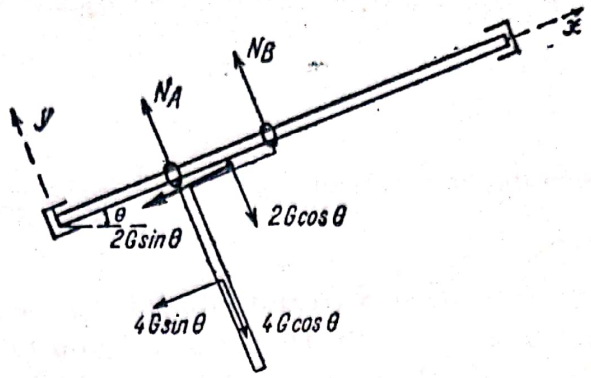


Fig. II.15

b) *Frecare numai la B.* Analog găsim $\mu_B = \frac{6\operatorname{tg}\theta}{1+4\operatorname{tg}\theta}$ iar la ruperea inelului A : $\mu'_B = \operatorname{tg}\theta$.

Observație. Se vede din (1) că $\operatorname{tg}\theta < \frac{5}{4}$ pentru $\mu_A > 0$, pentru aceste valori $\mu_A > \mu'_A$. Analog pentru μ_B.

16. *Punctul material.* Se deduce $\operatorname{tg}\alpha = \mu$; $N = G\cos\alpha$, ca la un punct pe un plan înclinat.

Emisfera (fig. II.16). Luînd $\Sigma M_0 = 0 : Nx = G\frac{3R}{8}\sin\alpha$; $x = \frac{3R}{8}\mu$.

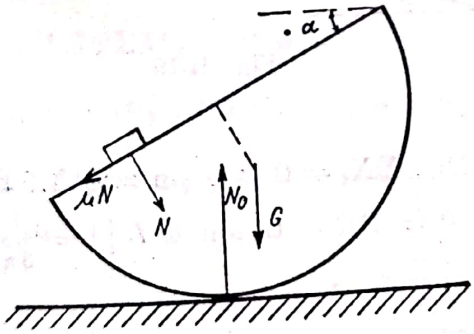


Fig. II.16

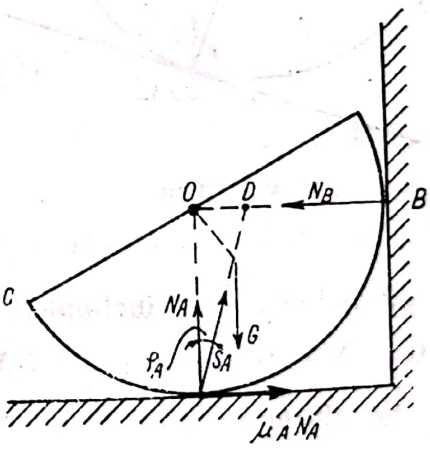


Fig. II.17

17. a) Cele trei forțe $\bar{G}$, $\bar{N}_B$ și $\bar{S}_A$ (rezultanta lui $\bar{N}_A$ cu $\mu_A\bar{N}_A$) trebuie să fie concurente (fig. II.17). Unghiul φ_A al lui $\bar{S}_A$ cu $\bar{N}_A$ dă $\operatorname{tg}\varphi_A = \mu_A$.

Se vede că $OD = \frac{4R}{3\pi}\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\varphi_A = \frac{OD}{OA} = \frac{4}{3\pi}\sin\alpha = \mu_A$.

Dacă $\mu_A \geqslant \frac{4}{3\pi}$ semicilindrul poate sta sub orice unghi α, $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Dacă $\mu_A < \frac{4}{3\pi}$ căpătăm pe α dat de $\sin\alpha = \frac{3\pi\mu_A}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Frecare și la peretele vertical.* Intervine și $\mu_B N_B$. Găsim

$$\mu_B = \frac{4 \sin \alpha - 3\pi \mu_A}{\mu_A (3\pi - 4 \sin \alpha)}.$$

Exemplu numeric: Găsim $\mu_B = \dfrac{1}{15 - \dfrac{16}{\pi}} \cong \dfrac{1}{10}$.

18. Fiind numai două forțe $\bar{G}$ și $\bar{S}$ (rezultanta lui N_A cu $\mu_A N_A$) trebuie să se afle pe același suport (fig. II.18). De aci φ (unghiul lui $\bar{S}$ cu $\bar{N}_A$) este $\varphi = \alpha$; deci $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Din $OA = OC \cos(\theta - \alpha) + AC \cos \alpha$ și $OC \sin(\theta - \alpha) = AC \sin \alpha$, avem $\sin \theta = \dfrac{3\pi}{4} \sin \alpha$. Pentru a avea $\sin \theta < 1$ trebuie ca $\sin \alpha < \dfrac{4}{3\pi}$; $\alpha < 25°$.

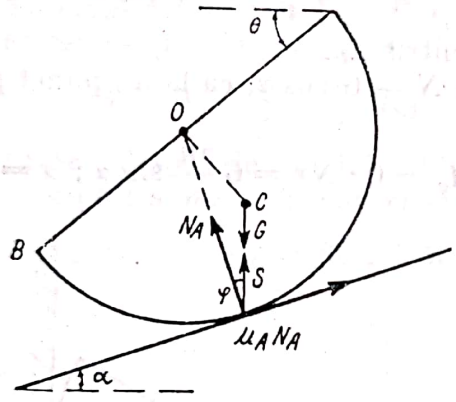


Fig. II.18

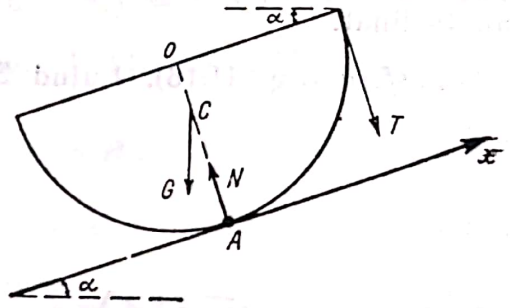


Fig. II.19

19. Ox paralel cu planul înclinat (fig. II.19): $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow G \sin \alpha = \mu N$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N = G \cos \alpha + T$; $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow TR = G \sin \alpha \, R\left(1 - \dfrac{4}{3\pi}\right)$.

Se obține:

$$T = \frac{G}{3\pi}(3\pi - 4) \sin \alpha; \quad \mu = \frac{3\pi \operatorname{tg} \alpha}{(3\pi - 4) \operatorname{tg} \alpha + 3\pi}.$$

20. a) În A tendința de lunecare este în jos (O este punctul fix). Avem $N = G \cos \alpha = 10\sqrt{3}$ (fig. II.20, *a*).

Din $\Sigma M_A = 0$: $T(R + r) - G \sin \alpha \, R = 0$; Găsim $T = 5{,}83$ N.

Din $\Sigma X_i = 0$ (Ox paralel cu planul înclinat):

$G \sin \alpha - T - \mu N = 0 \Rightarrow \mu = 0{,}24$.

b) Dacă A este punctul de contact cu planul (fig. II.20, *b*): $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow T(R + r) - G \sin \alpha \, r = 0 \Rightarrow T = 4{,}18$ N

Scanned with OKEN Scanner

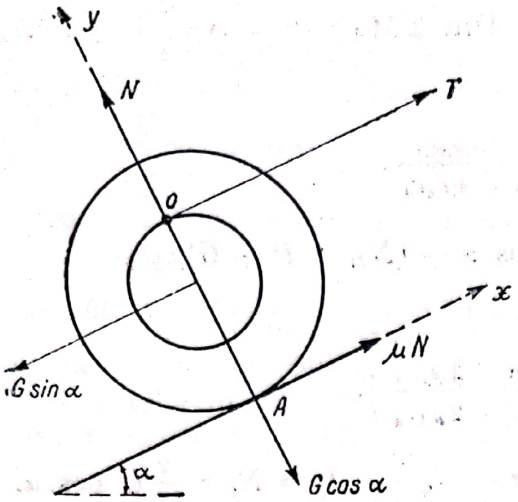


Fig. II.20, *a*

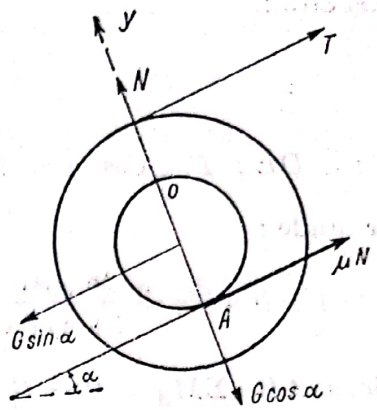


Fig. II.20, *b*

$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N = 10\sqrt{3}$; $\Sigma X_i = 0$; $T + \mu N - G \sin \alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu = 0{,}34.$

În cazul (b) este nevoie de o frecare mai mare ca la (a) deci riscă să lunece mai întîi.

Capitolul III

ARTICULAȚII

1. *Bara AB*: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_c = \frac{2}{3} G.$

Bara CD (fig. III.1). Avem: $Y_E = F_E = G + \frac{2}{3} G = \frac{5}{3} G.$

Din $\Sigma M_E = 0$; $\mu_E F_E r_E - G \frac{l}{4} \cos \alpha - \frac{2}{3} G \frac{3l}{4} \cos \alpha = 0.$

Rezultă:

$$\mu_E = \frac{9}{20} \frac{l}{r_E} \cos \alpha.$$

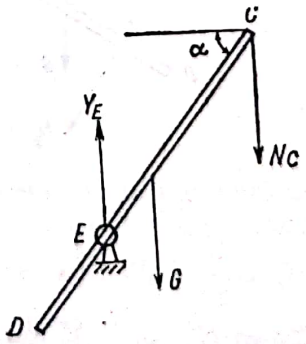


Fig. III.1

2. *Bara BC*: $F_A = Y_A = G - N_D$. Din $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_D \frac{l}{4} = \mu_A F_A r_A$.

Rezultă:

$$N_D = \frac{4G\mu_A r_A}{l + 4\mu_A r_A}.$$

Bara DE: $P\frac{l}{2}\cos\alpha = N_D\frac{l}{2}\cos\alpha + (N_D + P + G)\mu_E r_E$

de unde:

$$P = \left(\mp G\,\mu_E r_E + \frac{4G\mu_A r_A}{l + 4\mu_A r_A}\right)\left(\frac{l\cos\alpha + 2\,\mu_E r_E}{l\cos\alpha - 2\,\mu_E r_E}\right).$$

3. *Bara AB*. $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow G\frac{l}{2}\cos\alpha - N_c\frac{3l}{4} = 0 \Rightarrow N_c = \frac{2}{3}G\cos\alpha$.

Bara CD (fig. III.3): $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_E = -\frac{2}{3}G\cos\alpha\sin\alpha$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_E = G + \frac{2}{3}G\cos^2\alpha.$$

De unde $F_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2}$ și $\Sigma M_E = 0 \Rightarrow N_c \sin\alpha\frac{l}{2} - \mu_E F_E r_E = 0$

deci

$$\mu_E = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{9 + 16\sin\alpha}}\frac{l}{r_E}$$

Dacă ar fi frecare numai în A:

Ca să nu se rotească bara *CD*, trebuie ca $N_c = 0$, deci din $\Sigma M_A = 0$ pentru bara *AB*, avem $G\frac{l}{2}\cos\alpha = M_{fr} = \mu_A F_A r_A$ dar $F_A = G$ deci

$$\mu_A = \frac{l}{2}\frac{\cos\alpha}{r_A}$$

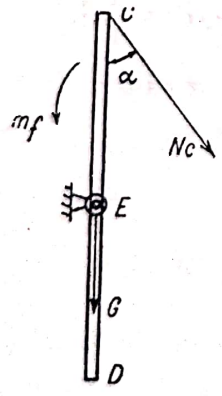


Fig. III.3

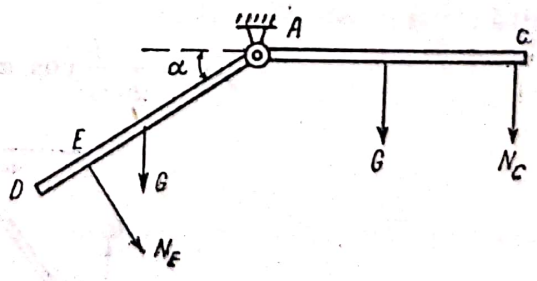


Fig. III.4

4. *Bara ED*: $\Sigma M_E = 0$.

$$N_E\, l\cos\alpha = G\frac{l}{2}\cos 2\alpha \Rightarrow N_E = \frac{G}{2}\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Bara BAC (fig. III.4) : $\Sigma M_A = 0$.

$$N_E \frac{3l}{4} + G\frac{l}{2}\cos\alpha - G\frac{l}{2} - N_c\, l = 0\,;$$

deci $N_c = \dfrac{G}{8\cos\alpha}(10\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 3)$.

Dacă $\cos\alpha = \dfrac{2+\sqrt{34}}{10}$, $\alpha \cong 51°35'$ avem $N_c = 0$.

Nu mai este nevoie de cuiul C pentru echilibru ca în figură.

5. a) Din echilibrul greutăţii P găsim $T = P$.

Bara cu inel (fig. III.5, a') : $\Sigma M_A = 0$:

$$T\frac{3l}{4}\cos 60° - G\frac{3l}{4}\cos 60° - 2G\frac{l}{2}\cos 60° = 0$$

$$T = P = \frac{7}{3}G.$$

Un inel (fig. III.5, a''). Luînd bara ca axă Ox :

$$\Sigma X_i = 0 : \quad -G\frac{\sqrt{3}}{2} - T\frac{\sqrt{3}}{2} + \mu N = 0\,;$$

$$\Sigma Y_i = 0 : \quad N - \frac{T}{2} + \frac{G}{2} = 0;$$

de unde

$$N = \frac{2}{3}G\,; \quad \mu N = \frac{5}{3}G\sqrt{3}, \text{ deci } \mu = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

b) Analog. Găsim aceleaşi rezultate.

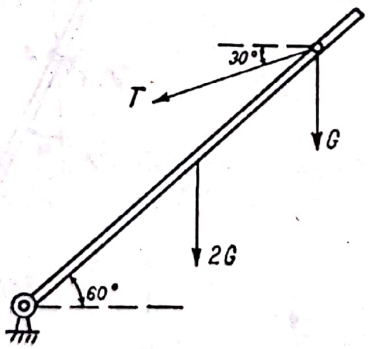


Fig. III.5, a'

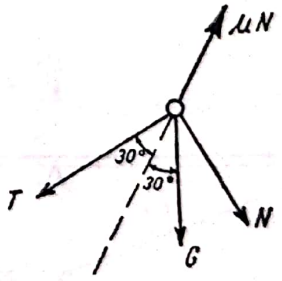


Fig. III.5, a''

6. a) *Bara* AB. $\vec{N}_A$ fiind reazem simplu e vertical în sus. $\vec{G}$ fiind vertical înseamnă că forţa $\vec{F}_c$ din articulaţia C trebuie să fie verticală (concurentă cu celelalte două la ∞) ; $F_c = \dfrac{2}{3}G$ (nu depinde de α).

Bara CD. $\vec{F}_c$ este vertical în jos. Luînd $\Sigma M_E = 0 \Rightarrow P = F_c = \dfrac{2}{3}G$.

Observaţie. Nici una din forţe nu depinde de α ; în E s-ar putea pune un reazem simplu deoarece $\vec{F}_E$ este o forţă verticală în sus.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Bara AB.* $\bar{N}_C$ este perpendicular pe AB. $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_C = \frac{2}{3} G \cos \alpha$.

Bara CD. $\Sigma M_E = 0 \Rightarrow P = \frac{2}{3} G \cos^2 \alpha$, iar $X_E = -\frac{2}{3} G \sin \alpha \cos \alpha$;

$Y_E = G + \frac{2}{3} G \cos^2 \alpha$.

Observație. Toate forțele depind de α. În E nu se poate pune reazem simplu căci trebuie să dea și o forță orizontală.

7. Pe emisferă lucrează trei forțe $\bar{G}, \bar{N}_0, \bar{F}_A$ ($\bar{G}$ și $\bar{N}_0$ sînt paralele deci pentru concurență și $\bar{F}_A$ este paralel cu ele). Pentru ca momentele să se echilibreze trebuie ca pentru emisferă sensul lui $\bar{F}_A$ să fie în sus (fig. III.7).

Din $\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{3}{8} G \operatorname{tg} \alpha$.

Bara. $\bar{F}_A$ este în jos. Din $\Sigma M_C = 0 \Rightarrow P = \frac{G}{2}\left(1 + \frac{9}{4} \operatorname{tg} \alpha\right)$.

Discuție. $F_A = 0$ cînd $\alpha = 0$, iar $P = \frac{G}{2}$.

b) Aci $\bar{F}_D$ trebuie să fie în jos pentru emisferă pentru echilibrarea momentelor. $F_D = \frac{3}{8} \operatorname{tg} \alpha$. Pentru bară $\bar{F}_D$ e în sus.

$$\Sigma M_C = 0 \text{ dă } P = \frac{G}{2}\left(1 - \frac{9}{4} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

Observație. Pentru ca $P > 0$, $\operatorname{tg} \alpha < \frac{4}{9}$. Pentru $\operatorname{tg} \alpha > \frac{4}{9}$ $\bar{P}$ este în sus.

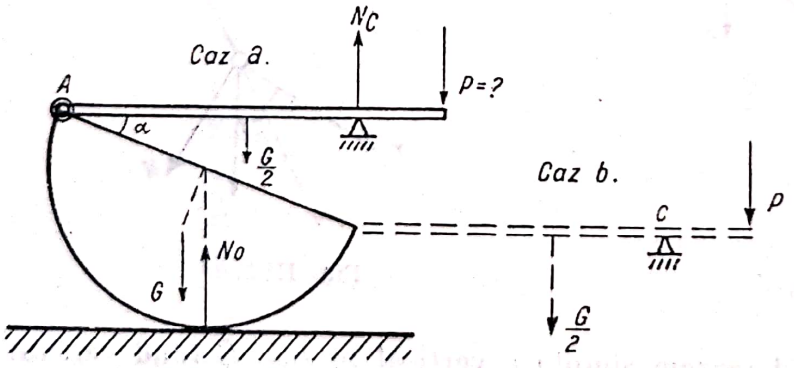


Fig. III.7

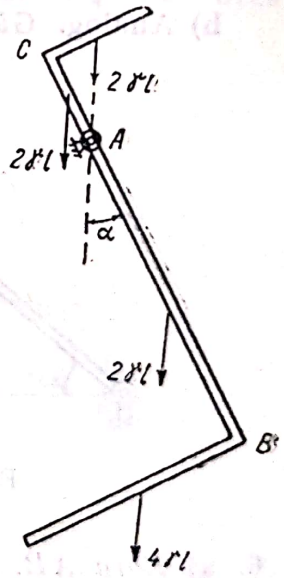


Fig. III.8, b

8. a) Din $\Sigma Y_i = 0$; $F_A = Y_A = \gamma \cdot 14\ l$. Din $\Sigma M_A = 0$:

$$\gamma\, 2l \cdot l + \gamma\, 2l \cdot 2l + M_{fr} - \gamma\, 4l \cdot 6l - \gamma\, 6l \cdot 3l = 0$$

unde $M_{fr} = \mu_A F_A r_A \Rightarrow \mu_A = \frac{18}{7} \frac{l}{r_A}$.

b) Din $\Sigma M_A = 0$ (fig. III.8, *b*):

$$\gamma\, 4l\,(2l\cos\alpha - 6l\sin\alpha) + \gamma\, 2l\cdot l\sin\alpha - \gamma\, 6l\cdot 3l\sin\alpha - \\ - \gamma\, 2\,l - (l\cos\alpha - 2l\sin\alpha) = 0.$$

Obţinem: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}$.

9. a) *Frînarea la roata din faţă.* Din solidificarea sistemului $\Sigma M_B = 0$:

$$N_A = (2P + G)\left(\sin\alpha\frac{R}{l} + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)$$

$$\mu_A N_A = (2P + G)\sin\alpha,$$

deci

$$\mu_A = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\frac{R}{l} + \frac{1}{2}\cos\alpha}.$$

b) *Frînarea la roata din spate.* Din sistemul solidificat: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_B =$

$= (2P + G)\left(\sin\alpha\frac{R}{l} - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)$;

$$\mu_B N_B = (2P + \ldots)\sin\alpha,$$

deci

$$\mu_B = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\frac{R}{l} - \frac{1}{2}\cos\alpha}.$$

Concluzii. Se vede că $\mu_A < \mu_B$. E necesară o frecare mai mică la roata din faţă decît la cea din spate, deci sistemul poate sta pe un plan mai înclinat cînd e frînată roata din faţă decît dacă ar fi frînată cea din spate.

10. a) *Sistemul solidificat* (fig. III.10, *a*):

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow N_c = G + \frac{3P}{4};$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_B = G + \frac{P}{4}.$$

$N_c + N_B$ deci $\mu_c < \mu_B$ căci $\Sigma X_i = 0$ dă $\mu_B N_B = \mu_c N_c$. Bara va începe să lunece în B în timp ce se roteşte în jurul lui C.

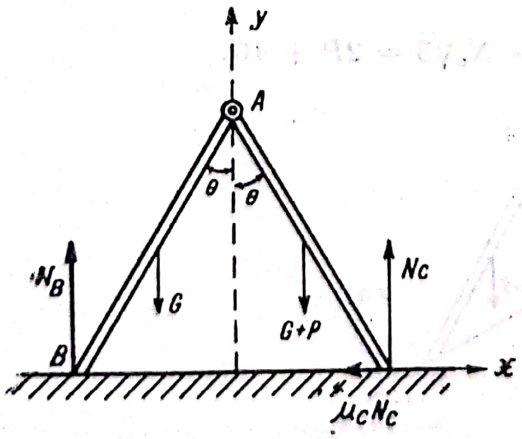


Fig. III.10, *a*

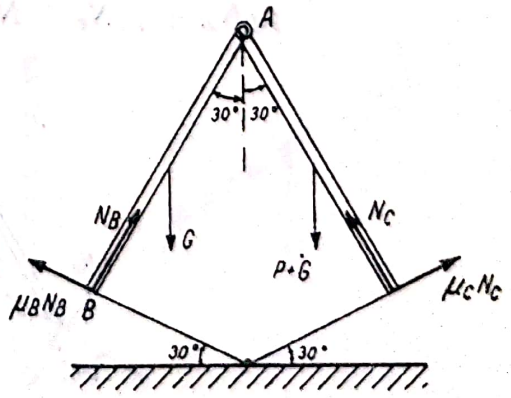


Fig. III.10, *b*

Bara AC. $\Sigma M_A = 0$:

$$-(P+G)\frac{l}{2}\sin\theta + N_c l \sin\theta - \mu_c N_c l \cos\theta = 0;$$

$$\text{găsim: } \mu_c = \frac{P+2G}{4G+3P}\operatorname{tg}\theta; \quad \mu_B = \frac{P+2G}{4G+P}\operatorname{tg}\theta.$$

Exemplu numeric: $\mu_c = \frac{3\sqrt{3}}{7} \approx 0{,}73$; $\mu_B = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1{,}02$.

Se vede că $\mu = 1$ nu e suficient în B deci va luneca, dar e suficient în C unde nu lunecă.

b) *Sistemul solidificat* (fig. III.10, *b*):

$$\Sigma X_i = 0: \frac{N_B}{2} + \mu_c N_c \frac{\sqrt{3}}{2} - \mu_B N_B \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{N_2}{2} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0: P + 2G - \left(N_B \frac{\sqrt{3}}{2} + N_c \frac{\sqrt{3}}{2} + \mu_B \frac{N_B}{2} + \mu_c \frac{N_c}{2}\right) = 0.$$

Bara AC: $\Sigma M_A \Rightarrow \mu_c N_c = \frac{P+G}{4}$.

Bara AB: $\Sigma M_A \Rightarrow \mu_B N_B = \frac{G}{4}$;

$$\text{se deduce } N_B = \frac{\sqrt{3}}{12}(2P+7G); \quad N_c = \frac{\sqrt{3}}{12}(5P+7G);$$

$$\mu_c = \frac{(P+G)\sqrt{3}}{5P+7G}; \quad \mu_B = \frac{G\sqrt{3}}{2P+7G}.$$

Exemplu numeric: $\mu_c = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $\mu_B = \frac{\sqrt{3}}{9}$; ambele mai mici decît $\mu = 1$. Corpul nu lunecă. $\mu_c > \mu_B$ deci tinde să lunece mai întîi în B. S-ar putea calcula unghiul din A de la care începe lunecarea.

c) *Sistem solidificat* (fig. III.10, *c*): $\Sigma X_i = 0$.

$$\frac{1}{2}(\mu_B N_B \sqrt{3} - \mu_c N_c \sqrt{3} - N_B + N_c) = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0$$

$$\mu_B N_B + \mu_c N_c + N_B\sqrt{3} + N_c\sqrt{3} = 2P + 4G.$$

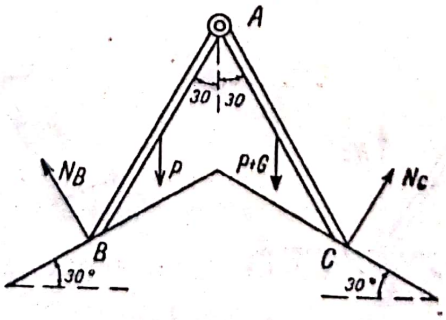


Fig. III.10, *c*

Scanned with OKEN Scanner

Bara AC: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \mu_c N_c = N_c\sqrt{3} - \frac{P+G}{2}$.

Bara AB: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \mu_B N_B = N_B\sqrt{3} - \frac{G}{2}$;

de unde: $\mu_c = \frac{\sqrt{3}(2P+3G)}{4P+5G}$; $\mu_B = \frac{(P+3G)\sqrt{3}}{P+5G}$.

Pentru $P = G$: $\mu_c = \frac{5\sqrt{3}}{7}$; $\mu_B = \frac{4\sqrt{3}}{6}$,

μ_B puțin mai mic decît μ_c deci lunecarea va tinde să înceapă în C.

11. a) Sistem solidificat (fig. III.11, *a*): $\Sigma Y_i = 0$.

$$N_B\sqrt{3} + \mu_B N_B = 2G. \qquad (1)$$

Bara AB: $\Sigma M_A = 0$

$N_B\frac{l\sqrt{3}}{2} - G\frac{l}{4} - \mu_B N_B\frac{l}{2} = 0$. Obținem: $N_B = \frac{G}{12}(24 - 5\sqrt{3})$; $\mu_B = \frac{8\sqrt{3}-5}{5}$.

b) Din ecuația (1) unde $\mu_B = 0$ avem $N_B = \frac{2G\sqrt{3}}{3}$

Bara AB $F_A = X_A = \frac{N_B}{2} = \frac{G\sqrt{3}}{3}$; $\Sigma M_A = 0$: $N_B\frac{l\sqrt{3}}{2} - G\frac{l}{4} - \mu_A\frac{G\sqrt{3}}{3}r_A = 0$.

Obținem $\mu_A = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{l}{r_A}$.

c) *Bara* AB_2 *este verticală* (fig. III.11, *c*). Se vede din $\Sigma M_{B_2} = 0$ pentru bara AB_2 că $X_A = 0$, deci trebuie ca rezultanta forței $\mu_2\bar{N}_2$ cu $\bar{N}_2$ să fie pe suportul lui $\bar{G}$ și $\bar{Y}_A$, deci $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \mu_2$. Din echilibrul barei B_1A, $\bar{Y}_A$, $\bar{G}$ și $\bar{N}_1$ sînt concurente la ∞, deci:

$$\mu_1 N_1 = 0;\ \mu_1 = 0,\ Y_A = \frac{G}{2},\ N_1 = \frac{G}{2}.$$

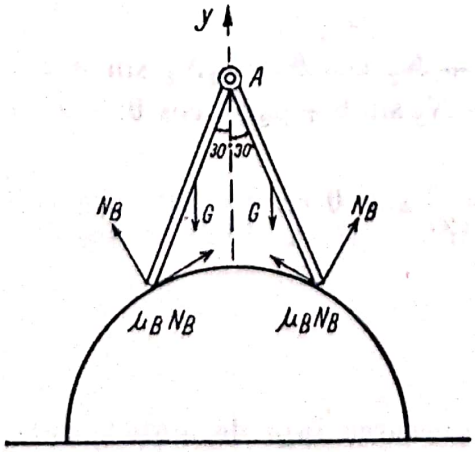


Fig. III.11, *a*

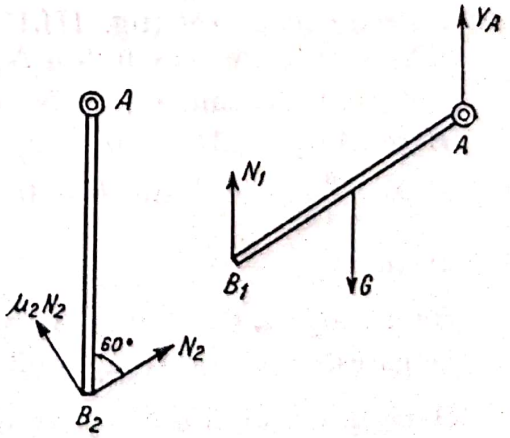


Fig. III.11, *c*

12. a) *Sistemul solidificat* (fig. III.12, *a*) : $\Sigma Y_i = 0$.

$$2\,N_c \sin\theta + 2\,\mu_c N_c \cos\theta - 2G = 0. \qquad (1)$$

Bara AB : $\Sigma M_A = 0$,

$$-N_c \frac{a}{\sin\theta} + G\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \Rightarrow N_c = \frac{G}{2a}\sin^2\theta\,;$$

din ecuația (1) $\mu_c = \dfrac{2a - l\sin^3\theta}{1\sin^2\theta\cos\theta}$.

b) *Sistemul solidificat* : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_c = \dfrac{G}{\sin\theta}$.

Bara AB : $\Sigma M_A = 0$:

$$G\frac{l}{2}\sin\theta - N_c\frac{a}{\sin\theta} - \mu_A F_A r_A = 0.$$

Din cauza simetriei $F_A = X_A$ este orizontală ; $F_A = N_c\cos\theta$.

Deci $\mu_A = \dfrac{1}{r_A\cos\theta}\left(\dfrac{l\sin^2\theta}{2} - \dfrac{a}{\sin\theta}\right) = \dfrac{l\sin^3\theta - 2a}{\sin^2\theta\cdot r_A}$.

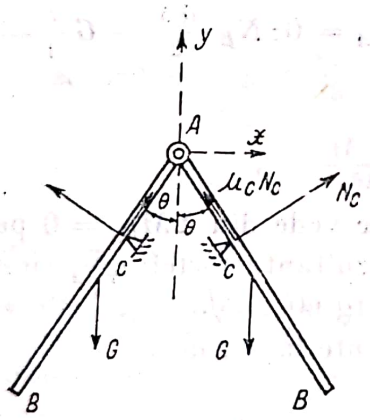


Fig. III.12, *a*

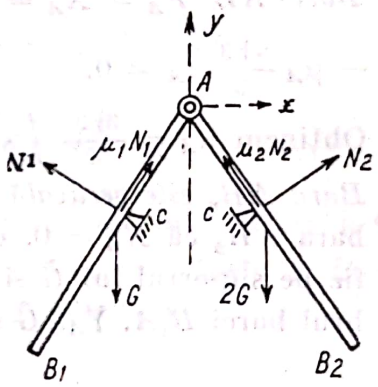


Fig. III.12, *c*

c) *Sistemul solidificat* (fig. III.12, *c*) :

$\Sigma X_i = 0$: $-N_1\cos\theta + \mu_1 N_1\sin\theta + N_2\cos\theta - \mu_2 N_2\sin\theta = 0$;

$\Sigma Y_i = 0$: $N_1\sin\theta + \mu_1 N_1\cos\theta + N_2\sin\theta + \mu_2 N_2\cos\theta - 3G = 0$.

Bara AB_1 : $\Sigma M_A = 0$

$$-N_1\frac{a}{\sin\theta} + G\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{Gl}{2a}\sin^2\theta \text{ cu } \theta = 30^\circ \text{ și } a = \frac{l}{4}\,;$$

avem $N_1 = \dfrac{G}{2}$.

Bara AB_2 : $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_2 = G$.

Se găsește : $\mu_1 = \sqrt{3}$; $\mu_2 = \sqrt{3} = \mu_1$.

Dacă la cui ar fi $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ar începe lunecarea față de ambele cuie în același timp.

Scanned with OKEN Scanner

d) *Frecarea la ax.* Sistemul solidificat :
$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_1 = N_2$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 = 3G$.
Bara B_1A :

$$\Sigma M_A = 0 : -N_1 \frac{a}{\sin\theta} + G\frac{l}{2}\sin\theta + \mu_A F_A r_A = 0 ;$$

$$\Sigma X_i = 0 : X_A = \frac{3G\sqrt{3}}{2} ; \quad \Sigma Y_i = 0 : \quad Y_A = \frac{G}{2} ; \quad F_A = G\sqrt{7}.$$

De unde $\mu_A = \dfrac{5l}{4\sqrt{7}\, r_A}$.

13. a) (1) *Sistem solidificat* (fig. III. 13) : $\Sigma Y_i = 0 : R_A = 2G + \dfrac{T}{2}$.
Bara AB : $\Sigma M_B = 0$:

$$R_A\frac{l}{2} - G\frac{l}{4} - T\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow T \quad 3G.$$

(2) *Sistem solidificat* $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow R_A = 2G$.
Bara AB. $F_B = G$; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -2G\dfrac{l}{2} + G\dfrac{l}{4} + \mu_B r_B G = 0$.
de unde $\mu_B = \dfrac{3l}{4r_B}$.

(3) $R_A = 2G$; *Bara* AB $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \mu_A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

b) Analog ca la a) :

(1) $R_A = \dfrac{5G}{2} + \dfrac{T}{2}$; $T = \dfrac{3G}{2}$.

(2) $\dfrac{5G}{2}\, l - 2G\,\dfrac{l}{2} = \mu_B \dfrac{G}{2} r_B \Rightarrow \mu_B = \dfrac{3l}{r_B}$.

(3) $\mu_A = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

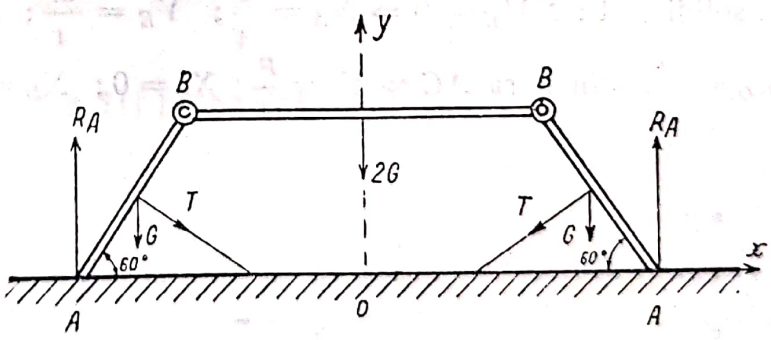


Fig. III.13

14. *Sistemul solidificat* (fig. III.14) :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T = \frac{2P}{3};$$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = -\frac{2P}{3};$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = P.$$

Scanned with OKEN Scanner

Bara HB: $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow Y_B = -P$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_D = 2P$.
Bara DC (unde $Y_D = -2P$); $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_c = 2P$;

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_D = 2P; \quad \Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_c = -2P.$$

(deci la bara HB, $X_D = -2P$; $X_B = +2P$).
Bara EA (unde $X_B = -2P$); $X_c = 2P$; $Y_B = P$; $Y_c = -2P$.
$\Sigma X_i = 0 : T + X_A = 0$ (verificat); $\Sigma Y_i = 0 : (Y_B + Y_c + Y_A) = 0$ (verificat)
$\Sigma M_A = 0$ (verificat).

b) $X_A = +4P$; $Y_A = -2P$; $X_B = -4P$; $Y_B = 3P$;
$X_c = 4P$; $Y_c = 2P$; $X_D = 4P$; $Y_D = P$;
$X_E = 4P$; $Y_E = 2P$; $X_F = 4P$; $Y_F = 2P$.

15. a) *Sistem solidificat* (fig. III.15, *a*): $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_E = \frac{3P}{4}$; $Y_A = \frac{P}{4}$;
$X_A = -2P$.
Bara BD: $Y_B = Y_D = \frac{P}{2}$;
Bara EC: $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_D = -4P = X_B$;
$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_c = 2P$;
$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_c = -\frac{P}{4}$;
$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{P}{4}$;
$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = -2P$.
Verificare. Sistemul solidificat
$\Sigma X_i = 0$; $X_A + 2P = 0$; $\Sigma Y_i = 0 : Y_A + N_E = P$ se verifică.

b) Sistemul solidificat: $\Sigma M_E = 0 \Rightarrow N_A = \frac{P}{4}$; $Y_E = \frac{3P}{4}$; $X_E = -2P$;
$Y_B = Y_D = \frac{P}{4}$. Din bara $AC \Rightarrow Y_c = \frac{P}{4}$; $X_c = 0$; $X_B = 0$; $X_D = 0$.

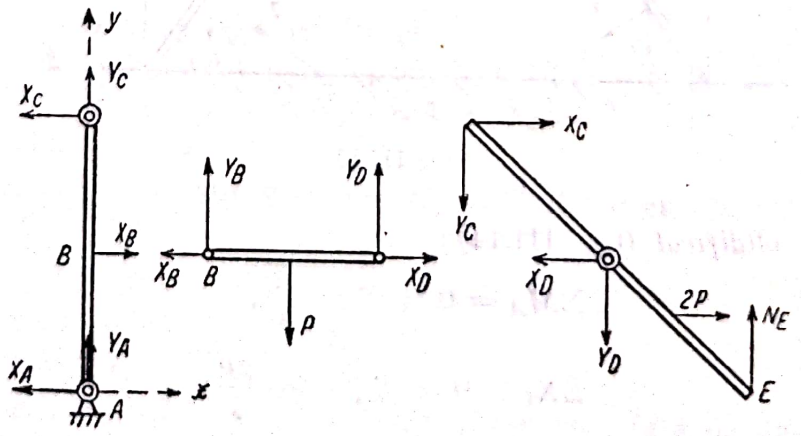


Fig. III.15, *a*

Scanned with OKEN Scanner

16. a) Din sistemul solidificat (fig. III.16, *a*) : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_c = 3G$.

Bara AA : $Y_A = \frac{G}{2}$.

Bara AB : $\Sigma M_B = 0$;

$$G\frac{l}{4} + \frac{G}{2}\frac{l}{2} + X_A\frac{l\sqrt{3}}{2} - N_c\frac{2l}{3} = 0, \text{ deci } X_A = G\sqrt{3},\ Y_A = -\frac{G}{2}.$$

X_A are sens contrar la bara AA care deci e supusă la tracţiune.
($X_B = \sqrt{3}G$, $Y_B = 0$).

b) Găsim aceleaşi rezultate dar $X_A = -\sqrt{3}G$, bara AA este supusă la compresiune.
Dacă $CB = x$; avem aceleaşi valori pentru N_c şi forţele verticale.
Dar $X_A = \frac{G}{3}\left(1 - 6\frac{x}{l}\right)\sqrt{3}$; $X_A = 0$ cînd $x = \frac{l}{6}$; $X_A < 0$ cînd $x > \frac{l}{6}$; la cazul (a) şi invers la cazul (b).

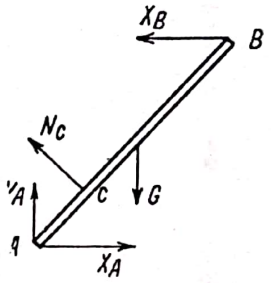


Fig. III.16, *a*

17. Din solidificare $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_c = 2G\sqrt{2}$.
Bara BD (fig. III.17, *a'*). $Y_D = 0$ din cauza simetriei deci $Y_B = G$.

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow X_D = \frac{G}{2};\quad X_B = -\frac{G}{2}.$$

Bara AB (fig. III.17, *a''*). $\Sigma M_A = 0 : G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{G}{2}\frac{l\sqrt{2}}{2} + G\frac{l\sqrt{2}}{2} = 2G\sqrt{2}\,x$
de unde $x = \frac{l}{2}$.

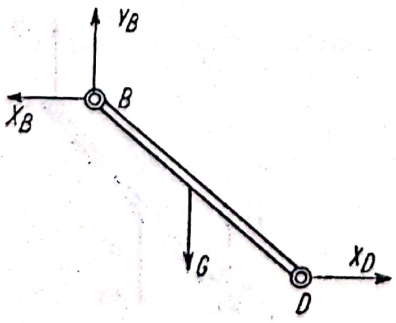


Fig. III.17, *a'*

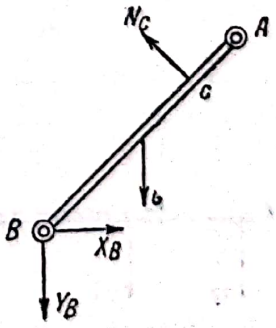


Fig. III.17, *a''*

18. a) Din sistemul solidificat: $F_A = Y_A = 3G$, $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \mu_A = \frac{l}{4r_A}$.

Bara BC: $Y_B = Y_c = \frac{G}{2}$.

Bara CD (fig. III.18, *a'*): $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow X_c = \frac{G\sqrt{3}}{3} = X_D$.

Bara BC: $X_B = X_c = \frac{G\sqrt{3}}{3}$.

Verificare. Bara BD (fig. III.18, *a''*).

Scriind momente în raport cu A găsim $\mu_A = \frac{l}{4r_A}$ iar

din $\Sigma Y_i = 0$: $Y_D = \frac{3G}{2}$.

b) Aici $F_A = 3G$; $M_{fr} = \mu_A 3Gr_A = G\frac{l}{4} + G\frac{l}{2}$; $\mu_A = \frac{l}{4r_A}$, $X_A = 0$

$Y_c = Y_B = G$; $X_D = X_c = \frac{G\sqrt{3}}{6}$.

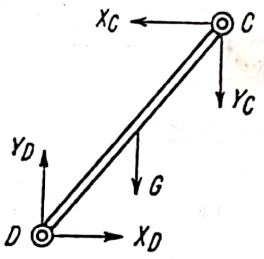


Fig. III.18, *a'*

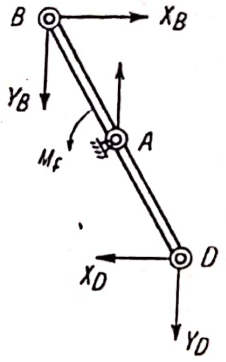


Fig. III.18, *a''*

19. a) *Sistem solidificat*: $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_D = 4G$; $\Sigma M_D = 0$; $x = \frac{3}{8}l$.

Bara AC. $X_A = 0$; $X_c = 0$.

Bara AB (fig. III.19, *a'*) $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Y_A = 2G$; $Y_B = G$ în jos, deci la bara AC, $Y_c = G$ în jos.

Bara CB (fig. III.19, *a''*). Deci $X_A = X_B = X_c = 0$ $Y_A = 2G$; $Y_B = G$; $Y_c = G$.

b) $F_E = Y_E = 4G$; $\Sigma M_E = 0$: $3G\frac{l}{2} = \mu_E F_E r_E$; $\mu_E = \frac{3}{8}\frac{l}{r_E}$.

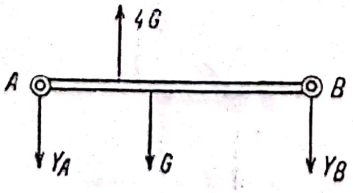


Fig. III.19, *a'*

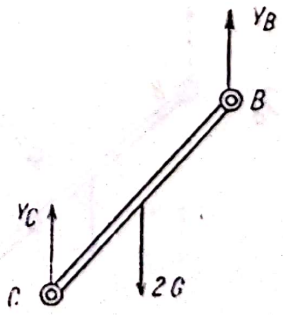


Fig. III.19, *a''*

Scanned with OKEN Scanner

20. a) *Sistemul solidificat* : $F_A = Y_A = 3G$; $\Sigma M_A = 0 : G\frac{l}{2} = \mu_A F_A r$ de unde $\mu_A = \frac{l}{6r}$.

Bara CD (fig. III.20, *a'*) : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_c = G$;

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow G\frac{l}{2} = \mu_c G r \Rightarrow \mu_c = \frac{}{2r}.$$

Bara BC (fig. III.20, *a''*) : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow F_B = Y_B = 2G$; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{fr} = M'_{fr}$
unde M_{fr} este momentul de frecare la articulație
sau $\mu_B\, 2Gr = \mu_c\, Gr$; $\mu_B = \frac{\mu_c}{2} = \frac{l}{4r}$.

Verificare. Bara BE. Găsim $Y_A = 3G$; $M''_{fr} = 2G\frac{l}{2} - M'_{fr}$

sau $\mu_A\, 3\,Gr = 2G\frac{l}{2} - \frac{l}{4r}\,2Gr$; $\mu_A = \frac{l}{6r}$ (se verifică).

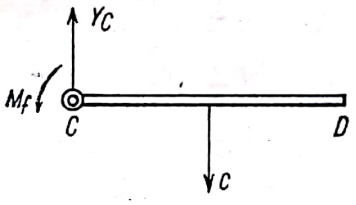


Fig. III.20, a'

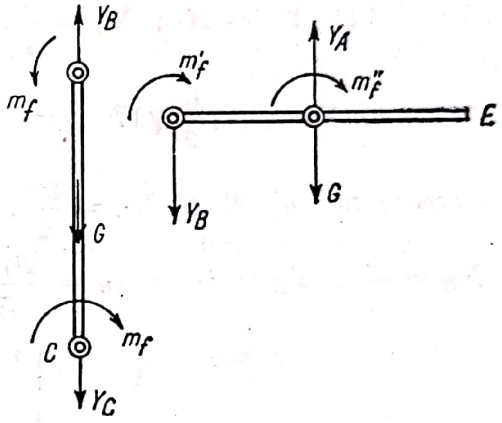


Fig. III.20, a''

b) *Sistem solidificat* : $Y_A = F_A = 2G$; $\mu_A = \frac{l}{8r}$.

Bara BD (fig. III.20, *b'*). $Y_B = F_B = G$; $\mu_B = \frac{l}{4r}$

Verificare bara BAC (fig. III.20, *b''*). $\mu_A\, 2Gr = G\frac{l}{2} - G\frac{l}{4}$; $\mu_A = \frac{l}{8r}$

$$Y_A = 2G;\ \mu_A = \frac{l}{8r};\ \mu_B = \frac{l}{2r}.$$

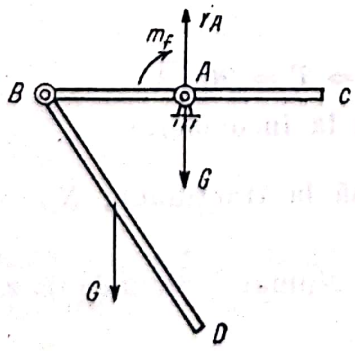


Fig. III.20, b'

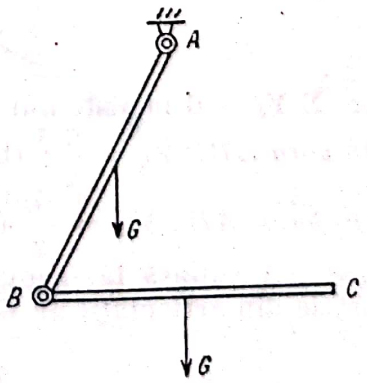


Fig. III.20, b''

Scanned with OKEN Scanner

21. a) *Sistemul solidificat* (fig. III.21) : $\Sigma M_A = 0$; $Y_B \frac{l\sqrt{2}}{2} - X_B \frac{l\sqrt{2}}{2} + + 3G \frac{l}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Bara BC. $\Sigma M_c = 0$: $Y_B \frac{l\sqrt{2}}{2} + X_B \frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{G}{2} \frac{l\sqrt{2}}{2} = 0$.

De unde $Y_B = \frac{G}{2}$; $X_B = 0$; $X_A = 0$.

Bara AD. $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{G}{2}$.

Din $\Sigma Y_i = 0$ (sistem solidificat) $\Rightarrow T = 2G$.

b) *Frecare la* A. Avem $X_B = -\frac{G}{2}$; $Y_B = G$.

Bara CB. $Y_c = 0$, $X_c = \frac{G}{2}$; *Bara* DC $X_D = \frac{G}{2}$; $Y_D = G$;

Bara AD. $Y_A = 2G$; $X_A = \frac{G}{2}$.

$F_A = \frac{G}{2}\sqrt{17}$; $\mu_A \frac{G}{2}\sqrt{17}\ r = \frac{G}{2}\frac{l\sqrt{2}}{2} + G\frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mu_A = \frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{17}r}$.

c) *Frecare numai în* B. $X_D = \frac{3G}{2}$; $Y_D = G$; $X_c = \frac{3G}{2}$; $Y_c = G$;

$X_B = \frac{3G}{2}$; $Y_B = G \Rightarrow \mu_B = \frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{13}r}$.

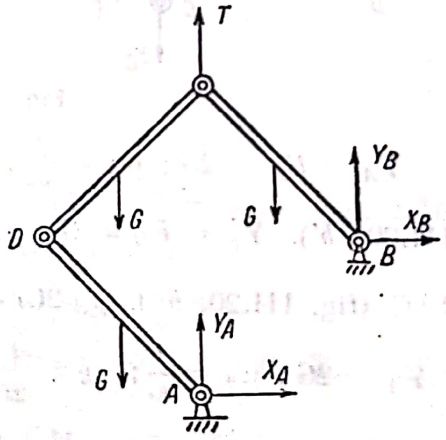


Fig. III.21

22. a) Din $\Sigma Y_i = 0$ la sistemul solidificat $\Rightarrow T = 2G\sqrt{2}$.

Din bara BB: $Y_B = \frac{G}{2}$; (bara supusă la încovoiere).

Din bara AB: $Y_A = \frac{3G}{2}$ (bara supusă la tracțiune) ; $X_A = X_B = 0$.

Bara AA supusă la încovoiere.

Forțele din articulații nu depind de α. Numai T depinde de α.

$$T = \frac{2G}{\sin \alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Din solidificarea sistemului: $T = \frac{2G}{\cos\alpha}$;

Bara BB: $Y_B = \frac{G}{2}$;

Bara AA: $Y_A = \frac{G}{2}$.

Bara AB: $\Sigma Y_i = 0$ verifică că $T = \frac{2G}{\cos\alpha}$;

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow X_B = \frac{-G}{2}\operatorname{tg}\alpha;\quad X_A = \frac{3G}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Barele AA *și* BB sînt supuse la tracțiune care depinde de α și încovoiere care nu depinde de α.

23. a) *Sistemul solidificat*: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{G}{2}$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{5G}{2}$.

Bara BD (fig. III.23, a'): $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_D = \frac{G}{2}$; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow X_D = -G$ deci și $X_B = -G$.

Bara CD. $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow T = 2G\sqrt{2}$.

Din sistemul solidificat (fig. III.23, a''): $\Sigma M_A = 0$:

$$G\frac{l}{2}\cos\alpha = G\left(\frac{l}{2}\sin\alpha - l\cos\alpha\right);\ \text{deci}\ \operatorname{tg}\alpha = 3.$$

Bara CD. $\Sigma M_C = 0$:

$$T\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2} = G\frac{l}{2}\sin\alpha\ \text{deci}\ T = \frac{2G\sqrt{5}}{5}.$$

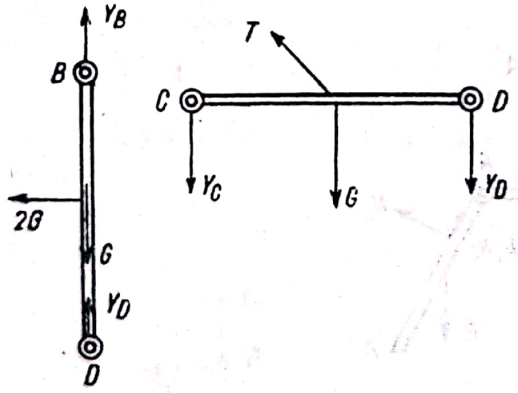


Fig. III.23, a'

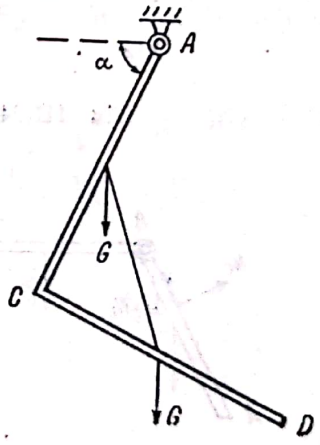


Fig. III.23, a''

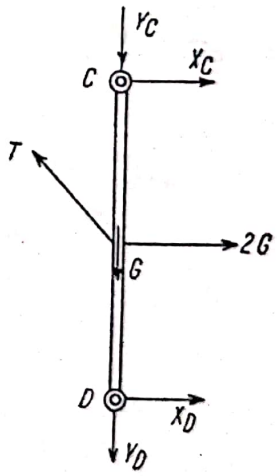


Fig. III.23, b'

b) *Sistemul solidificat*. Din $\Sigma M_A = 0$ rezultă $X_B = +G$ deci $X_A = -3G$.

(1) *Bara* BD. $Y_B = Y_D = \frac{G}{2}$; $X_B = G$; $X_D = -G$; $Y_C = \frac{5G}{2}$.

Bara CD (fig. III.23, b'). Din ecuația de momente în raport cu mijlocul barei: $X_C = G$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $\Sigma X_i = 0 : T = 4G\sqrt{2}$ (se poate face verificarea prin echilibrul barei AC). $Y_c = \frac{5G}{2}$.

(2) Este identic cu cel de la (a).

24. a) *Fără frecare* (fig. III.24, *a'*). $\Sigma Y_i = 0$ (sistem solidificat)

$2\,N_c \cos 60° - 5G = 0 \Rightarrow N_c = 5G.$

Bara AA : $Y_A = G.$

Bara BB : $Y_B = \frac{G}{2}.$

Bara AB : $\Sigma M_A = 0 : N_c \frac{3l}{4} - G\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{G}{2}\frac{l}{2} - X_B \frac{l\sqrt{3}}{2} = 0.$

Obținem $X_B = \frac{13G\sqrt{3}}{6}$. Din $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = \frac{G\sqrt{3}}{3}$.

Barele AA și BB vor fi supuse la tracțiune și încovoiere.

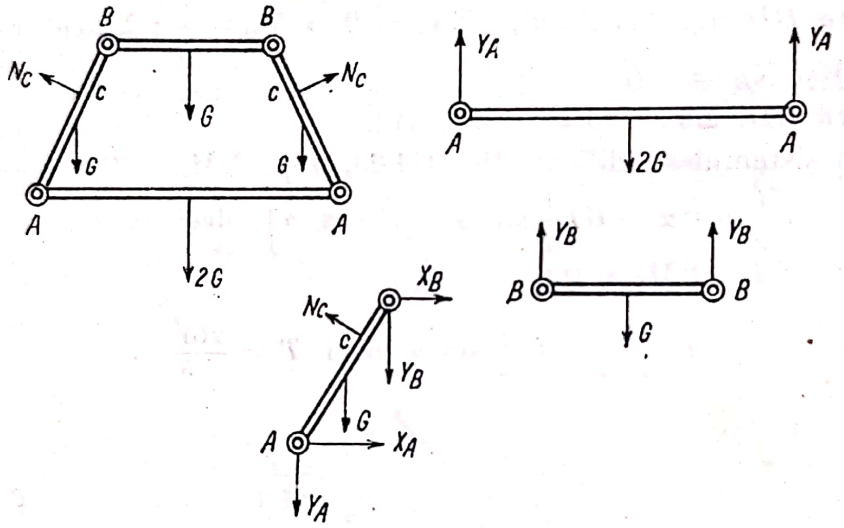


Fig. III.24, *a'*

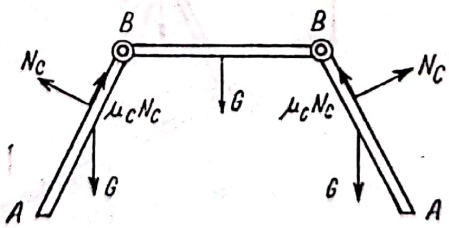


Fig. III.24, *a''*

Frecare la articulațiile B (fig. III.24, *a''*). Se scoate bara AA. Din sistemul solidificat $N_c = 3\,G$. Din echilibrul barei AB avem $X_B = N_c \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3G\sqrt{3}}{2}$; $Y_B = \frac{G}{2}$; $F_B = G\sqrt{7}$.

Din $\Sigma M_B = 0 : N_c \frac{l}{4} - G\frac{l}{4} = \mu_B G\sqrt{7}\ r_B \Rightarrow \mu_B = \frac{l}{2\sqrt{7}r_B}.$

Scanned with OKEN Scanner

Frecare la cuiele C: $\Sigma Y_i = 0$ la sistemul solidificat:

$$2\,N_c\frac{l}{2} + 2\,\mu N_c\frac{\sqrt{3}}{2} = 3G.$$

Bara AB: $\Sigma M_B = 0$ dă $N_c = G$ deci $\mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Fără frecare la cuie: $N_c = 3G$; $N_c x = G\frac{l}{4}$; $x = \frac{l}{12}$.

b) (1) $N_c = 5G$; $X_B = \frac{G\sqrt{3}}{2}$; $Y_B = \frac{G}{2}$; $X_A = 2G\sqrt{3}$. Barele AA și BB sînt supuse la compresiune și încovoiere.

(2) *Frecare la articulații.* Se scoate bara BB:

$N_c = 4G$, $X_A = 2G\sqrt{3}$; $Y_A = -G$; $F_A = G\sqrt{13}$

$M_{fr} = \mu_A G\sqrt{13}\,r = 4G\frac{l}{4} \Rightarrow \mu_A = \frac{l}{\sqrt{13}\,r}$.

(3) *Frecare la cuie:* $\frac{2N_c}{2} + \frac{2\mu N_c\sqrt{3}}{2} = 4G$; $N_c = G$; $\mu = \sqrt{3}$.

Fără frecare la cuie $N_c = 4G$; $N_c x = G\frac{l}{4}$; $x = \frac{l}{16}$.

25. a) (1) *Sistemul solidificat:* $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow F_A = Y_A = 5G$;

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow G\frac{l}{4} + \mu_A F_A r_A = \frac{3Gl}{2} + G\frac{5l}{4}$; $\mu_A = \frac{l}{2r_A}$.

Bara CC. $Y_c = \frac{G}{2}$.

Bara CB (fig. III.25, *a'*). $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{3G}{2}$; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow X_c = G\frac{\sqrt{3}}{3}$; $X_B = -X_c$.

Bara BB (fig. III.25, *a''*). $F_A = 5G$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_B' = \frac{3G}{2}$; $X_B' = -X_B$.

$\Sigma M_A = 0$: $2G\frac{l}{2} + \frac{3G}{2}\frac{3l}{2} - \frac{3G}{2}\frac{l}{2} - \mu_A 5Gr_A = 0 \Rightarrow \mu_A = \frac{l}{2r_A}$

(2) $F_A = Y_A = 4G$; $\mu_A = \frac{l}{2r_A}$; $Y_B = Y_B' = G$; $X_B = X_B' = 0$

$$\mu_B = \mu_B' = \frac{l}{4r_B}.$$

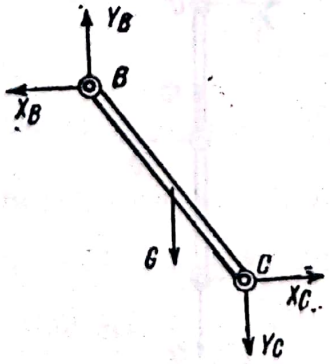


Fig. III.25, *a'*

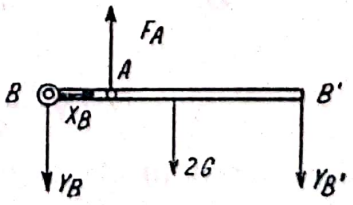


Fig. III.25, *a''*

Scanned with OKEN Scanner

b) Cazul (b) se calculează analog cu cazul (a) și se găsesc rezultatele:

(1) $\mu_A = \frac{l}{4r_A}$; $Y_c = Y_{c'} = G$; $Y_B = Y_{B'} = 2G$;

$$X_c = X_c' = \frac{G\sqrt{3}}{2} = X_B = X_B'.$$

(2) $Y_A = 3G$; $\mu_A = \frac{l}{4r_A}$; $Y_B = Y_{B'} = G$; $\mu_B = \frac{l}{4r_B}$; $X_B = X_{B'} = 0$.

26. a) *Echilibrul roliței* (fig. III.26). Forțe la ax $X_E = P$; $Y_E = P$ (aceste forțe vor lucra în E asupra barei în sens opus).

Sistemul solidificat (forțe exterioare N, X_E, Y_E, X_A, Y_A):

$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = P$; $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N = -\frac{7}{6}P$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = -\frac{P}{6}$

Bara AB. $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow Y_B = -\frac{3P}{4}$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_D = -\frac{P}{4}$

(X_D și X_B nu se pot afla încă din echilibrul acestei bare).

Bara CE. Din:

$$\Sigma Y_i = 0 \text{ avem } Y_c = \frac{3P}{4};$$

$$\Sigma M_D = 0 \text{ avem } X_c = X_E = -P;$$

$$\Sigma X_i = 0 \text{ avem } X_D = 2P.$$

Introducînd valoarea lui X_D cu semn schimbat la bara AB, obținem $X_B = P$.

b) N este la $\frac{AD}{2}$. În mod analog ca la (a)

$X_A = X_E = P$; $N = \frac{7P}{2}$; $Y_A = -\frac{5P}{2}$ (din solidificare).

$X_c = -P$; $X_D = 2P$ (la bara CE).

$X_c = +P$; $Y_c = -\frac{3}{4}P$; $Y_B = \frac{3P}{4}$ (la bara CB).

$Y_B = -\frac{3}{4}$; $Y_D = -\frac{P}{4}$ (bara AB).

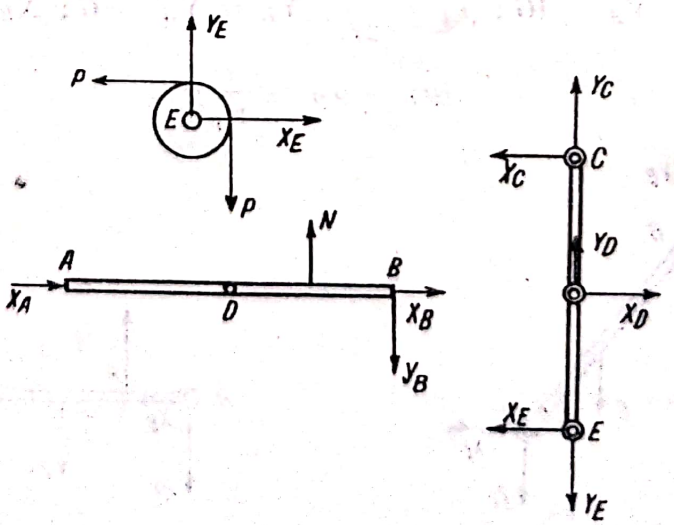


Fig. III.26

Scanned with OKEN Scanner

27. *Bara AC* (fig. III.27) : $\Sigma M_A = 0$:

$$P\frac{l\sqrt{3}}{4} + Y_c\frac{l\sqrt{3}}{2} - X_c\frac{3l}{2} = 0. \qquad (1)$$

Bara BC : $\Sigma M_B = 0$:

$$G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - Y_c\frac{l\sqrt{3}}{2} + X_c\frac{l}{2} = 0. \qquad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) deducem : $X_c = \frac{(P+G)\sqrt{3}}{4}$; $Y_c = \frac{P+3G}{4}$.

Din $\Sigma Y_i = 0$ (bara BC) : $\frac{T}{2} = G - Y_c \Rightarrow T = \frac{G-P}{2}$;

se vede că : $T > 0$ pentru $G > P$;

$T = 0$ pentru $G = P$;

$T < 0$ pentru $G < P$ (trebuie în loc de fir să fie o bară fără greutate proprie).

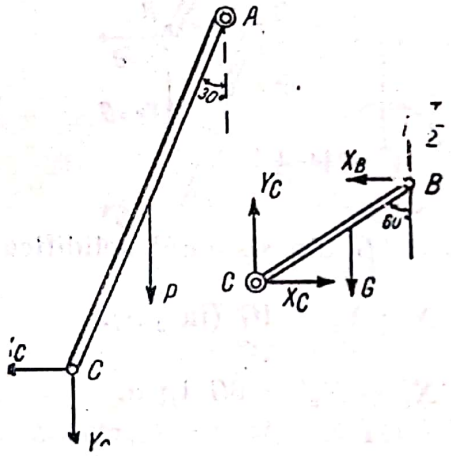


Fig. III.27

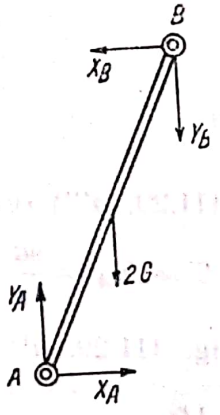


Fig. III.28, *a'*

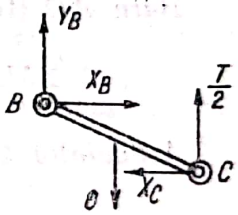


Fig. III.28, *a''*

28. a) *Sistemul solidificat* $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = 3G - \frac{T}{2}$; $Y_B = G - \frac{T}{2}$.

Bara AB (fig. III.28, *a'*) $\Sigma M_A = 0$:

$$X_B = \frac{4G-T}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (1)$$

Bara BC (fig. III.28, *a''*) $\Sigma M_c = 0$:

$$X_B = \frac{T-G}{2}\sqrt{3}\,; \quad X_c = X_B. \qquad (2)$$

Egalînd relațiile (1) și (2) : $T = \frac{7G}{4}$.

b) Din echilibrul barei $AB \Rightarrow X_B = \frac{4G-T}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Din echilibrul barei $BC \Rightarrow X_B = \frac{G-T}{2}\sqrt{3}$

egalînd aceste valori $T = -\frac{G}{2}$ deci în loc de fir trebuie pusă o bară fără greutate proprie.

Scanned with OKEN Scanner

29 a) *Articulația B.* Din cauza simetriei avem (în fig. III.29, *a*) câte o forță pentru fiecare bară *BC* în articulația *B*: Y_A și Y_B aflate între ele deci $Y_B = G$.

Bara BC (fig. III.29, *a''*) (Y_B are sens în jos):

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_B = \frac{3G}{2} \operatorname{tg} \alpha = X_c'' ; \; \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_c'' = 2G.$$

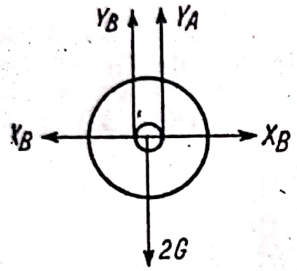


Fig. III.29, *a'*

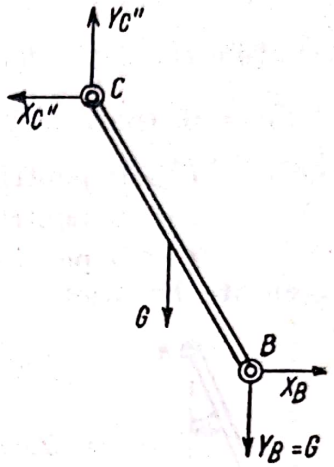


Fig. III.29, *a''*

Bara AC (fig. III.29, *a'''*) (unde $Y_A = 5G$ din sistemul solidificat):

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_A = \frac{9G}{2} \operatorname{tg} \alpha = X_c' ; \; Y_c' = 4G \text{ (în jos).}$$

Articulația C (fig. III.29, a^{IV}). $F = X_c' + X_c'' = 6G \operatorname{tg} \alpha$.

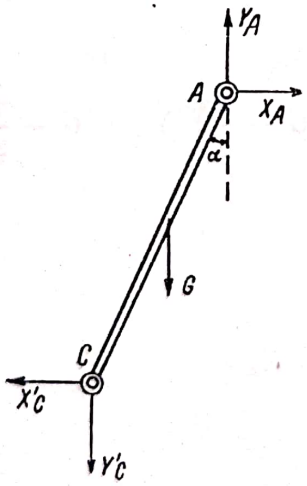


Fig. III.29, *a'''*

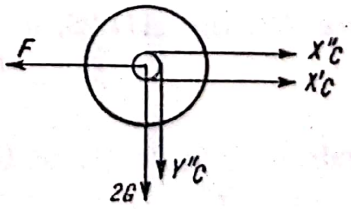


Fig. III.29, a^{IV}

b) *Din bara BB*: $Y_B = \frac{G}{2}$.

Din bara BC: $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_B = \frac{G\sqrt{3}}{3} = X_c'$.

Scanned with OKEN Scanner

Din bara AC $\left(Y_A = \frac{5G}{2}\right.$ din sistemul solidificat$\left.\right)$

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_A = \frac{2G\sqrt{3}}{3} = X_c''.$$

Articulația C: $F = X_c' + X_c'' = G\sqrt{3}$.

30. *Sistem solidificat* (fig. III.30): $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Y_D = -\frac{G}{2}$.

Bara BC: $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{G}{2}$; $Y_c' = \frac{G}{2}$.

Bara CD: $Y_i = 0$; $Y_c'' = \frac{5G}{2}$; $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_D = \frac{G\sqrt{3}}{2}$.

Articulația C: $T = Y_c' + Y_c'' = 3G$.

(c)

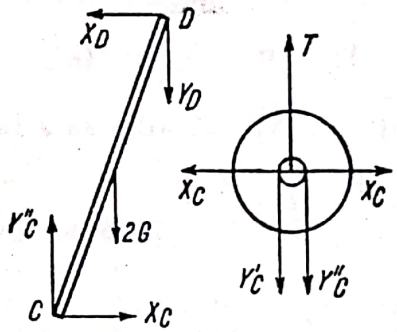


Fig. III.30

(d)

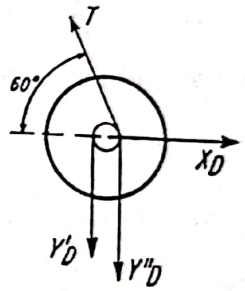


Fig. III.31

31. *Sistem solidificat* (fig. III.31): $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{G}{2}$.

Bara BD: $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow X_D = 0$; $\Sigma Y_i = 0$; $Y_D' = \frac{G}{2}$.

Bara CD: $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow Y_c = \frac{G}{2}$; $Y_D'' = \frac{G}{2}$.

Articulația D: $\Sigma Y_i = 0$: $T\frac{\sqrt{3}}{2} = G$; $T = \frac{2G\sqrt{3}}{3}$.

Bara CD este supusă la compresiune: $X_c = X_D = T\cos 60° = \frac{G\sqrt{3}}{3}$.

Capitolul IV

ÎNCASTRĂRI

1. a) *Sferă* (fig. IV.1, *a'*). Din $\Sigma X_i = 0$ și $\Sigma Y_i = 0$ la sferă, obținem

$$N = \frac{2G\sqrt{3}}{3}; \quad N_D = \frac{G\sqrt{3}}{3}.$$

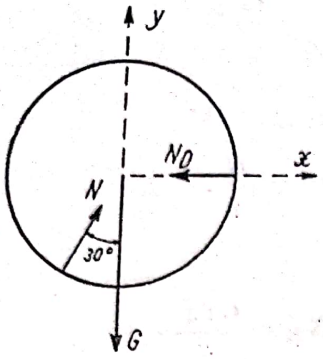


Fig. IV.1, *a'*

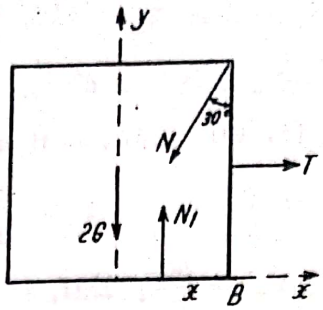


Fig. IV.1, *a''*

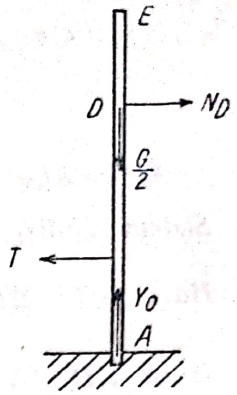


Fig. IV.1, *a'''*

Cub (fig. IV.1, *a''*):

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow T = \frac{G\sqrt{3}}{3};\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_1 = 3G.$$

A treia ecuație de echilibru dă poziția lui $\bar{N}_1$ (distanța sa x față de B)

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{9}\left(l - \frac{a}{4}\right).$$

Bara AE (fig. IV. 1, *a'''*):

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_0 = 0;\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_0 = \frac{G}{2};\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_c = \frac{G\sqrt{3}}{6}a.$$

b) Aceleași forțe pentru *sferă*. La *cub*, același $\Sigma Y_i = 0$ deci $N_1 = 3G$, dar $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu_1 N_1 = G\frac{\sqrt{3}}{3}$ deci $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$; $x = \frac{3+\sqrt{3}}{9}l$.

La bară: $X_0 = -N_D = -\frac{G\sqrt{3}}{3}$; $Y_0 = \frac{G}{2}$; $M_0 = N_D\frac{3a}{4} = \frac{G\sqrt{3}}{4}a$.

2. a) *Inelul de jos* (fig. IV.2, *a'*). $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow 2T\frac{\sqrt{3}}{2} = 2G$; $T = \frac{2G\sqrt{3}}{3}$.

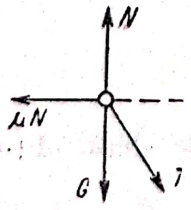


Fig. IV.2, *a'*

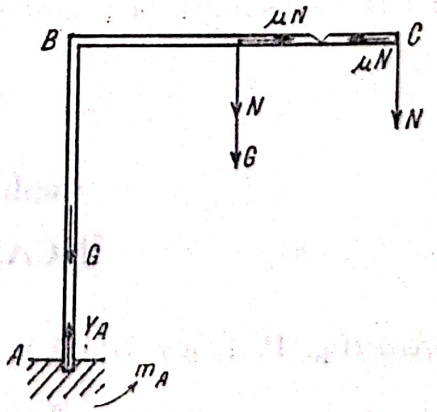


Fig. IV.2, *a''*

Scanned with OKEN Scanner

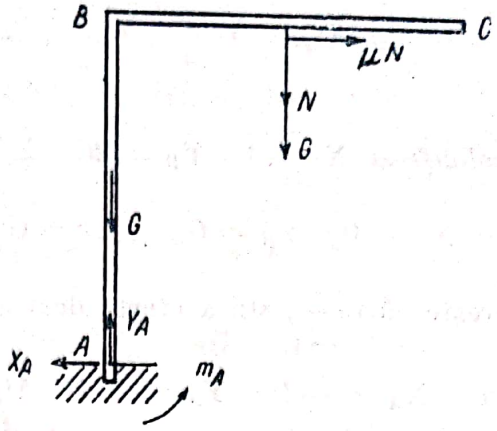


Fig. IV.2, b

Inelul din stînga (cel din dreapta este simetric)

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu N = \frac{T}{2} = \frac{G\sqrt{3}}{3}; \quad \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N = G + \frac{T\sqrt{3}}{2} = 2G$$

deci $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Bara cotită (fig. IV.2, *a''*) (X_A, Y_A, M_A sînt elementele mecanice ale încastrării).

Avem la încastrare $X_A = 0$; $Y_A = 2G + 2N = 6G$.

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow (G + N)l + N\,2l = 7Gl = M_A$.

b) *Același* T și același μ ca la (a). Dar la bara îndoită avem

$$X_A = -\mu N = -\frac{G\sqrt{3}}{3}; \quad Y_A = 2G + N = 4G$$

$$M_A = (G + N)l + \mu N\,2l = \frac{Gl}{3}(9 + 2\sqrt{3}).$$

3. a) *Din sistemul solidificat* obținem: $X_B = 0$; $Y_B = 2G$.

Bara DE (fig. IV.3, *a'*); $\Sigma M_B = G\frac{l}{2} + G\left(\frac{l}{4} + \frac{l}{4}\cos\alpha\right) = G\frac{l}{4}(3 + \cos\alpha)$,

iar $X_A = 0$; $Y_A = G$; $M_{fr} = G\frac{l}{4}\cos\alpha$, dar $M_{fr} = \mu_A Y_A r_A$,

deci $\mu_A = \frac{l\cos\alpha}{4r_A}$ cînd α crește către $\frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha$ scade, μ_A scade.

Verificare (fig. IV.3, *a''*). *Bara BC*: $X_B = 0$; $Y_B = Y_A + G = 2G$.

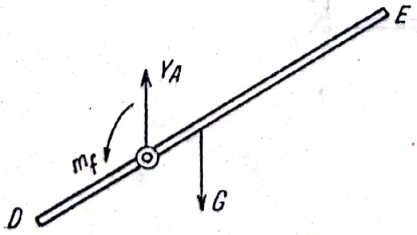


Fig. IV.3, *a'*

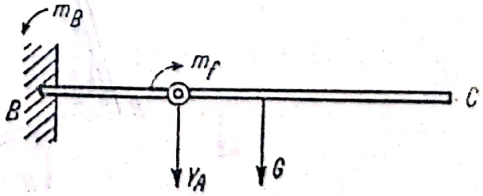


Fig. IV.3, *a''*

$\Sigma M_B = Y_A \frac{}{4} + G \frac{}{2} + M_{fr} = G\frac{l}{4} + G\frac{l}{2} + G\frac{l}{4}\cos\alpha$ egal cu cel dat mai sus.

b) *Din sistemul solidificat* $X_B = 0,\ Y_B = 2G;\ \Sigma M_B = G\frac{l}{4}\sin\alpha.$

Din *bara* DE: $X_A = 0;\ Y_A = G;\ \mu_A G r = G\frac{l}{4}\sin\alpha;\ \mu_A = \frac{l\sin\alpha}{4r}.$

Aci cu cît α creşte către $\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha$ creşte deci μ_A creşte.

4. a) *Din solidificare*: $X_A = -P;\ Y_A = +P;\ M_A = 0$ (căci $P\sqrt{2}$ trece prin A).

Bara CD: $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow X_D = 0$ deci şi $X_c = 0$.

Bara DE: $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow P\sqrt{2}\,l\sqrt{2} - Y_D l = 0;\ Y_D = 2P;\ Y_c = 2P;$ $Y_B = 3P;\ X_B = P.$

Bara DC e supusă la tracţiune.

b) *Solidificarea* dă aceleaşi rezultate ca la (a) $X_A = -P;\ Y_A = +P.$ $\Sigma M_A = 0$. *Bara* ED dă $X_B = P;\ Y_B = P;\ F_B = P\sqrt{2}$. Din $\Sigma M_B = 0$:

$$P\sqrt{2}\,l\sqrt{2} - \mu_B P\sqrt{2}\,r_B = 0 \Rightarrow \mu_B \frac{l\sqrt{2}}{r_B}.$$

Se poate face verificarea luînd bara AC.

5. a) *Sistemul solidificat* (fig. IV.5, *a*): $X_D = 0;\ Y_D = 4G;\ \Sigma M_D = 2Gl +$ $+ G3l + G\left(2l + \frac{l}{2}\right) = \frac{15}{2}Gl.$

Bara cotită. $\Sigma M_A = 0$:

$Gl + G\frac{l}{2} = 2G\mu_A r_A \Rightarrow \mu_A = \frac{3l}{4r_A}.$

Fără frecare în A

Bara cotită: $\Sigma M_A = 0$:

$G\frac{l}{2}\sin\theta = Gl\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \sin\theta\right)$

de unde $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{3};\ Y_A = 2G,\ X_A = 0.$

Încastrarea: *Bara* AD. $X_D = 0;\ Y_D = 4G;\ \Sigma M_D = 2Gl + 2G\cdot 2l =$ $= 6Gl.$

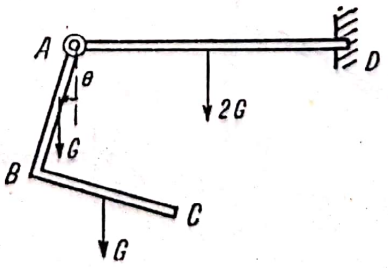


Fig. IV.5, *a*

Scanned with OKEN Scanner

b) Analog $\mu_A = \frac{l}{6r_A}$; $X_D = 0$, $Y_D = 4G$; $M_D = 4Gl$; $Y_A = 3G$; $X_A = 0$.

Fără frecare: $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{8}$; $M'_D = 3Gl + G\frac{l}{2} = 7G\frac{l}{2}$.

c) $\mu_A = \frac{2l}{3r_A}$; $X_D = 0$; $Y_D = 5G$; $M_D = 2Gl$.

Fără frecare: $\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{5}$; $Y'_D = 0$; $Y'_D = 5G$; $M'_D = 0$.

d) $\mu_A = \frac{3l}{4r_A}$; $X_D = 0$; $Y_D = 4G$; $M_D = 3G\frac{l}{2}$.

Fără frecare: $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{3}$; $X'_D = 0$; $Y'_D = 4G$; $M'_D = 0$.

6. a) *Corp* P: $T = P \sin\alpha$.

Bara BC (fig. IV.6, *a'*): $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow Tl\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2}G\cos\alpha \Rightarrow T = \frac{G}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{G\sqrt{3}}{6}$.

$\Sigma X_i = 0$; $X_B = T\cos 60° = \frac{G\sqrt{3}}{12}$; $\Sigma Y_i = 0$, deci $Y_B = \frac{3G}{4}$ şi $P = \frac{G}{3}$.

Bara AB (fig. IV.6, *a''*): (2) $X_A = G\frac{\sqrt{3}}{12}$; $Y_A = \frac{11G}{4}$; $M_A = \frac{7}{2}Gl$.

(3) $\mu_B = \frac{l}{4r_B}$; $X'_A = 0$; $Y'_A = 3G$; $M'_A = 17\ G\frac{l}{4}$.

b) $T = \frac{P}{2\sin\alpha} = \frac{P\sqrt{3}}{3}$; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow T = \frac{G}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{G}{2}$; $P = \frac{G\sqrt{3}}{2}$

$X_B = \frac{T\sqrt{3}}{2} = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_B = G - \frac{T}{2} = \frac{3G}{4}$.

(2) $X_A = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = \frac{11G}{4}$; $M_A = \frac{G\sqrt{3}}{2}l$.

(3) $\mu_B = \frac{l\sqrt{3}}{4r_B}$; $X'_A = 0$; $Y'_A = 3G$; $M'_A = G\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

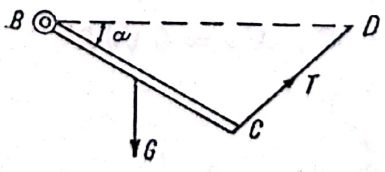


Fig. IV.6, *a'*

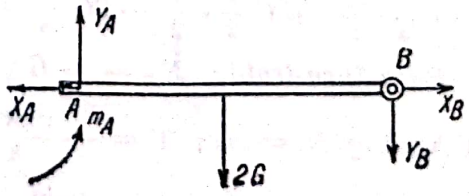


Fig. IV.6, *a''*

Scanned with OKEN Scanner

7. a) Din solidificarea sistemului :

$X_B = 0$; $Y_B = 2G$; $M_B = G\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

(1) *Bara CA :* $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T = G.$

(2) *Bara CA :* $\Sigma M_A = 0$; $N_D\frac{l}{2} = G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N_D = G\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sistem solidificat : $X_B = N_D \cos 60° = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_B = \frac{5G}{4}$; M_B acelaşi ca la (1) deoarece $\bar{N}_D$ trece prin B.

(3) *Bara CA :* $F_A = G$; $\Sigma M_A = 0$ dă $\mu_A = \frac{l\sqrt{3}}{4\,r_A}$.

Elementele încastrării aceleaşi ca la (1).

b) (1) $X_B = 0$; $Y_B = 2G$; $M_B = 5G\frac{l}{4}$; $T = \frac{G\sqrt{3}}{3}$.

(2) $N_D = \frac{G}{2}$; $X_B = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_B = \frac{7G}{4}$; $M_B = 5G\frac{l}{4}$.

(3) $\mu_A = \frac{l}{4r_A}$; X_B, Y_B, M_B ca la (1).

c) (1) $X_B = 0$; $Y_B = 2G$; $M_B = G\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

$T = -G$ (compresiune, trebuie înlocuit firul cu o bară fără greutate proprie).

(2) $N_D = \frac{G\sqrt{3}}{2}$; $M_B = \frac{Gl\sqrt{3}}{4}$; $X_B = -\frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_B = \frac{5G}{4}$.

(3) $\mu_A = \frac{l\sqrt{3}}{4\,r_A}$. Aceleaşi elemente la încastrare ca la (1).

d) (1) $X_B = 0$; $Y_B = 2G$; $M_B = 5G\frac{l}{4}$; $T = -G\frac{\sqrt{3}}{3}$ (compresiune).

(2) $N_D = \frac{G}{2}$; $X_B = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_B = \frac{7G}{4}$; $M_B = 5G\frac{l}{4}$.

(3) $\mu_A = \frac{l}{4r_A}$.

8. a) Din sistemul barelor AB solidificat : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_c = 2G$.

Bara AB. $\Sigma M_A = 0$:

$T\frac{l}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} + G\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2} - 2G\frac{3l}{4} = 0 \Rightarrow T = \frac{10G\sqrt{3}}{3}$.

Bara încastrată : $X_E = -G\sqrt{3}$; $Y_E = 3G$; $M_E = G\sqrt{3}\,l$.

b) Analog $N = 2G$; $T = -\frac{10G\sqrt{3}}{3}$.

Bara încastrată : $X_E = G\sqrt{3}$; $Y_E = 3G$; $M_E = 3G\frac{l}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

9. *Pătratul* (fig. IV.9, *a'*). *Frecare în D :*

$$\Sigma X_i = 0 : N_B - \frac{G\sqrt{2}}{2} - \mu_D N_D = 0 ; \quad \Sigma Y_i = 0 : N_D - \frac{G\sqrt{2}}{2} = 0 ;$$

$$\Sigma M_0 = 0 : N_D \frac{l}{4} - \mu_D N_D \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \mu_D = \frac{1}{2} ; \; N_D = \frac{G\sqrt{2}}{2} ; \; N_B = \frac{3G\sqrt{2}}{4} .$$

Bara BE : (fig. IV.9, *a''*) : $X_E = \frac{3G}{4}$; $Y_E = \frac{11G}{4}$; $M_E = \frac{3}{2} Gl$.

Bara DF : (fig. IV.9, *a'''*) : $X_F = \frac{3G}{4}$; $Y_F = \frac{9G}{4}$; $M_F = \frac{5}{4} Gl$.

Frecare în B. Figura cubului analogă cu cea de sus dar forța $\mu_D N_D = 0$ iar în *B* este $\mu_B N_B$ în sus (punctat în fig. IV.9, *a'*).

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_B = \frac{G\sqrt{2}}{2} ; \; \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow \mu_B N_B + N_D = \frac{G\sqrt{2}}{2} .$$

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow N_B \frac{l}{2} = N_D \frac{3l}{4} \Rightarrow N_D = \frac{G\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \mu_B = \frac{1}{3} .$$

Bara BE : $X_E = (\mu_B N_B - N_B) \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{G}{3}$.

$$Y_E = (\mu_B N_B + N_B) \frac{\sqrt{2}}{2} + 2G = \frac{8G}{3} ; \; M_E = \frac{2Gl}{3} .$$

Bara DF : $X_F = \frac{G}{3}$; $Y_F = 2G + \frac{G}{3}$; $M_F = \frac{2G}{3} l + 2Gl = \frac{8}{3} Gl$.

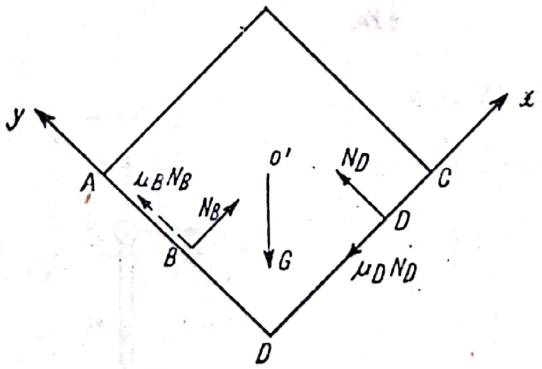


Fig. IV.9, *a'*

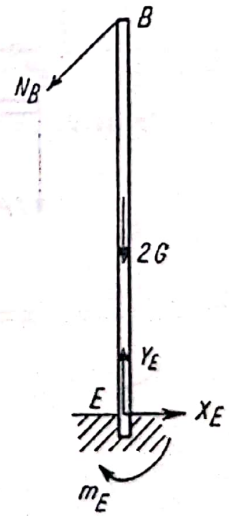


Fig. IV.9, *a''*

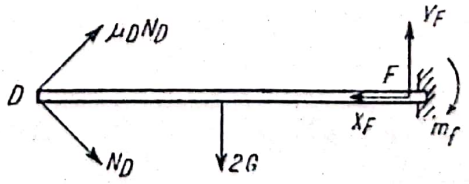


Fig. IV.9, *a'''*

Scanned with OKEN Scanner

10. Forţele $\bar{G}$, $\bar{T}$ (din fir) şi forţa totală $\bar{S}_A$ din A (rezultanta lui $\bar{N}_A$ cu $\mu_A \bar{N}_A$) sînt concurente la ∞, deci $\mu_A = \operatorname{tg}(90 - \theta)$.

T în fir. Din $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T = \dfrac{G \cos\theta}{1 + \cos\theta}$; $S_A = \dfrac{G}{1 + \cos\theta}$.

Elementele încastrării : $X_B = 0$; $Y_B = G + \dfrac{G}{1 + \cos\theta}$;

$$M_B = G\frac{R}{2} + \frac{G}{1 + \cos\theta} \cdot R.$$

11. *Solidificarea sistemului :* $X_A = P$ (spre stînga); $Y_A = 2P$ (în sus) $M_A = -2Pl$.

Bara EF (fig. IV.11, *a'*) : $M_D = 0 \Rightarrow Y_D = 4P$ (în jos); $Y_c = 6P$ (în sus).

Bara DB (fig. IV.11, *a''*). Y_D este în sus, deci din $\Sigma M_B = 0$: X_D e spre dreapta. $X_D = 4P$ deci $X_B = 4P$ spre stînga şi $Y_B = 4P$ în jos.

Pentru bara *EF*, X_D va fi spre stînga, iar $X_c = 3P$ spre dreapta.

Bara CA (fig. IV.11, *a'''*). Aci $Y_c = 6P$ e în jos iar $Y_B = 4P$ în sus, deci $Y_A = 2P$ în sus (verificare). X_B este spre dreapta şi X_c spre stînga deci $X_A = P$ spre stînga (verificare). Luînd $\Sigma M_A = 0$ se verifică de asemenea.

Din echilibrul *forţelor exterioare* sistemului :

$X_A = -P$; $Y_A = +2P$; $M_A = -2Pl$.

Forţe interioare : $X_B = 4P$; $Y_B = 4P$; $X_c = 3P$; $Y_c = 6P$; $X_D = 4P$; $Y_D = 4P$.

Aceste forţe apar două cîte două cu sensuri diferite.

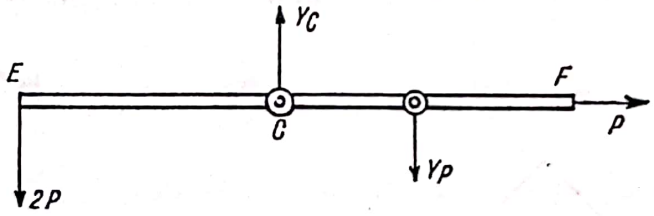


Fig. IV.11, *a'*

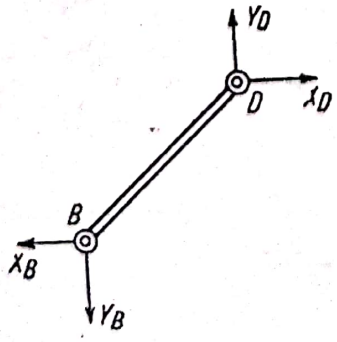


Fig. IV.11, *a''*

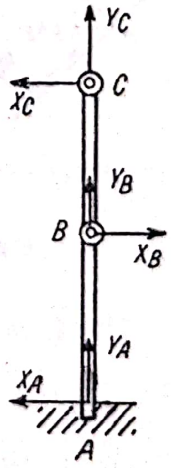


Fig. IV.11, *a'''*

Scanned with OKEN Scanner

12. a) Se vede că $\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{3l}$ deci $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{10}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $AB = l\sqrt{10}$.

Bara AB (fig. IV.12, *a'*) (axa Ox pe bară) $\Sigma X_i = 0$: $G\sin\alpha = \mu_A N_A$
$\Sigma Y_i = 0$: $N_B - G\cos\alpha + N_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$: $N_A l\sqrt{10} - G2l = 0$
de unde $N_A = \frac{2G}{\sqrt{10}}$; $N_B = \frac{G}{\sqrt{10}}$; $\mu_A = \frac{1}{2}$.

Cubul mare (fig. IV.12, *a''*). $\Sigma Y_i = 0$: $N_1 = 2G + N_A\cos\alpha + \mu_A N_A\sin\alpha = \frac{27G}{10}$
$\Sigma X_i = 0$: $-\mu_1 N_1 + \mu_A N_A\cos\alpha - N_A\sin\alpha = 0$ deci $\mu_1 = \frac{1}{27}$
$\Sigma M_c = 0$: $-\mu_A N_A\cos\alpha\cdot 2l + N_A\sin\alpha\, 2l + 2Gl - N_1 x = 0$
$x = \frac{2l}{3}$ (normala N_1 se deplasează).

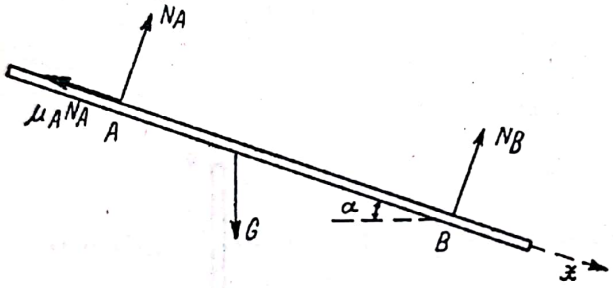


Fig. IV.12, *a'*

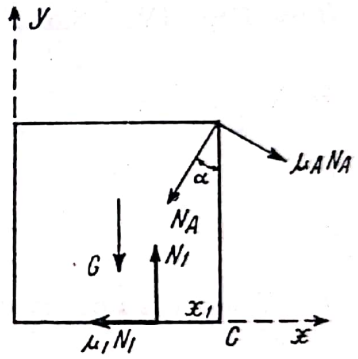


Fig. IV.12, *a''*

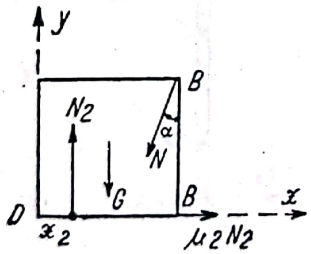


Fig. IV.12, *a'''*

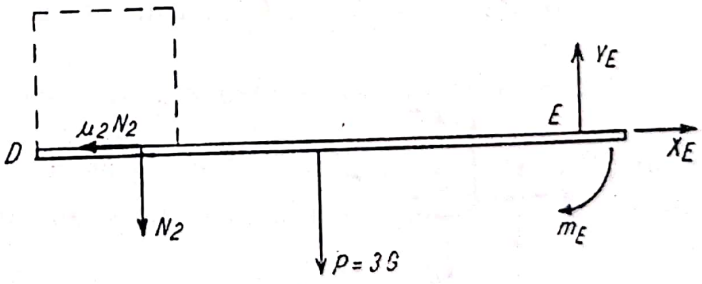


Fig. IV.12, *a*^{IV}

Cubul mic (fig. IV.12, *a*^{III}). Analog găsim $N_2 = \frac{13G}{10}$; $\mu_2 = \frac{1}{13}$;
$x = \frac{2}{13}l$.

Bara încastrată (fig. IV.12, *a*^{IV}). $X_E = \mu_2 N_2 = \frac{G}{10}$; $Y_E = N_2 + P =$
$= \frac{43G}{10}$; $M_E = N_2\left(4l - \frac{2l}{13}\right) + 3G\cdot 2l = 11Gl$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Aci $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$; $N_A = \frac{3G}{\sqrt{29}}$; $N_B = \frac{2}{5}G$; $S_A = \frac{3}{5}G$; $\mu_A = \frac{2}{5}$ (se deduce din faptul că $\bar{N}_B$, $\bar{G}$ și $\bar{S}_A$ trebuie să fie paralele).

Ca la (a) avem pentru *cubul mare* $N_1 = \frac{13G}{5}$; $\mu_1 = 0$, $x_1 =$ distanța la $C = \frac{10}{13}l$. Iar pentru *cubul mic* $\mu_2 = 0$; $N_2 = \frac{7G}{5}$; $x_2 = \frac{l}{2}$.

Deci *elementele încastrării* $X_E = 0$; $Y_E = \frac{22G}{5}$; $M_E = \frac{109}{10}Gl$.

13. *Inelul* (fig. IV.13, *a'*) din echilibrul greutății P se găsește $T = P$; $\Sigma X_i = 0 : P \sin 60 = N$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow P\cos 60° - G \pm \mu N = 0$ de unde

$$P = \frac{4G}{2 \pm \sqrt{3}}.$$

Bara (fig. IV. 13,*a''*). $X_A = -N$; $Y_A = 2G \pm \mu N = G\frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{2 \pm \sqrt{3}}$; $M_A = N\frac{l}{2}$.

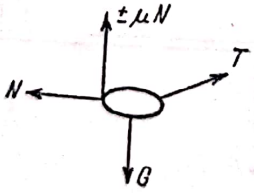


Fig. IV.13, *a'*

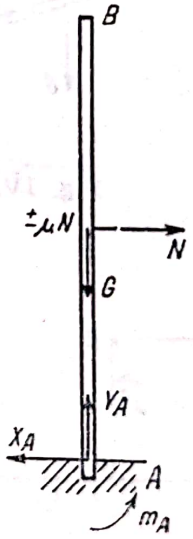


Fig. IV.13, *a''*

14. a) *Corpul* (fig. IV.14, *a'*). $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu N = \frac{G}{2}$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N = G$; $\Sigma M_0 = 0$ arată că $\bar{N}$ s-a deplasat în O deci corpul e la limita răsturnării.

Rezultă $\mu = \frac{1}{2}$.

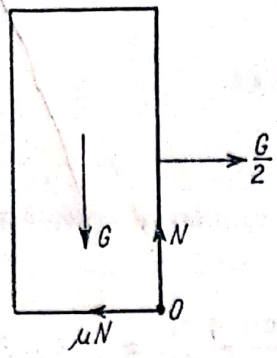


Fig. IV.14, *a'*

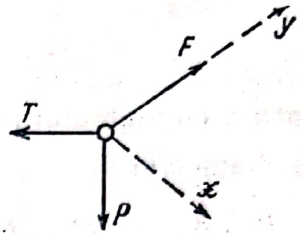


Fig. IV.14, *a''*

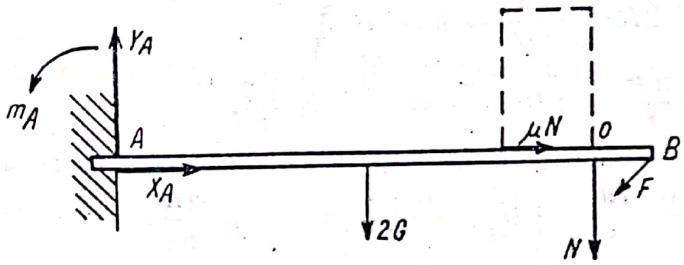


Fig. IV.14, *a'''*

Firul (fig. IV.14, *a''*). $T = \frac{G}{2} = P$. Se deduce forţa în bară din $\Sigma Y_i = 0$

$F = \frac{G\sqrt{2}}{2}$.

Bara AB (fig. IV.14, *a'''*). Găsim : $X_A = F\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N = 0$;

$Y_A = \frac{7G}{2}$; $M_A = \frac{19Gl}{4}$ (se remarcă deplasarea în O a lui N).

b) Aceleaşi rezultate pentru corp, ca la (a). Pentru bara AB, nu mai este F deci X_A va fi în sens contrar ca la (a). $X_A = -\frac{G}{2}$; $Y_A = 2G +$

$+ N = 3G$; $M_A = 2Gl + N\frac{7l}{4} = \frac{15Gl}{4}$.

15. *Bara AB :* $R_A = \frac{G}{2}$; $Y_B = \frac{G}{2}$; $X_B = 0$.

Bara CB : $Y_c = \frac{3}{2}G$; $X_c = 0$.

Bara CD : $Y_D = \frac{5}{2}G$; $X_D = 0$; $M_D = -G\frac{l}{2} - \frac{3}{2}Gl = 0 \Rightarrow M_D = 2Gl$.

Verificare : $R_A \cdot 2l - G\frac{3l}{2} - Gl - G\frac{l}{2} + M_D = 0 \Rightarrow M_D = 2Gl$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

CENTRE DE GREUTATE

1. a) Latura triunghiului este $l = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Luînd momente statice în raport cu diametrul

$$\frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi} - \frac{R^2\sqrt{3}}{3} = \left(\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{3}\right) y_G \Rightarrow y_G = \frac{2R(6-\sqrt{3})}{3(3\pi - 2\sqrt{3})} \approx 0{,}48\ R.$$

b) $\frac{2}{3}\cdot\pi R^3\cdot\frac{3R}{8} - \frac{\pi R^3}{9}\cdot\frac{R}{4} = \left(\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{\pi R^3}{9}\right) y_G \Rightarrow y_G = \frac{2}{5}R.$

2. a) $\frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi} = 2R\cdot h\cdot\frac{h}{2} \Rightarrow h = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$

b) $\frac{2}{3}\pi R^3\cdot\frac{3R}{8} = \pi R^2\cdot\frac{h^2}{2} \Rightarrow h = R\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. Luînd momentele statice în raport cu diametrul cercului

a) $G\frac{4R}{3\pi} - \frac{G}{4}\cdot\frac{2R}{\pi} = \left(G + \frac{G}{4}\right) y_G \Rightarrow y_G = \frac{2R}{3\pi}.$

b) $y_G = \frac{3\pi - 4}{10\pi} R \approx 0{,}17\ R.$

4. Axele de coordonate sînt date în figura V.4.

$\Sigma M_{statice}\ Ox : G\frac{R}{2} - G\frac{3R}{2} = 5G\ y_G$; $\Sigma M_{statice}\ Oy : G\frac{3R}{2} = x_G\ 5G.$

Obținem $x_G = \frac{3R}{10}$; $y_G = -\frac{R}{5}$.

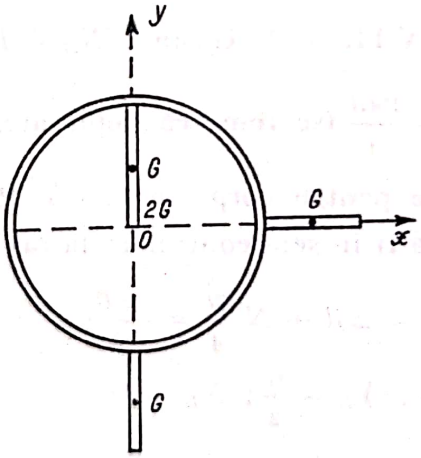


Fig. V.4

5. Momente statice în raport cu Ox (O în centrul cercului)

$$\gamma\pi R\cdot\frac{2R}{\pi} = \gamma(\pi R + 2R)\ y_G \Rightarrow y_G = \frac{2}{2+\pi}R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momente statice în raport cu Oy

$$\gamma R \cdot \frac{3R}{2} - \gamma R \frac{R}{2} = \gamma (\pi R + 2R) \; x_G \Rightarrow x_G = \frac{R}{2+\pi}.$$

6. Se iau axele de coordonate cu originea în centrul exagonului întreg. Toate greutățile G_i sînt egale cu G.

a) $\Sigma G_i = 5G$; $\Sigma G_i \; y_i = G\left(a + 2\frac{a}{2} - 2\frac{a}{2}\right)$; $x_G = 0$; $y_G = \frac{a}{5}$

unde a este apotema.

b) Dispare bara (3) $\Sigma G_i = 4G$

$$\Sigma G_i \; x_i = G \frac{a\sqrt{3}}{2}; \; x_G = \frac{a\sqrt{3}}{8}; \; \Sigma G_i \; y_i = 3G\frac{a}{2}; \; y_G = \frac{3}{8} a.$$

c) Dispare bara (5): $\Sigma G_i = 3G$; $\Sigma G_i \; y_i = 2G\,a$; $y_G = \frac{2}{3} a$; $x_G = 0$.

d) Dispare bara (2): $\Sigma G_i = 2G$; $\Sigma G_i \; x_i = G\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $x_G = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

$$\Sigma G_i \; y_i = \frac{3G}{2} a; \; y_G = \frac{3a}{4}.$$

7. a) Avem $G_1 = \frac{\gamma \pi \; 16 \; R^2}{2}$; $x_1 = 0$; $y_1 = \frac{16\,R}{3\pi}$;

$$G_2 = \frac{\gamma \; \pi \; R^2}{2}; \; x_2 = -3\,R; \; y_2 = -\frac{4R}{3\pi};$$

$$G_3 = \frac{\gamma \, \pi R^2}{2}; \; x_3 = -R; \; y_3 = \frac{4R}{3\pi};$$

$$G_4 = = \frac{\gamma \; 4\pi \; R^2}{2}; \; x_4 = 2\,R; \; y_4 = \frac{8R}{3\pi}.$$

Din ecuația momentelor statice în raport cu axele se găsește (fig. V.7):

$x_G = \frac{3R}{10}$; $y_G = \frac{18\,R}{5\pi} \approx 1{,}15\;R$.

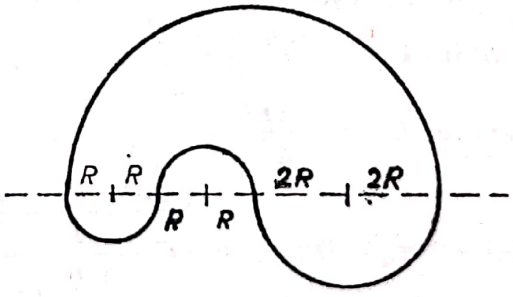


Fig. V.7

b) Aci: $G_1 = \gamma \, 4 \, \pi R$; $x_1 = 0$; $y_1 = \frac{8R}{\pi}$;

$$G_2 = \gamma \, \pi R; \; x_2 = -3R; \; y_2 = \frac{2R}{\pi};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$G_3 = \gamma\,\pi R;\ x_3 = -R;\ y_3 = \frac{2R}{\pi};$$

$$G_4 = \gamma\,2\,\pi R;\ x_4 = 2R;\ y_4 = -\frac{4R}{\pi}.$$

$$G_{total} = \Sigma G_i = 8\gamma\pi R;\ x_G = \frac{\Sigma G_i x_i}{\Sigma G_i} = 0;\ y_G = \frac{\Sigma G_i y_i}{\Sigma G_i} = \frac{3R}{\pi}.$$

8. a) Axa Oy coincide cu AD : G_1 (a pătratului) $= \gamma\,4R^2$; G_2 (a unui semicerc) $= \frac{\gamma\pi R^2}{2}$; $\Sigma G_i = \gamma\,4\,R^2$; $\Sigma G_i\ x_i = \gamma\,4\,R^2 \cdot R - \frac{\gamma\pi R^2}{2} \cdot \left(2R - \frac{4R}{3\pi}\right) -$

$$- \frac{\gamma\pi R^2}{2}\,\frac{4R}{3\pi};\ x_G = \frac{R\,(4-\pi)}{4}.$$

b) La corpuri $x_G = \frac{R}{3}$.

9. a) $\Sigma G_i = 10\,G$; $\Sigma G_i\ x_i = -G\ \frac{l}{2}$; $x_G = \frac{-l}{20}$; $\Sigma G_i\ y_i = Gl\sqrt{3} +$

$$+ G\,\frac{l\sqrt{3}}{6};\ y_G = \frac{7}{60}\,l\sqrt{3}$$ unde axa Ox pe OB, axa Oy pe OC.

b) Se scoate $4G$: $\Sigma G_i = 6G$; $\Sigma G_i x_i = 3G\,\frac{l}{2}$; $x_G = \frac{l}{4}$; $\Sigma\,G_i\ y_i =$

$$= \frac{7\,Gl\sqrt{3}}{6};\ y_G = \frac{7\sqrt{3}}{36}\,l.$$

Se scoate $3G$: $\Sigma G_i = 3G$; $x_G = 0$; $y_G = \frac{7\sqrt{3}}{18}\,l$.

10. a) $\Sigma G_i = 4G$ (fiecare triunghi de latură l, are greutate G); $\Sigma G_i\ y_i =$

$$= 2G\,\frac{l\sqrt{3}}{2}\,\frac{2}{3} + 2G\,\frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = Gl\sqrt{3};\ y_G = \frac{l\sqrt{3}}{4}$$ (de latură BC).

b) $\Sigma G_i = 4G$; $\Sigma G_i\ y_i = 3G\,\frac{l\sqrt{3}}{2}\,\frac{2}{3} + G\,\frac{l\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{7\,Gl\sqrt{3}}{6};\ y_G =$

$$= \frac{7l\sqrt{3}}{24}$$ de BC. $\Sigma G_i x_i = 3G\frac{l}{2}$; $x_G = \frac{3l}{8}$ față din verticala prin D.

11. *Axe*: BB este Ox, și AC este Oy.

Greutatea triunghiului $G_1 = \frac{\gamma \cdot 2R \cdot R}{2}$.

Greutatea semicercului $G_2 = \frac{\gamma\pi R^2}{2}$.

$$G_{total} = \frac{\gamma\,R^2}{2}\,(\pi + 2);\ x_G = 0;\ y_G = \frac{\frac{\gamma\,2R^2}{2} \cdot \frac{R}{2} - \frac{\gamma\pi R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi}}{\frac{\gamma\,R^2}{2}\,(\pi+2)} = \frac{-2R}{3\,(\pi+2)}.$$

b) Lungimea barelor $AB = l = R\sqrt{2}$, greutatea unei bare $G_1 =$

$$= \gamma R\sqrt{2}.$$

Lungimea semicercului $L = \pi R$, greutatea lui : $G_2 = \gamma\pi R$

$$\Sigma G_i = \gamma R\,(2\sqrt{2} + \pi);\ y_G = \frac{-R(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}+\pi},$$ Ox fiind diametrul BB.

Scanned with OKEN Scanner

c) $\frac{\gamma \pi R^3}{3} \cdot \frac{R}{4} - \frac{2}{3} \gamma \pi R^3 \cdot \frac{3R}{8} = \left(\frac{\gamma \pi R^3}{3} + \gamma \frac{2}{3} \pi R^3\right) y_G$; $y_G = \frac{-R}{6}$.

d) $y_G = \frac{-2R}{\pi + 2}$.

12. Vasul gol are centrul de greutate la $\frac{l}{2}$ de jos. Vasul plin cu apă are centrul de greutate tot la $\frac{l}{2}$ de jos. Cînd vasul are apă la înălțimea x centrul de greutate coboară.

Greutatea specifică a apei e dată de $\gamma = \frac{G}{\pi l^3}$.

Greutatea apei la înălțimea x este $G_1 = G\frac{x}{l}$.

$\Sigma M_{statice}$ în raport cu Ox (diametrul bazei);

$$G\frac{l}{2} + G\frac{x}{l}\frac{x}{2} = G\left(1 + \frac{x}{l}\right) y_G \Rightarrow y_G = \frac{l^2 + x^2}{2(l + x)}.$$

Determinarea minimului lui y_G dată de $\frac{\partial y_G}{\partial x} = 0$ sau $x^2 + 2xl - l^2 = 0$ de unde $x = l(\sqrt{2} - 1)$ și $y_G = l(\sqrt{2} - 1)$, adică centrul de greutate în poziția cea mai de jos este chiar pe suprafața apei.

13. a) Trebuie ca centrul de greutate al sistemului să fie în punctul de sprijin.

Greutatea semicercului: $G_1 = \frac{\gamma \pi R^2}{2}$.

Greutatea ABC: $G_2 = \gamma Rx$.

Luînd verticala prin reazem ca axă Oy:

$\Sigma M_{statice}$ în raport cu $Oy \Rightarrow \frac{\gamma \pi R^2}{2}\left(2R + \frac{4R}{3\pi}\right) - \gamma Rx\left(2R + \frac{x}{2}\right) = 0$,

de unde $x^2 + 4Rx - \frac{6\pi + 4}{3} R^2 = 0$; $x \approx 1{,}35\ R$.

b) $G_1 = \gamma \frac{2}{3} \pi R^3$; $G_2 = \gamma \frac{\pi R^2}{4} x$.

$$\Sigma M = \gamma \frac{2}{3} \pi R^3 \left(\frac{3R}{8} + 2R\right) - \frac{\gamma \pi R^2}{4} x \left(2R + \frac{x}{2}\right) = 0,\ x = 1{,}96\ R.$$

14. a) Centrul de greutate al unui semicerc se află la distanța $R + \frac{2R}{\pi}$ de axa de rotație. Lungimea traiectoriei sale într-o rotație este $2\pi R\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$ deci suprafața descrisă de un semicerc

$$S_1 = \pi R \cdot 2\pi R\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) = 2\pi R^2(\pi + 2).$$

Pentru cele trei semicercuri $S = 6\pi R^2(\pi + 2) \approx 61{,}7\ R^2$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $V_1 = \left(\frac{\pi R^2}{2} + 2R^2\right) \cdot \left(\frac{4R}{3\pi} + R\right) = \frac{R^3}{6\pi}(\pi + 4)(3\pi + 4) \approx 5{,}4\ R^3$.

$V_{total} = 16{,}2\ R^2$.

15. $CB = \frac{l}{2}$ deci raza semicercului $R = \frac{l}{4}$; $AC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi l}{4}\left(\frac{2R}{\pi}\cos 60° + R\cos 30°\right) = \frac{l^2}{32}(14 + \pi\sqrt{3}) = 0{,}6\ l^2$.

Capitolul VI

RĂSTURNĂRI, ROSTOGOLIRI

1. Din sistemul solidificat rezultă pentru echilibru $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Din $\Sigma M_B = 0$: $G\sin\alpha\left(\frac{h+l}{2}\right) + 2G\sin\alpha\,\frac{l}{4} - 3G\cos\alpha\,\frac{l}{2} = 0$, se capătă: $h = \frac{l(3\cos\alpha - 2\sin\alpha)}{\sin\alpha}$; aceasta este valoarea lui h la limita răsturnării pentru α dat (fig. VI.1).

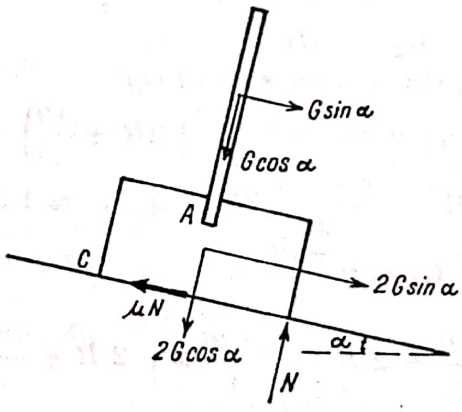


Fig. VI.1

Se vede că:

pentru: $h > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < \frac{3}{2}$, $\alpha < 56°15'$;

$h = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\alpha = 56°15'$ bara se reduce la un punct material de greutate G lipit în A;

pentru $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha \approx 64°25'$, corpul de jos se răstoarnă chiar dacă nu mai e nimic pe el;

pentru $\frac{3}{2} < \operatorname{tg}\alpha < 2$ (de ex. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$) căpătăm $h < 0$ (imposibil) deci orice lungime de bară răstoarnă sistemul, iar corpul de jos, singur, nu se răstoarnă.

Elementele încastrării : $X_A = G \sin\alpha$ (Ox paralel cu planul înclinat ($Y_A = G\cos\alpha$; $M_A = G \sin\alpha \frac{h}{2}$.

2. a) *Bara AB* (fig. VI.2, *a'*). $\Sigma M_A = 0$; $N_1\, 2l - G\frac{3l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{3G\sqrt{3}}{8}$.

Cubul (fig. VI.2, *a''*). *Răsturnare în raport cu E.* $\bar{N}_0$ reacțiunea solului se deplasează în E.

$$\Sigma M_E = 0 : \frac{N_2\sqrt{3}}{2} l - 2G\frac{l}{2} - \frac{3G\sqrt{3}}{8}\frac{l}{2} - \frac{N_2 l}{2} = 0.$$

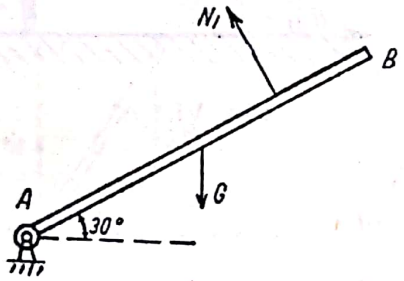


Fig. VI.2, *a'*

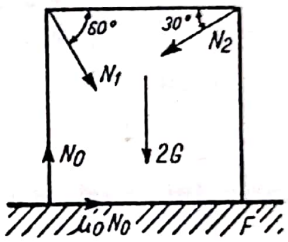


Fig. VI.2, *a''*

De unde $N_2 = \frac{16 + 3\sqrt{3}}{8(\sqrt{3}+1)} G = \frac{19\sqrt{3}+25}{16} G$.

Bara CD : $N_2\frac{2}{3} a = P\frac{a}{4} \Rightarrow P = \frac{19\sqrt{3}+25}{6} G$.

De la cub : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_0 = 2G + N_1 \sin 60° + N_2 \sin 30°$

$\mu_0 N_0 = N_2 \cos 30° - N_1 \cos 60°$ deci $\mu_0 \approx 0{,}6$.

b) S-ar putea ca P să fie atît de mic încît răsturnarea să aibă loc în celălalt sens :

La bara AB avem același rezultat $N_1 = \frac{3G\sqrt{3}}{8}$.

La cub. Studiind răsturnarea în raport cu F : $\bar{N}_0$ se deplasează în F

$\Sigma M_F = 0$; $\frac{N_1}{2} l - 2G\frac{l}{2} - N_1\frac{\sqrt{3}}{2} l - N_2\frac{\sqrt{3}}{2} l = 0$ deci :

$$N_2 = -\frac{3G}{8}(\sqrt{3}-1) - \frac{2G}{\sqrt{3}}$$

$N_2 < 0$, problema este imposibilă, cubul nu se poate răsturna în raport cu F.

Scanned with OKEN Scanner

3. *Sfera* (fig. VI.3, *a'*). $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{N_1}{2}$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_1 = 2G\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bara (fig. VI.3, *a''*) $\left(BD = \frac{l\sqrt{3}}{4} \right)$; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{G}{2}(2+\sqrt{3})$.

Tubul (fig. VI.3, *a'''*). N_0, reacțiunea solului, se deplasează în A la limita răsturnării.

$$N_0 = P\,;\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow P = \frac{G\,(3+\sqrt{3})}{3}\,.$$

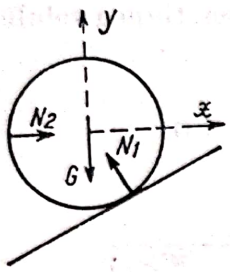


Fig. VI.3, *a'*

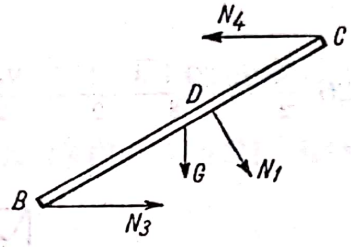


Fig. VI.3, *a''*

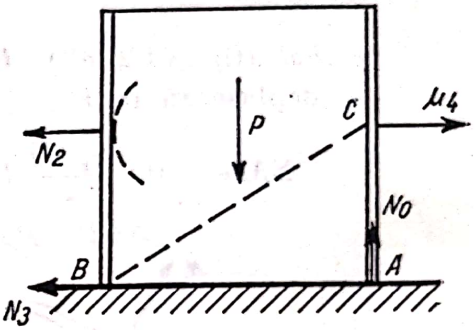


Fig. VI.3, *a'''*

4. *Bara* (fig. VI.4, *a'*). Greutatea barei $G = \gamma l$:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow N_1 l \sin\alpha = \frac{\gamma l^2}{2}\cos\alpha.$$

Tubul (fig. VI.4, *a''*). $N_1 l \sin\alpha = P\,\frac{l}{2}\cos\alpha \Rightarrow \gamma = \frac{P}{l}$.

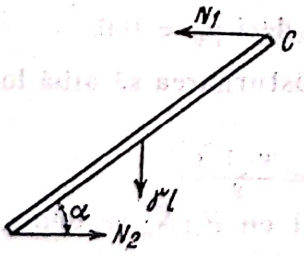


Fig. VI.4, *a'*

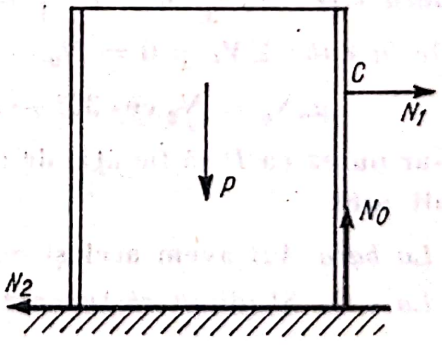


Fig. VI.4, *a''*

5. *Bara* AB. $N_B = \frac{2G\sqrt{3}}{2}$; $X_A = N_B$; $Y_A = N_B$.

Bara CD: $N_D = \frac{7G\sqrt{3}}{4}$ $P = \frac{5G}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

6. a) (1) *Determinarea lui* μ_1.

Bara AB (fig. VI.6, *a'*). $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_D = G$; $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = G\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{5G}{2}.$$

Bara AC (fig. VI.6, *a''*). $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu_1 N_1 = \frac{G\sqrt{3}}{2}$; $\Sigma Y_i = 0$: $N_1 = \frac{7G}{2} \Rightarrow \mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{7}$.

$\Sigma M_A = 0$ dă poziţia lui $\bar{N}_1$, distanţa x de la N_1 la A :

$$N_1 x = 2G\frac{l}{2} \Rightarrow x = \frac{l}{7}.$$

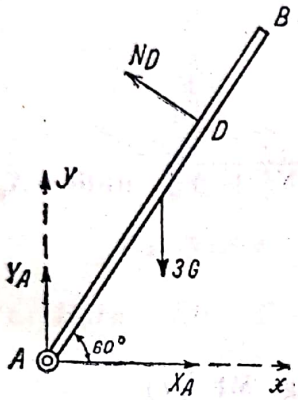


Fig. VI.6, *a'*

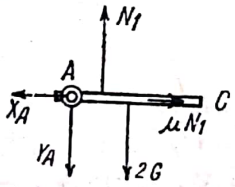


Fig. VI.6, *a''*

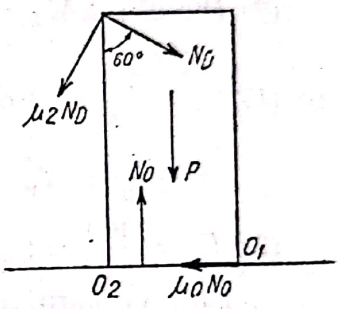


Fig. VI.6, *a'''*

(2) *Determinarea lui* μ_2. De la bara AB avem din $\Sigma M_A = 0$ acelaşi $N_D = G$ dar avem de-a lungul barei şi $\mu_2 N_D$ în sus.

Deci : $X_A = G\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu_2 G}{2}$; $Y_A = 3G - \frac{G}{2} - \mu_2 \frac{G\sqrt{3}}{2}$.

Din bara AC : $X_A = 0$; $\mu_2 = \sqrt{3}$.

(3) *Determinarea lui* μ_0. Echilibrul prismei (fig. VI.6, *a'''*) :

$$\Sigma X_i = 0 : N_D\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu_2 N_D - \mu_0 N_0 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0 : N_0 = P + \frac{N_D}{2} + \mu_2 N_D \frac{\sqrt{3}}{2}$$

deci $N_0 = P + \frac{G}{2} + \mu_2 G\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cazul (1) $\mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_0 = \frac{G\sqrt{3}}{2P+G}$. Cazul (2) $\mu_2 = \sqrt{3}$ obţinem $\mu_0 = 0$.

(4) Se arată prin momente în raport cu O_1($\bar{N}_0$ are punct de aplicare în O_1) că pentru $\mu_2 = 0$: $P = G(2\sqrt{3} - 1)$ iar pentru $\mu_2 = \sqrt{3}$, $P = -4G$, nu există răsturnare posibilă.

Scanned with OKEN Scanner

b) (1) $N_B = G\frac{\sqrt{3}}{2}$; $N_1 = 4G$, $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$; $x = \frac{l}{8}$;

(2) imposibil (din echilibrul barei AC se capătă $X_A = 0$, deci $N_B = 0$);

(3) $N_0 = P$, $\mu_0 = \frac{G\sqrt{3}}{2P}$;

(4) $P = G\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

c) identic cu (a).

d) identic cu (b).

7. a) (1) *Bara* AB: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_D = \frac{2G}{3}$; $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = \frac{G\sqrt{3}}{3}$;

$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{5G}{3}$.

Bara AC: $N_0 = \frac{8G}{3} \Rightarrow \mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$;

(2) *Discul*: $\Sigma M_E = 0 \Rightarrow s = \frac{R\sqrt{3}}{10}$; $\mu' = \frac{\sqrt{3}}{10}$.

b) (1) $\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Forța la articulație $F_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$ unde $X_0 = G\frac{\sqrt{3}}{3}$; $Y_0 = \frac{10\,G}{3}$.

(2) $F_0 \approx \frac{10{,}1}{3}G$; $\mu' = \frac{3R}{10{,}1\,r}$.

c) *La bara* AC nefiind frecare $X_A = 0$; $Y_A = G$ (fig. VI.7, *c*).

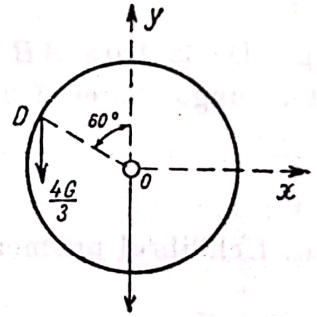


Fig. VI.7, c

Bara AB. $\bar{Y}_A$ și $\bar{G}$ sînt concurente la ∞ deci $\bar{S}_D$ (forța totală în D) e paralelă cu ele și face $\sphericalangle \varphi_D$ de frecare cu $\bar{N}_D$ (normala la bară) $\varphi_D = 60$; $\mu_D = \operatorname{tg}\varphi_D = \sqrt{3}$.

Se deduce $Y_A = \frac{2G}{3}$; $S_D = \frac{4G}{3}$.

Discul: $F_0 = Y_0 = 3G + \frac{4G}{3} = \frac{13\,G}{3}$; $\Sigma M_0 = 0 : \frac{4G}{3}R\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \mu' F_0 r \Rightarrow \mu' = \frac{2R\sqrt{3}}{13\,r}$.

Scanned with OKEN Scanner

8. *Bara* (fig. VI.8, *a'*). $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_c = \frac{G}{\cos\alpha}$; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow N_A = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha$;

$N_B = \frac{3G}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Sfera (fig. VI.8, *a''*): $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_0 = P + N_c\cos\alpha = P + G$;

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu_0 N_0 = N_c \sin\alpha = G\operatorname{tg}\alpha;\ \mu_0 = \frac{G}{P+G}\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\Sigma M_0 = 0: N_0 s - N_c R\sin\alpha = 0 \Rightarrow s = \frac{GR}{G+P}\operatorname{tg}\alpha.$$

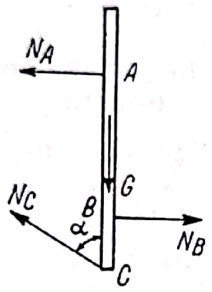


Fig. VI.8, *a'*

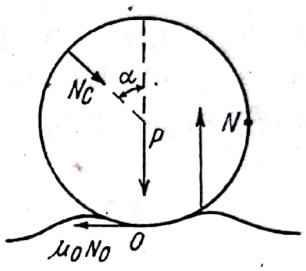


Fig. VI.8, *a''*

9. a) *Bara cotită*: $\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow N_D = P$.

Cubul: $\Sigma M_E = 0 \Rightarrow N_D = G$; deci $P = G$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_E = G$ ($\bar{N}$ s-a deplasat la răsturnare în E), $\mu N_E = N_D$; $\mu = 1$.

Sistemul de bare (fig. VI.9, *a*). Sistem solidificat: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow X_B = G$.

Bara BC: $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{2G}{3}$; $X_c = G$; $Y_c = \frac{2G}{3}$ $X_A = -2G$;

$Y_A = \frac{G}{3}$.

b) Avem $\Sigma M_0 = 0$ *(bara cotită)* $N_D = 2P$.

Sfera (fig. VI.9, *b'*). Avem $N_0 = G$; $\mu_0 N_0 = 2P$; $\mu_0 = \frac{2P}{G} = \frac{1}{10}$.

$$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow N_D R = N_0 s \Rightarrow s = \frac{2P}{G}R = \frac{2P}{G}l = \frac{l}{10}.$$

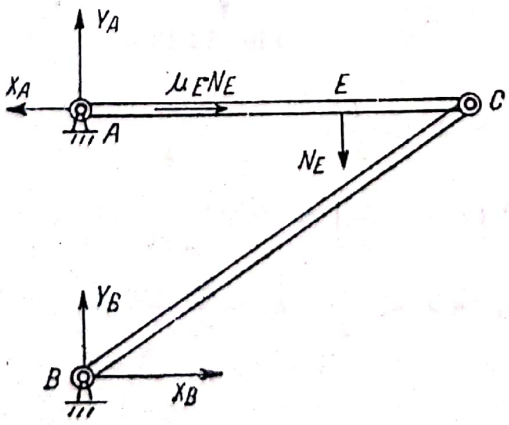


Fig. VI.9, *a*

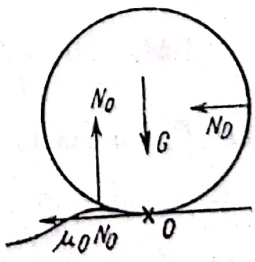


Fig. VI.9, *b'*

Scanned with OKEN Scanner

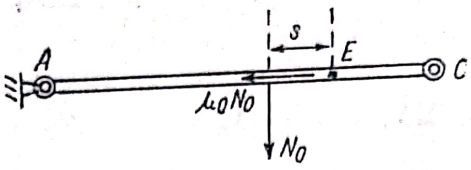


Fig. VI.9, b''

Sistemul de bare : Sistemul solidificat : $X_B = \frac{19}{20} G$; $X_A = -\frac{17\,G}{20}$.

Bara BC (fig. VI.9, b'') : $Y_B = \frac{19\,G}{30}$; $Y_A = \frac{11\,G}{30}$; $Y_c = \frac{19\,G}{30}$ $X_c = \frac{19}{20} G$.

10. *Cercul* (fig. VI.10, a'') : Forța $\bar{F}_A$ poate fi la cerc în jos sau în sus, deci rotirea se poate face la dreapta sau la stînga (F_A punctat).

Caz I ($\bar{F}_A$ *în jos*) $\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow F_A \frac{R}{2} = N_0 s$ ($\bar{N}_0$ deplasat spre dreapta)

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_0 = G + F_A \; ; \; F_A = \frac{G}{4} .$$

Caz II ($\bar{F}'_A$ *în sus*) (punctat pe figură), $\bar{N}_0$ deplasat spre stînga

$$\Sigma M_0 = 0 \; ; \; F'_A \frac{R}{2} = N_0 s \; ; \text{ dar } N_0 = G - F'_A \text{ deci } F'_A = \frac{G}{6} .$$

Bara (fig. VI.10, a'') :

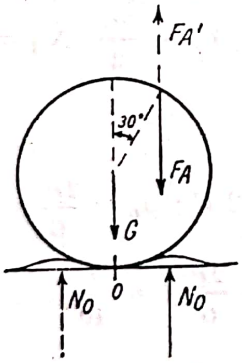


Fig. VI.10, a'

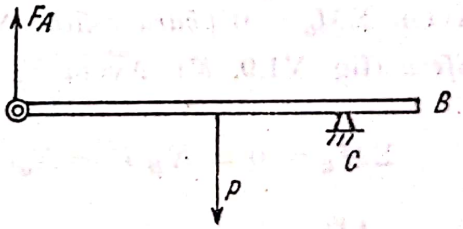


Fig. VI.10, a''

Caz I ($\bar{F}_A$ în sus la bară). $AC = x < \frac{l}{2}$,

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow F_A \; x = P \left(x - \frac{l}{2} \right) \Rightarrow P = \frac{Gx}{2\,(2x - l)} .$$

Caz II ($\bar{F}_A$ în jos la bară). $A_c = x < \frac{l}{2}$; $P = \frac{Gx}{3\,(l - 2x)}$.

Deci: în cazul I : $0 < x < \frac{l}{2}$,

cazul II : $\frac{l}{2} < x \leqslant l$.

Cazul $x = 0$ pentru $P \neq 0$ dă răsturnare a barei și a cercului.

Cazul $x = \frac{l}{2}$, nu se capătă forță în A. Bara nu acționează asupra cercului.

11. a) *Frecare numai la cub*

Din echilibrul sferei (fig. VI.11, a')

$$\Sigma X_i = 0 \ (Ox \text{ paralel cu planul} \Rightarrow T = G\sqrt{3}$$

Din echilibrul cubului (fig. VI.11,a'')

$$N_1 = \frac{G\sqrt{3}}{2} + \frac{T}{2}\ ;\ \mu_1 N_1 = \frac{T\sqrt{3}}{2} - \frac{G}{2} \Rightarrow \mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

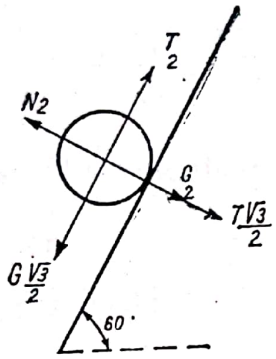


Fig. VI.11, a'

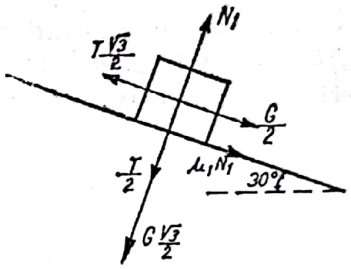


Fig. VI.11, a''

Frecarea numai la sferă

Din echilibrul cubului (fig. VI.11, a''')

$$T = \frac{G\sqrt{3}}{3}\ .$$

Din echilibrul sferei (fig. VI.11, a^{IV})

$$N_2 = \frac{T\sqrt{3}}{2} + \frac{G}{2}\ .$$

$$\mu_2 N_2 = \frac{G\sqrt{3}}{2} - \frac{T}{2} \Rightarrow \mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ \frac{G\sqrt{3}}{2} R - \frac{T}{2} R - N_2 s = 0 \Rightarrow s = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

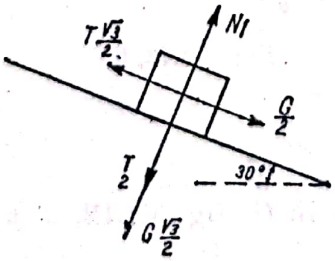


Fig. VI.11, a'''

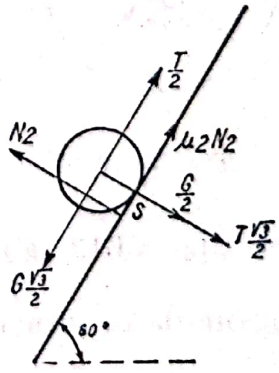


Fig. VI.11, a^{IV}

b) Găsim analog pentru cazul:

frecării numai la cub: $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $T = \frac{G\sqrt{3}}{3}$;

frecarea numai la sferă: $T = G\sqrt{3}$; $\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $s = \frac{\sqrt{3}}{3} R$.

12. a) *Sfera de sus* (fig. VI.12, *a'*): $\sin\alpha = \frac{R}{R+r}$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{P}{2\cos\alpha}$.

Grafic (fig. VI.12, *a''*) se determină reacțiunile N_1.

Sfera de jos (fig. VI.12, *a'''*) $\Sigma X_i = 0$: $\mu_0 N_0 = N_1 \sin\alpha = \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha$;

$$\Sigma Y_i = 0: N_0 = G + N_1\cos\alpha = G + \frac{P}{2} \Rightarrow \mu_0 = \frac{P}{2G+P}\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\Sigma M_0 = 0: N_1 R\sin\alpha = N_0 s \Rightarrow s = \frac{PR}{2G+P}\operatorname{tg}\alpha.$$

μ_0 și s cresc cu α, cînd r scade.

Grafic (fig. VI.12, *a*^{IV}) se duc G și N_1 cunoscute și rezultă N_0, μ_0, N_0 verticală respectiv orizontală.

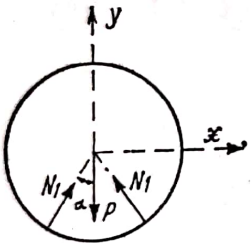


Fig. VI.12, *a'*

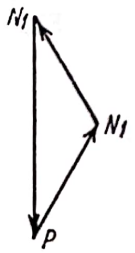


Fig. VI.12, *a''*

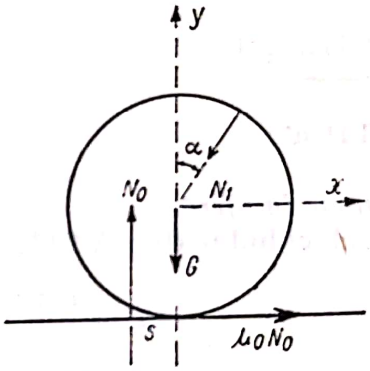


Fig. VI.12, *a'''*

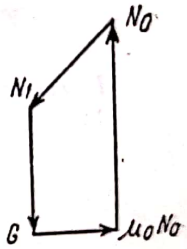


Fig. VI.12, *a*^{IV}

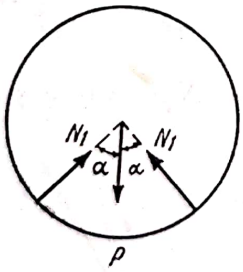


Fig. VI.12, *b'*

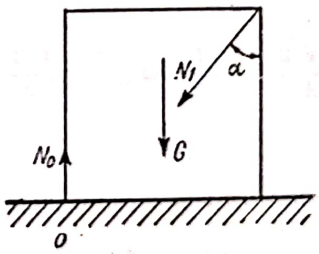


Fig. VI.12, *b''*

b) *Sfera* (fig. VI.12, *b'*) $N_1 = \frac{P}{2\cos\alpha}$.

Un cub (la răsturnare $\bar{N}_0$ se deplasează în O, fig. VI.12, *b''*).

$$N_0 = G + \frac{P}{2}; \quad \mu_0 = \frac{P}{2G+P}\operatorname{tg}\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Sigma M_0 = 0:\ N_1 \sin\alpha\, l = N_1 \cos\alpha\, l + G\frac{l}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{P+G}{P} > 1,$$

iar $d = 2r\ \sin\alpha = 2r\ \dfrac{P+G}{\sqrt{P^2+(P+G)^2}}$; deci $\mu_0 = \dfrac{P+G}{2G+P}$.

13. a) *Bara* BC: $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow N_D = \dfrac{G}{3}$; $\Sigma X_i = 0: X_D = -\dfrac{G\sqrt{3}}{6}$; $Y_B = \dfrac{5G}{6}$.

Bara AB: $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = -\dfrac{G\sqrt{3}}{6}$; $Y_A = \dfrac{11\,G}{6}$; $M_A = -\dfrac{16}{3}\,Gl.$

Sfera: $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_0 = 3G + N_D \cos 60 = \dfrac{19\,G}{6}$; $\mu_0 N_0 = N_D \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{G\sqrt{3}}{6}$; $\mu_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{19}$; $s = \dfrac{\sqrt{3}R}{19}$.

b) $N_D = \dfrac{G}{3}$; $X_B = \dfrac{G\sqrt{3}}{6}$; $Y_B = \dfrac{5G}{6}$; $X_A = +\dfrac{G\sqrt{3}}{6}$; $Y_A = \dfrac{11\,G}{6}$;

$M_A = \dfrac{2G\sqrt{3}}{3}$; $\mu_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{19}$; $s = \dfrac{\sqrt{3}R}{19}$.

14. *Bara* AC: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_D = G\sqrt{3}$.

Sfera (fig. VI.14): $\Sigma Y_i \Rightarrow N_0 = N_D + G\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}\,G\sqrt{3}$;

$$\Sigma X_i \Rightarrow \mu_0 N_0 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\,\frac{3}{2}\,G\sqrt{3} = \frac{3}{8}\,G < \frac{G}{2};$$

deci $\mu_D N_D > 0$. $\mu_D N_D + \mu_0 N_0 = \dfrac{G}{2} \Rightarrow \mu_D = \dfrac{1}{8\sqrt{3}}$.

$$\Sigma M_0 = 0;\ \frac{G}{2}\,R - \mu_D N_D\,2R - N_0 s = 0 \Rightarrow s = \frac{R}{6\sqrt{3}}.$$

Încastrarea: a) $X_B = \dfrac{9\sqrt{3}}{16}\,G$; $Y_B = \dfrac{73}{16}\,G$; $M_B = \dfrac{49}{16}\,G$.

b) $N_D = G\sqrt{3}$; $\mu_D = \dfrac{1}{8\sqrt{3}}$; $s = \dfrac{R}{6\sqrt{3}}$; $X_A = \dfrac{9}{16}\,G\sqrt{3}$; $Y_A = \dfrac{25}{16}\,G$;

$$X_B = \frac{9}{16}\,G\sqrt{3};\ Y_B = \frac{73}{16}\,G;\ M_B = \frac{9}{16}\,G\sqrt{3}\,l.$$

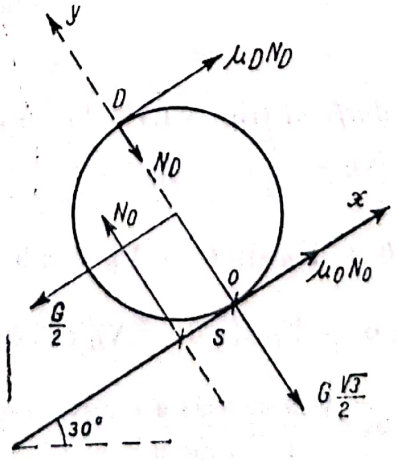


Fig. VI.14

15. a) *Bara*: $P \cos 60 \frac{3l}{4} = 3G \frac{l}{4} \Rightarrow P = 2G$; $N_B = 2G$; $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{P\sqrt{3}}{2} = \mu_B N_B \Rightarrow \mu_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sfera: $N_D = 2G$; $\mu_D N_D = \mu_B N_B \Rightarrow \mu_D = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\Sigma M_D = 0$:

$$\mu_B N_B R = N_D s \Rightarrow s = \frac{2\sqrt{3}}{3} R.$$

b) $X_0 = \mu_B N_B = G\sqrt{3}$; $Y_0 = 3G$; $M_{fr} = \mu_0 r_0 \sqrt{3G^2 + 9G^2} = 2G\sqrt{3}\,\mu_0 r_0$.

Din $\Sigma M_0 = 0$ obţinem $\mu_B N_B R = 2G\sqrt{3}\,\mu_0 r_0 \Rightarrow \mu_0 = \sqrt{\frac{R}{2r_0}}$.

16 a) *Din sistemul de bare solidificat*: $Y_B = G$. De la $\Sigma M_A = 0$ pentru una din bare: $G\frac{l}{2}\sin\theta - Gl\sin\theta + X_B l\cos\theta = 0 \Rightarrow X_B = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\theta$.

(X_B şi Y_B) fiind forţele în articulaţia B).

De la o rotiţă; $N_0 = 5G$; $\mu_0 N_0 = X_B = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\theta$; $\mu_0 = \frac{1}{10}\operatorname{tg}\theta$.

Din $\Sigma M_0 = 0$: $s = \frac{r}{10}\operatorname{tg}\theta$.

N_0 fiind reacţiunea solului asupra rotiţei.

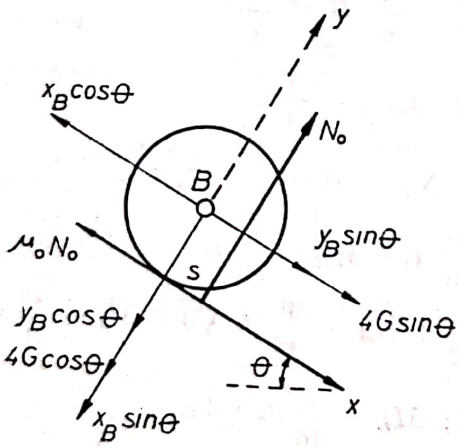


Fig. VI.16, b

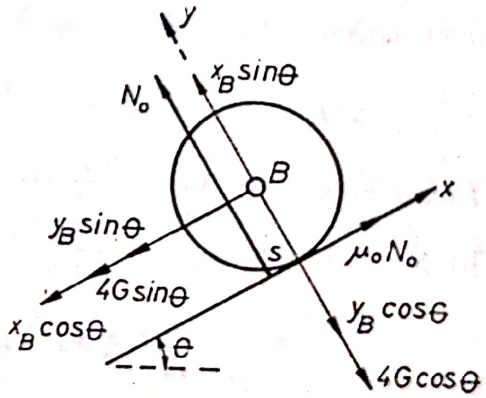


Fig. VI.16, c

b) *Din sistemul de bare solidificat* (fig. VI.16, *b*): $Y_B = G$. De la $\Sigma M_A = 0$ pentru una din bare $X_B = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\theta$.

Rotiţa: $N_0 = 4G\cos\theta + X_B\sin\theta + Y_B\cos\theta = \frac{G}{2\cos\theta}(1 + 9\cos^2\theta)$;

$$\mu_0 N_0 = 4G\sin\theta + Y_B\sin\theta - X_B\cos\theta = \frac{9}{2}G\sin\theta;$$

$$\mu_0 = \frac{9\sin\theta\cos\theta}{1 + 9\cos^2\theta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$N_0 s = (4G \sin\theta + Y_B \sin\theta - X_B \cos\theta) r,$$

$$s = \frac{9 \sin\theta \cos\theta \, r}{1 + 9\cos^2\theta}.$$

c) (fig. VI.16, *c*): $X_B = \frac{G}{2} \operatorname{tg}\theta$; $Y_B = G$; $N_0 = 4G\cos\theta + Y_B \cos\theta -$

$- X_B \sin\theta = \frac{G}{2\cos\theta}(10\cos^2\theta - \sin^2\theta)$;

$\mu_0 N_0 = \frac{11G}{2}\sin\theta$; $\mu_0 = \frac{11 \sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta + 9\cos^2\theta}$; $s = \frac{11 \sin\theta\cos\theta \, r}{\cos 2\theta + 9\cos^2\theta}$.

17. Se găsește $\operatorname{tg}\alpha = \mu$. *Emisfera.* $\Sigma M_0 = 0$: $Gx\cos\alpha - G\frac{3R}{8}\sin\alpha \mp$

$\mp N_0 s = 0$;

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_0 = 2G.$$

$$x = \frac{3}{8} R \operatorname{tg}\alpha \mp \frac{2s}{\cos\alpha} \text{ sau } x_{max} = \frac{3}{8} R\mu + 2s\sqrt{1+\mu^2},$$

x_{max} cere deplasarea lui $\bar{N}_0$ ca în figura VI.17.

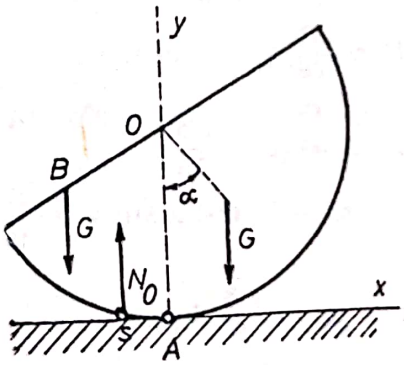


Fig. VI.17

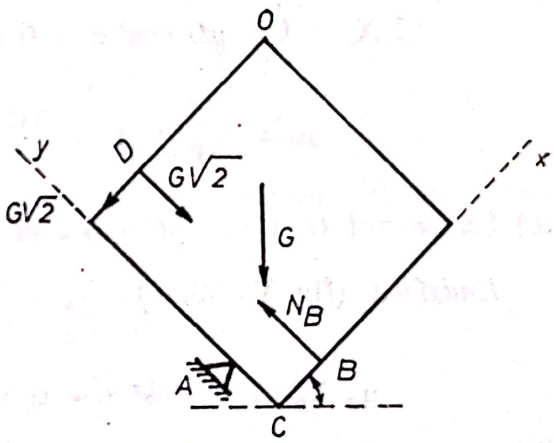


Fig. VI.18

18 $2G\sin\alpha = \mu\, 2G\cos\alpha$, $\alpha = 45°$; $\mu = 1$.
La răsturnare $N_B = 0$ (fig. VI.18). Luînd $\Sigma M_A = 0$,

$$G\frac{l}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2G\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{3l}{8}.$$

19 a) *Echilibrul corpului G*:

$$P + G\sin\alpha = \mu G\cos\alpha \Rightarrow \mu = \frac{11}{15}\sqrt{3}.$$

Echilibrul emisferei (fig. VI.19, *a*): $\Sigma M_0 = 0$: $G\cos\alpha\frac{R}{2} - 2G\frac{3R}{8}\sin\alpha -$

$- N_0 s = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

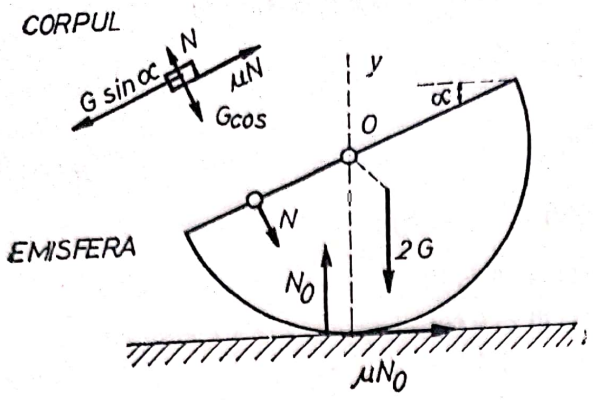


Fig. VI.19, *a*

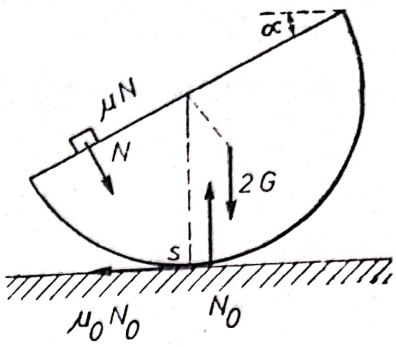


Fig. VI.19, *b*

Deci $G\cos\alpha$ şi $\mu G\cos\alpha$ lucrează invers ca la corpul G.

$$\Sigma Y_i = 0 : N_0 = 2G + G\cos^2\alpha + \mu G\cos\alpha\sin\alpha$$

$$N_0 = \frac{13}{10}\,G.$$

$$\Sigma X_i = 0 : \ \mu G\cos^2\alpha - G\cos\alpha\sin\alpha - \mu_0\frac{33}{10}\,G = 0$$

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{11}\ ;\quad s = \frac{5\,(2\sqrt{3}-3)}{4\cdot 33}\,R \approx \frac{R}{66}\ .$$

b) La *corpul* G avem $\mu G\cos\alpha = P - G\sin\alpha \Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{15}$.

Emisfera (fig. VI.19, *b*): $N_0 = 2G + G\cos^2\alpha - G\cos\alpha\sin\alpha = \frac{27}{10}G$;

$$\mu_0 N_0 = \mu G\cos^2\alpha + G\cos\alpha\sin\alpha \Rightarrow \mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{9}\ ;$$

$$\Sigma M_0 = 0 : \ G\cos\alpha\,\frac{R}{2} - 2G\,\frac{3R}{16} - N_0 s = 0.$$

20. a) *Cubul de sus* : $s = \frac{5(2\sqrt{3}-3)}{4\cdot 27}\,R \approx \frac{R}{54}$.

$\bar{F}$, $\bar{G}$ şi $\bar{S}_D$ (rezultanta lui $\bar{N}_D$ cu $\mu_D\,\bar{N}_D$) (fig. VI.20,*a'*), trebuie să fie concurente : $\operatorname{tg}\varphi_D = \mu_D$; $\operatorname{tg}\varphi_D = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$; $\mu_D = \frac{1}{2}$. Triunghiul forţelor e dat în figura VI.20, *a''*.

Analitic (fig. VI.20, *a'''*). $\Sigma M_0 = 0 : \ F\,\frac{l\sqrt{2}}{2} = \mu_D\,N_D\,\frac{l}{2}$; $\Sigma Y_i = 0 : N_D\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu_D\,N_D\,\frac{\sqrt{2}}{2} = G.$

$$\Sigma X_i = 0 : F + \mu_D N_D\,\frac{\sqrt{2}}{2} - N_D\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

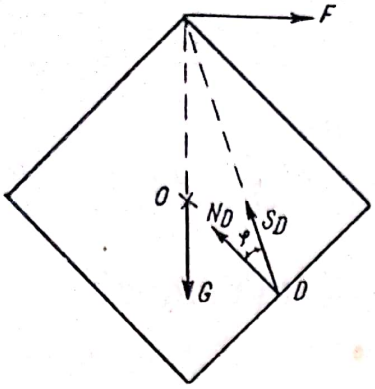


Fig. VI.20, a'

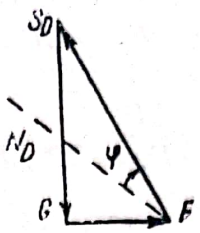


Fig. VI.20, a''

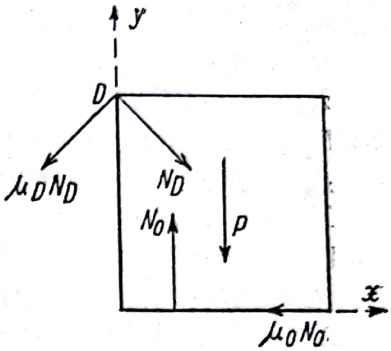


Fig. VI.20, a'''

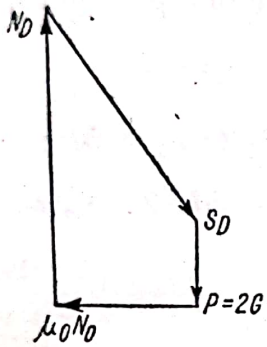


Fig. VI.20, a^{IV}

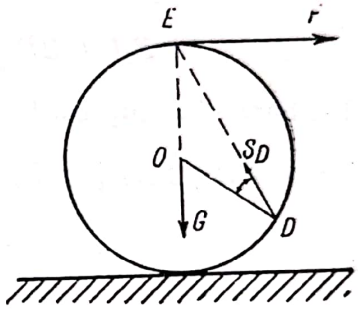


Fig. VI.20, b

Se determină $N_D = \frac{2G\sqrt{2}}{3}$; $\mu_D = \frac{1}{2}$; $F = \frac{G}{3}$.

Cubul de jos (fig. VI.20, a^{IV}): $N_0 = 3G$; $\mu_0 = \frac{1}{9}$.

b) *Sfera* (fig. VI.20, *b*). Ttriunghiul *DOE* este isoscel; găsim $\varphi_D = 30°$;

$$\mu_D = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$F = \frac{G\sqrt{3}}{3}; \quad N_D = G.$$

La cubul de jos $N_0 = 3G$: $\mu_0 N_0 = \frac{G\sqrt{3}}{3}$; $\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Grafic la ambele cazuri (a) şi (b) se construieşte poligonul cunoscînd S_D şi P apoi ducînd N_0 vertical şi $\mu_0 N_0$ orizontal.

Capitolul VII

GRINZI CU ZĂBRELE

1. $F_1 = P\sqrt{3}$; $F_2 = -2P$; $F_3 = 2P$; $F_4 = -P\sqrt{3}$; $F_5 = -3P$; $F_6 = 5P$; $F_7 = -\frac{3}{2}P$.

$R_B = \frac{5P\sqrt{3}}{2}$; $X_A = -\frac{5P\sqrt{3}}{2}$; $Y_A = 4P$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $F_1 = -P$; $F_2 = P\sqrt{2}$; $F_3 = 2P$; $F_4 = -P\sqrt{2}$; $F_5 = -P$;
$F_6 = 3P$; $F_7 = -3\sqrt{2}\cdot P$
$X_A = -2P$; $Y_A = 5P$; $T = P$ (forța în fir).

b) $F_1 = 3P$; $F_2 = -3P\sqrt{2}$; $F_3 = 2P$; $F_4 = 3P\sqrt{2}$; $F_5 = -5P$
$F_6 = P$; $F_7 = -P\sqrt{2}$.
$X_A = 0$; $Y_A = 3P$; $T = 5P$.

c) $F_1 = -3P$; $F_2 = P\sqrt{2}$; $F_3 = 2P$; $F_4 = -3P\sqrt{2}$; $F_5 = P$
$F_6 = 3P$; $F_7 = -3P\sqrt{2}$.
$X_A = P$; $Y_A = -2P$; $N = 7P$.

3. Prin solidificare $\Sigma M_A = 0$: $Tl - Pl - 2P\,2l = 0 \Rightarrow T = 5P$.
Se secționează ca în figura VII.3. Se iau momente în raport cu O:

$$F_5 l + 2Pl - T2l = 0 \Rightarrow F_5 = 8P.$$

Celelalte bare sînt supuse la forțele $F_1 = -2P\sqrt{2}$; $F_2 = 5P$;

$$F_3 = -3P\sqrt{2};\ F_4 = 8P;\ F_6 = 5P;\ F_7 = -5P\sqrt{2};\ X_A = -2P;\ Y_A = 6P.$$

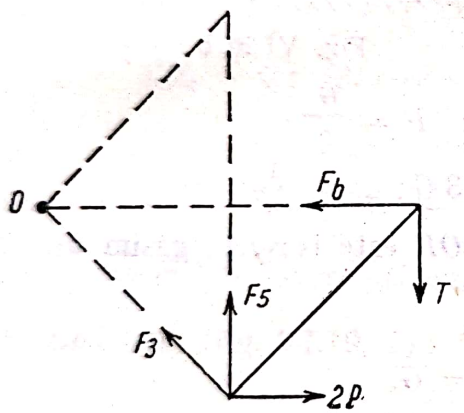


Fig. VII.3

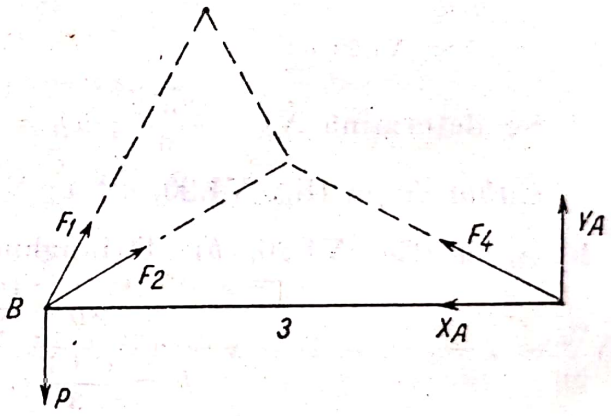


Fig. VII.4, *a*

4. a) Bara *2* are lungime $l_2 = \frac{l\sqrt{3}}{2} = l_4$; $l_3 = 2l_2 \cos 30° = \frac{3l}{2}$; $l_5 = \frac{l}{2}$.
Sistemul solidificat $\Sigma M_A = 0$: $Pl_3 - Tl_1 \sin 60° = 0° \Rightarrow T = P\sqrt{3}$;
$X_A = -P\sqrt{3}$; $Y_A = P$. Metoda Ritter la porțiunea din figura VII.4, *a*: $\Sigma M_B = 0$

$$Y_A l_3 + F_4 l_3 \sin 30° = 0 \Rightarrow F_4 = -2P \text{ (compresiune).}$$

Separarea nodurilor $\Sigma Y_i = 0$: $F_4 \frac{1}{2} + Y_A = 0 \Rightarrow F_4 = -2\,Y_A = -2P$.

b) Aceleași lungimi de bare ca la a). Din $\Sigma M_A = 0$ la sistemul solidificat;
$N_B l_3 - P\left(l_3 - \frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow N_B = \frac{2}{3}P$; $X_A = 0$; $Y_A = \frac{P}{3}$; $F_4 = -2\frac{P}{3}$ (compresiune).

Scanned with OKEN Scanner

c) *Sistem solidificat* $\Sigma M_B = 0$: $N_A \frac{3l}{2} - Pl\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$; $N_A = \frac{P\sqrt{3}}{3}$

$$X_B = -P\ ;\ Y_B = -\frac{P\sqrt{3}}{3};\quad F_4 = -2P\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. Din $\Sigma M_B = 0$ la sistemul solidificat : $T_c\frac{\sqrt{3}}{2}l - P\frac{l}{2} - T_a l = 0$

$\Sigma X_i = 0$: $-T_a - T_b\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{T_c}{2} = 0$; $\Sigma Y_i = 0$: $T_b\frac{\sqrt{2}}{2} + T_c\frac{\sqrt{3}}{2} - P = 0$

Se obține $T_a = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}P$; $T_b = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}P$; $T_c = P$.

Secțiune prin barele 1, 3, 4: $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}P(\sqrt{3}-1)$;

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow F_3 = \frac{P\sqrt{2}}{2}$; $\Sigma M_D = 0 \Rightarrow F_I = -\frac{P}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Secțiune prin barele 2, 3, 5 (fig. VII.5, *a''*) :

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow F_5 = -(\sqrt{3}-1)\frac{P}{2}\ ;\ \Sigma M_B = 0 \Rightarrow F_2 = P\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_5$ compresiuni, celelalte tracțiuni.

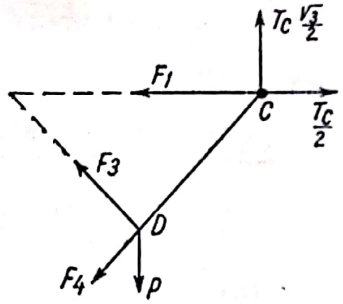


Fig. VII.5, *a'*

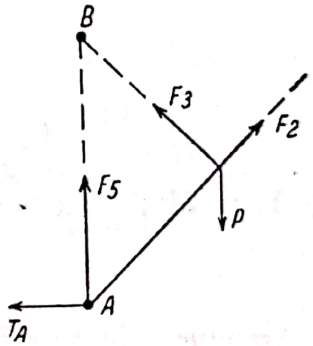


Fig. VII.5, *a''*

6. a) *Grindă cu zăbrele solidificată* $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T = \frac{7}{3}P\sqrt{2}$;

$$X_A = \frac{11P}{3};\quad Y_A = \frac{7P}{3}.$$

Secțiune prin trei bare neconcurente (fig. VII.6, *a'*) $\Sigma M_F = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{2}{3}P$;

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{5P\sqrt{2}}{3}.$$

Bara încastrată (fig. VII.6, *a''*). $X_c = X_A + T\frac{\sqrt{2}}{2} = 6P$; $Y_c = 3P$; $M_c = Pl$.

Verificare. Din tot sistemul solidificat :

$4P\frac{3l}{2} + 2P\frac{l}{2} - 3P\cdot 2l = M_c = Pl$; $X_c = 4P + 2P = 6P$; $Y_c = 3P$.

Scanned with OKEN Scanner

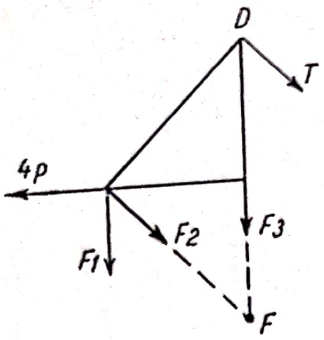


Fig. VII.6, *a'*

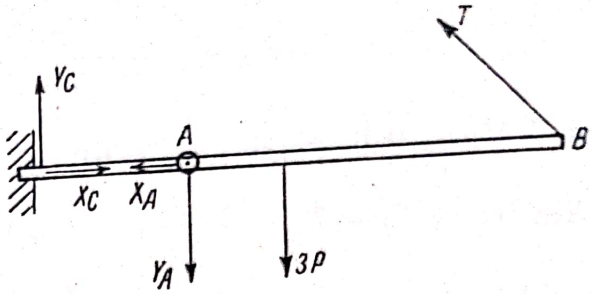


Fig. VII.6, *a''*

b) $F_A = 6\,P\,;\quad M_A = \mu_A\, 6\, Pr_A = 4P\,\frac{3\,l}{2} + 2P\,\frac{l}{2} \Rightarrow \mu_A = \frac{7\,l}{6r_A}\,;$

$F_1 = -4P\,;\quad F_2 = 4P\sqrt{2}\,;\ X_c = 6P\,;\ Y_c = 3P\,;\ M_c = -3\,P\cdot 2\,l + \mu_A\, 6Pr_A = P\,l.$

7. a) *Sistemul solidificat* $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Y_c = -\frac{5P}{2}\,;\ Y_A = 6P$

$\Sigma M_B = 0$ (bara BC): $X_c = \frac{17\,P\sqrt{3}}{6}\,;\ X_A = +\frac{2P\sqrt{3}}{3}\,.$

Secțiune în grinda cu zăbrele (fig. VII.7, *a*): $\Sigma M_D = 0\,;\ -F_1\,\frac{l\sqrt{3}}{2} + Pl - Y_A\,\frac{l}{2} + X_A\,\frac{l\sqrt{3}}{2} = 0$

$$F_1 = -\frac{2P\sqrt{3}}{3}\ \text{(compresiune)}.$$

b) $Y_c = 2P\,;\quad Y_A = 8P$. Grinda cu zăbrele: $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow X_A = \frac{P\sqrt{3}}{2}$

$$X_c = -\frac{3P\sqrt{3}}{2} = X_B.$$

Secțiune prin bare EF, FD, DB analog ca la (a).

$$\Sigma M_D = 0: -F_1\,\frac{l\sqrt{3}}{2} + X_A\,\frac{l\sqrt{3}}{2} + 2Pl - Y_A\,\frac{l}{2} = 0$$

$$F_1 = -\frac{5\,P\sqrt{3}}{6}\ \text{(compresiune)}.$$

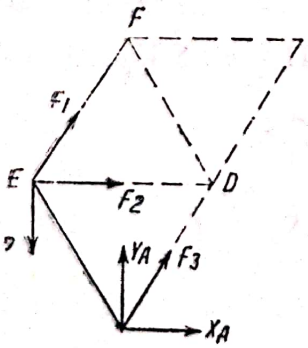


Fig. VII.7, *a*

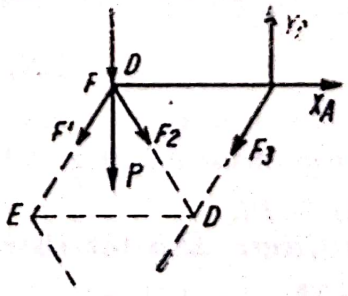


Fig. VII.7, c

Scanned with OKEN Scanner

c) $Y_c = 2P$; $Y_A = 8P$; $X_A = \frac{10P\sqrt{3}}{3}$; $X_C = -\frac{7P\sqrt{3}}{3} = X_B$.

Secțiune prin barele EF, FD, DA (fig. VII.7, *c*). $\Sigma M_D = 0 : F_1 \frac{l\sqrt{3}}{2} +$

$+ P\frac{l}{2} + Y_A \frac{l}{2} - X_A \frac{l\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow F_1 = P$ (tracțiune).

8. Se găsește $X_c = -4P$; $Y_c = \frac{7P}{3}$; $X_A = P$; $Y_A = \frac{2P}{3}$

$$F_1 = -\frac{P\sqrt{2}}{3} ; \quad F_2 = -\frac{P\sqrt{2}}{3} ; \quad F_3 = -\frac{5P\sqrt{2}}{3} .$$

9. $X_A = +\frac{P}{4}$; $Y_A = \frac{11P}{4}$; $X_c = -\frac{5P}{4}$; $Y_c = \frac{13P}{4}$; $X_B = \frac{9P}{4}$; $Y_B = \frac{P}{4}$

$$F_1 = -\frac{P\sqrt{2}}{4} ; \quad F_2 = -2P ; \quad F_3 = \frac{P\sqrt{2}}{2} .$$

10. *Bara* BC (fig. VII.10). Din momente și proiecții verticale : $Y_B = 2P$; $Y_c = P$.

Grinda cu zăbrele AB : $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow X_A = \frac{10P\sqrt{3}}{3}$; $X_B = -X_A = X_c$.

Grinda cu zăbrele CD' : $\Sigma M_D = 0$ se obține $F = 2P$.

Bara BC este supusă la compresiune $\left(X_B = X_c = \frac{10P\sqrt{3}}{3}\right)$ și încovoiere.

Bara 1. Separarea nodului C : $\Sigma X_i = 0 : F_1 + \frac{10P\sqrt{3}}{3} + \frac{F_3}{2} = 0$;

$$\Sigma Y_i = 0 : Y_c + F_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; \quad F_3 = -\frac{2P\sqrt{3}}{3} ;$$

deci $F_1 = -3P\sqrt{3}$ (compresiune).

Pentru efortul din bara EB se face secțiune prin barele *2*, *4*, *5* apoi :

$$\Sigma M_0 = 0 : \ 2P\frac{l}{2} - Y_A l - F_2 \frac{l\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow F_2 = -\frac{8P\sqrt{3}}{3} .$$

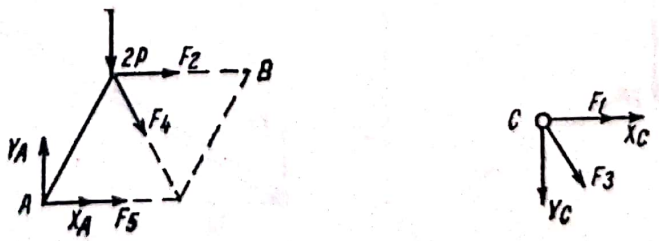


Fig. VII.10

11. a) Pentru bara AC secțiune în grinda cu zăbrele (fig. VII.11, *a*)

$$M_D = 0 \Rightarrow F_{AC} = \frac{2P\sqrt{3}}{3}.$$

Grinda cu zăbrele solidificată $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_B = 2P$;

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow X_A = -4P; \quad \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = P\sqrt{3}.$$

Grinda încastrată $X_E = -2P$; $Y_E = 2P + P\sqrt{3}$; $M_E = 8Pl$.

b) $F_{AC} = -\frac{P\sqrt{3}}{3}$; $N_B = \frac{13P}{2}$; $Y_A = -\frac{11P}{2}$; $X_A = -2P\sqrt{3}$;

$$X_E = -2P\sqrt{3}; \quad Y_E = 3P; \quad M_E = \frac{25Pl}{2}.$$

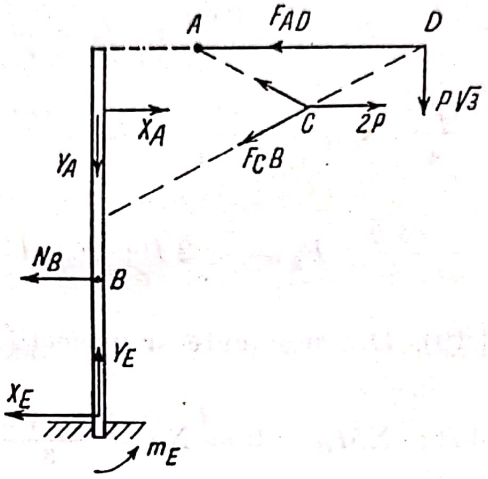


Fig. VII.11, *a*

12. Din echilibrul grinzii cu zăbrele (fig. VII.12) : $Y_D = 2P$; $Y_E = 4P$.

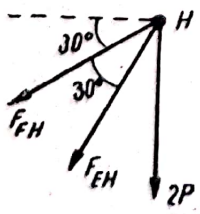
Echilibrul nodului H (fig. VII. 12,*a*) : $\Sigma X_i = 0 : F_{FH}\frac{\sqrt{3}}{2} + F_{EH}\frac{1}{2} = 0$;

$\Sigma Y_i = 0$; $F_{FH}\frac{1}{2} + F_{EH}\frac{\sqrt{3}}{2} + 2P = 0$. Găsim $F_{FH} = 2P$; $F_{EH} =$

$= -2P\sqrt{3}$.

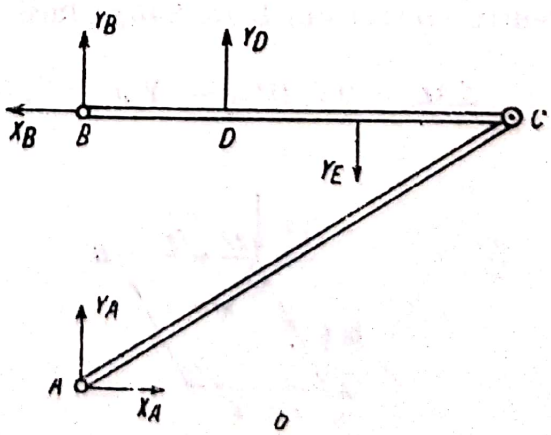
Sistemul de bare ABC (fig. VII. 12,*b*) : $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow X_A = P$ și $X_B = -P$.

Bara AC : $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{2P}{3}$, deci $Y_B = -\frac{2P}{3}$, $X_c = P$, $Y_c = \frac{2P}{3}$.



a

Ffig. VII. 12 *a*



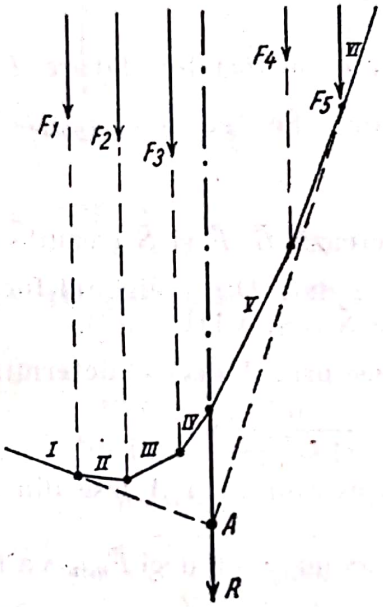
b

Ffig. VII. 12, *b*

Capitolul VIII

METODE GRAFICE

1. a) Se trasează poligonul forţelor în care latura III este $3P$ şi face 30° cu orizontala. Se capătă polul O cu ajutorul căruia se face poligonul funicular.
Din intersecţia laturilor I şi VI în poligonul funicular se determină A pe unde trece rezultanta (la distanţa $= 2{,}45\ l$ de A_1).



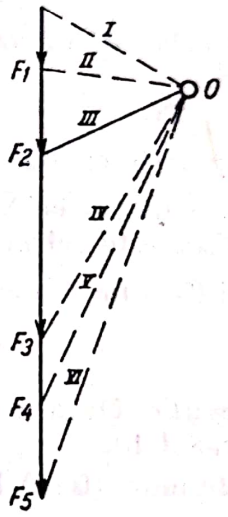


Fig. VIII.1, *a*

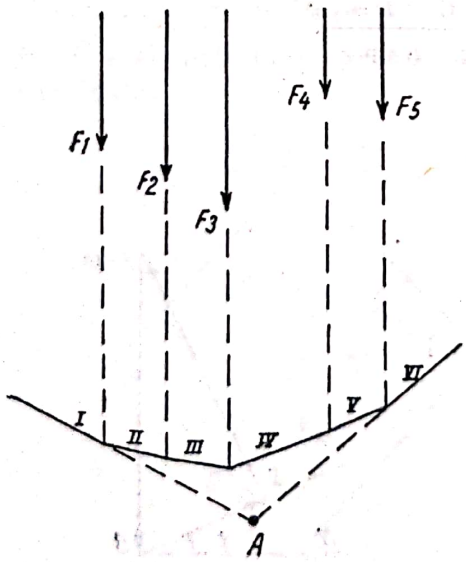


Fig. VIII.1, *b'*

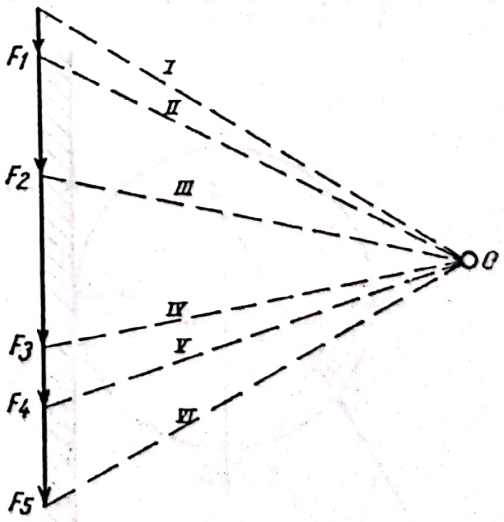


Fig. VIII.1, *b"*

Scanned with OKEN Scanner

Analitic. Teorema lui Varignon: $\Sigma M_{Fi} = M_R$ ·(R este rezultanta, $R = 9P$)· $\Sigma M_{Fi} = 2\,P\,l + 3\,P\,2\,l + P\,4\,l + 2\,P\,5\,l = 22\,P\,l = 9\,Px$; $x = \frac{22}{9} l \approx 2{,}45\ l$. Problema poate fi făcută și cînd raza *III* face 30° cu orizontala în jos.

Din figura VIII.1, *a* se vede că $f_{min} = f_2 = 2{,}6\,P$ (f_i sînt forțele de pe porțiunile de fir) iar $f_{max} = f_6 = 8\,P$.

b) În poligonul forțelor, razele polare extreme sînt egale cu $9\,P$ deci împreună cu rezultanta formează un triunghi echilateral (fig. VIII.1, *b''*). Rezultanta trebuie să treacă tot la $x = 2{,}45\ l$ deci A trebuie să fie pe aceeași verticală (fig. VIII.1, *b'*).

Aci: $f_3 = f_4 = 3P\sqrt{7}$; $f_{max} = 9\,P$.

c) Construcție analoagă unde în poligonul forțelor, latura *I* face 30° cu verticala și *VI* 60° cu verticala. Se găsește $f_{max} = f_6 = \frac{9P\sqrt{3}}{2}$; $f_{min} = f_1 = \frac{9P}{2}$.

2. *a*) Asupra sferei (fig. VIII.2, *a'*) lucrează $\bar{G}$, $\bar{F}$ și $\bar{S}$ (rezultanta lui $\bar{N}$ cu $\mu\bar{N}$). $\bar{S}$ face $\hat{\varphi}$ cu $\bar{N}$ unde $\operatorname{tg}\varphi = \mu$ dat. Din poligonul forțelor se vede că F_{min} este cel perpendicular pe $\bar{S}$ (fig. VIII.2, *a''*).

Deci $\bar{F}_{min}$ face $\hat{\varphi}$ cu verticala, trece prin A deci se determină C

$$F = G\cos\varphi = \frac{G}{\sqrt{1+\mu^2}} .$$

Discuție. Dacă μ e mare deci φ este mare și A iese din afara sferei, avem cazul b).

b) φ este mare (fig. VIII.2, *b*). În A avem $\measuredangle 90°$ deci $\bar{F}_{min}$ va fi tangent la cerc.

c) Dacă însă $\hat{\varphi}$ este și mai mare vom lua pentru φ direcția limită tangentă la sferă unde $\alpha < \varphi$ (fig. VIII.2, *c'*).

Din poligonul forțelor (fig. VIII.2, *c''*) avem $S\sin\varphi = G - F\cos\alpha$; $S\cos\varphi = F\sin\alpha$; din $\operatorname{tg}\varphi = \mu = \frac{G - F\cos\alpha}{F\sin\alpha}$.

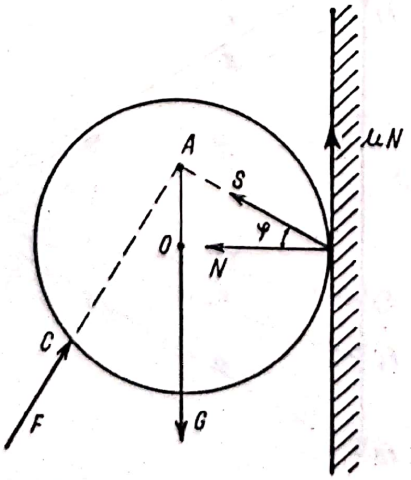


Fig. VIII.2, *a'*

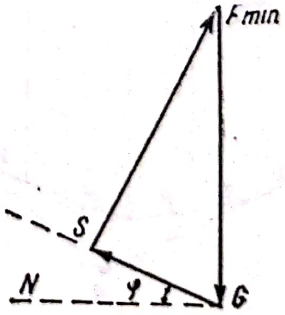


Fig. VIII.2, *a''*

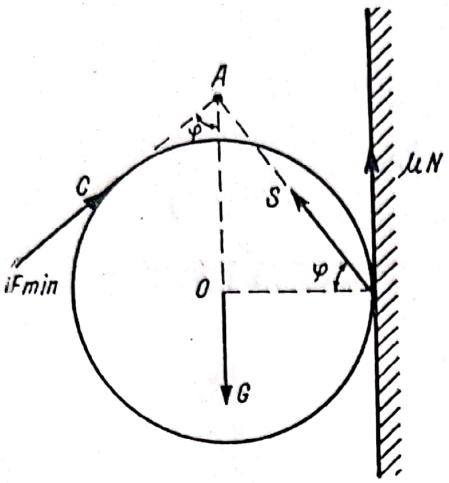


Fig. VIII.2, b

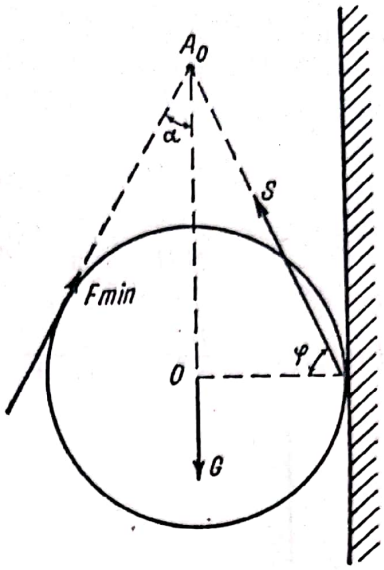


Fig. VIII.2, c'

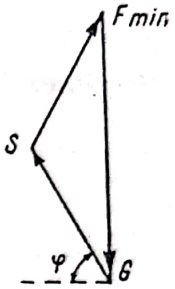


Fig. VIII.2, c''

Avem $AO = R \operatorname{tg} \varphi = \mu R$; $AO = \dfrac{R}{\sin \alpha}$; $\mu = \dfrac{1}{\sin \alpha}$

deci $F = \dfrac{G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \dfrac{\mu G}{\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}}$.

Se vede din figură că $AO > R$ deci $\mu = \dfrac{AO}{R} > 1$.

3. Pentru $\mu < 1$ punctul A de concurență al lui $\bar{G}$ cu $\bar{S}$ (rezultanta lui $\bar{N}$ cu $\mu\bar{N}$) și $\bar{F}$ se găsește sub O (fig. VIII.3, a') deci $\bar{F}_{min}$ este perpendicular pe $\bar{S}$, adică pe AB, trece prin C și are mărimea dată de poligonul forțelor $F = G \cos \varphi$ (fig. VIII.3, a'').

Cu cît $\mu \to 1$, $\varphi \to 45°$, punctul C se apropie de E pe latura DE, iar $\bar{F}$ se apropie de 45° cu orizontala și de valoarea $F = \dfrac{G\sqrt{2}}{2}$. Cînd $\mu > 1$, A este mai sus de O, punctul de aplicație al lui $\bar{F}$ rămîne în E dar direcția lui $\bar{F}$ e cu atît mai aproape de verticală cu cît A e mai sus ($\bar{F}$ face α cu verticala).

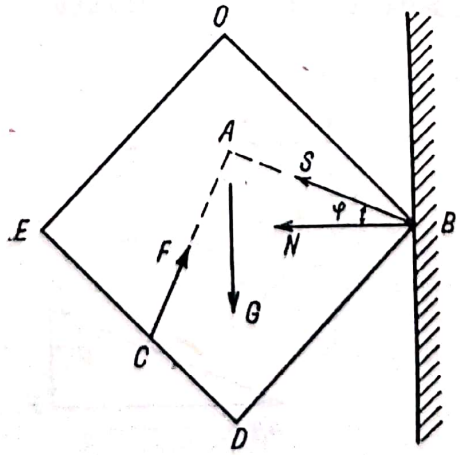


Fig. VIII.3, a'

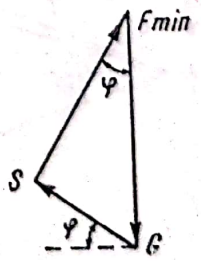


Fig. VIII.3, a''

4. La limita răsturnării $\bar{N}$ şi deci $\bar{S}$ (rezultanta lui $\bar{N}$ cu $\mu\bar{N}$) (fig. VIII.4) sînt deplasate în B. Din poligonul forţelor VIII.4, a'' T_{min} este perpendicular pe $\bar{S}$. Se capătă deci H şi lungimea firului :

$$T = G\cos\varphi = \frac{G}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

$$OB = \frac{l}{2\cos\varphi}; \quad HB\cos\varphi = OB; HB = \frac{l}{2\cos^2\varphi};$$

lungimea firului $HE = \frac{HB}{\sin\varphi} = \frac{l}{2\cos^2\varphi\sin\varphi} = \frac{l\mu}{2(1+\mu^2)\sqrt{1+\mu^2}}$.

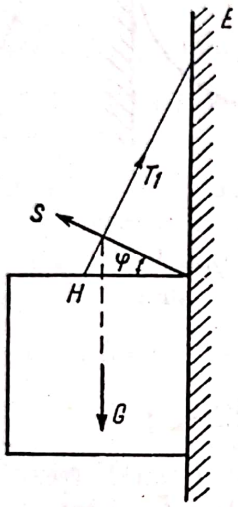


Fig. VIII.4, a'

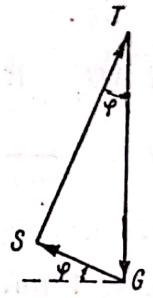


Fig. VIII.4, a''

5. La limită $\bar{N}_B$ se deplasează în B, $\bar{T}$, $\bar{G}$ şi $\bar{N}_B$ trebuie să fie concurente (fig. VIII.5, a'). Punctul de prindere al firului de perete se notează cu D; avem $BD = x$; $OB = R = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Deci $\frac{h}{R+x} = \mathrm{tg}\,\theta = \frac{h}{4x}$, de unde $3h = 4R\,\mathrm{tg}\,\theta$ sau $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{3}{4\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

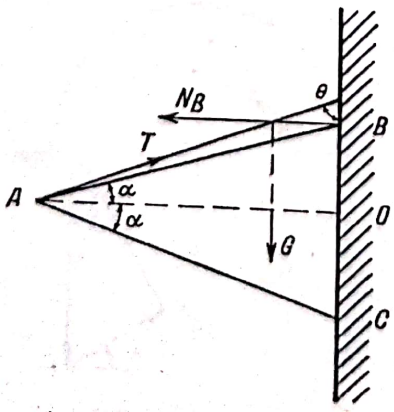


Fig. VIII.5, a'

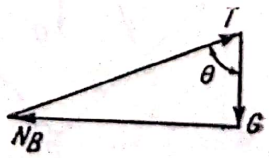


Fig. VIII.5, a''

Din poligonul forțelor (fig. VIII.5, a'') : $T = \frac{G}{\cos\theta}$.

Analitic $\Sigma M_B = 0 : G\frac{h}{4} + T\sin\theta\, h\,\mathrm{tg}\,\alpha - T\cos\theta\, h = 0$

$\Sigma Y_i = 0 : T\cos\theta = G$

de unde $T = \frac{G}{4\,\mathrm{tg}\,\alpha}\sqrt{9 + 16\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$; $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{3}{4}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

6. $\bar{G}$, $\bar{T}$, $\bar{N}$, trebuie să fie concurente (fig. VIII.6, a'). Se obține θ. Apoi din poligonul forțelor (fig. VIII.6, a'') $T = \frac{G}{\cos\theta}$.

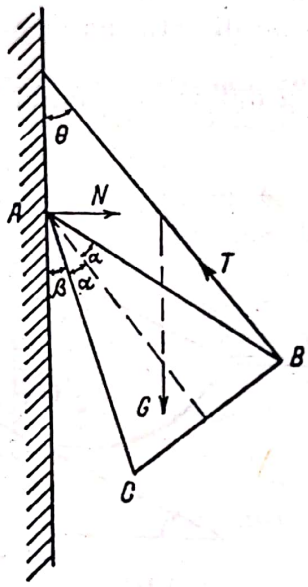


Fig. VIII.6, a'

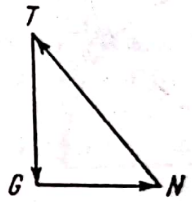


Fig. VIII.6, a''

7. a) **Cazul I** (fig. VIII.7, a') $\theta \geqslant \alpha$, imposibil, căci $\bar{N}_A$ (pe rază), $\bar{N}_B$ orizontală și $\bar{G}$ nu sînt concurente.

Cazul II (fig. VIII.7, a'') $\theta < \alpha$. Forțele sînt concurente cînd $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

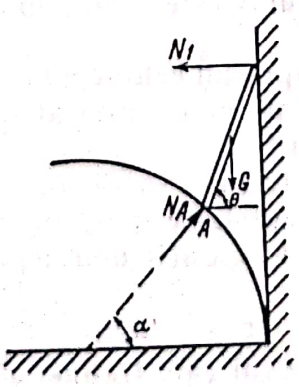


Fig. VIII.7, a'

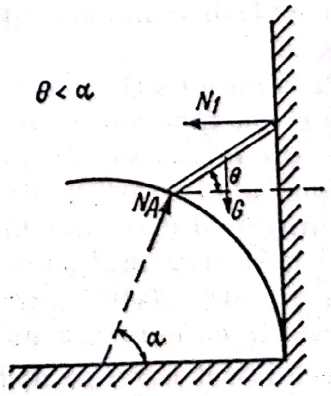


Fig. VIII.7, a''

Scanned with OKEN Scanner

Analitic : $\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_A \cos\alpha = N_B$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_A \sin\alpha = G$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_B l \sin\theta = G\frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

b) **Cazul I**, $\theta > \alpha$. *Frecare în A*, posibil. $\bar{S}_A$ (rezultanta lui $\bar{N}_A$ cu $\mu_A\bar{N}_A$) trece prin punctul de concurență al lui G cu $\bar{N}_B$. Frecarea e în sus deci tendința de lunecare în jos (fig. VIII.7, *b*).

Frecare în B. Trebuie ca $\bar{S}_B$ să fie concurent cu $\bar{G}$ și $\bar{N}_A$ în O', ceea ce este posibil, dar din poligonul forțelor $\bar{N}_A$ este spre interiorul sferei deci este imposibil.

Cazul I, $\theta = \alpha$. *Frecare în A*, caz posibil, căci $\bar{S}_A$, $\bar{G}$, $\bar{N}_B$ pot fi concurente, tendința de lunecare în A e în jos.

Frecare în B, imposibil, căci $\bar{N}_A$ fiind pe direcția barei poligonul forțelor nu mai e închis.

Cazul II, $\theta < \alpha$ caz posibil. Pentru un μ dat se determină θ respectiv.

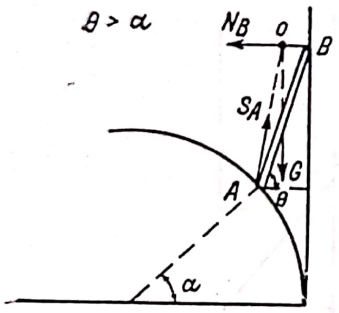


Fig. VIII.7, *b*

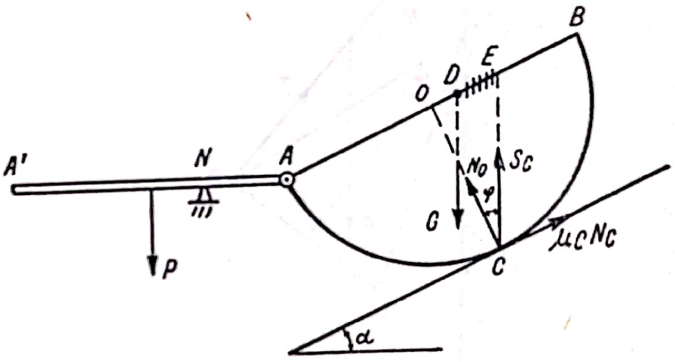


Fig. VIII.8

8. *Bara* (fig. VIII.8). Deoarece $\bar{P}$ și $\bar{N}$ la reazem sînt verticale, $\bar{F}_A$ va fi verticală (concurența la ∞).

Semicilindrul. $\bar{F}_A$ și $\bar{G}$ fiind verticale, $\bar{S}_c$ rezultanta lui $\bar{N}_c$ cu $\mu_c\bar{N}_c$ trebuie să fie și ea verticală. Dacă bara e articulată :

a) între A și D ; $\bar{F}_A$ trebuie să fie în sus pentru semicilindru deci în jos pentru bară, $\bar{N}$ se va găsi între A și P. $\bar{F}_A$ este cu atît mai mare cu cît articulația e mai aproape de D deci reazemul N este cu atît mai aproape de A.

b) Dacă bara e articulată între D și E este imposibil echilibrul căci oricum s-ar lua momentele în raport cu punctul de articulație al lui $\bar{F}_A$ (fie acesta în sus sau în jos) nu este echilibru.

c) Dacă bara e articulată între E și B, $\bar{F}_A$ trebuie să fie în jos pentru semicerc și e cu atît mai mare cu cît articulația e mai aproape de E. La bară reazemul trebuie să fie între P și A' cu atît mai departe de P cu cît articulația e mai aproape de B.

Se vede că pentru a nu avea lunecare $\mu_c = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$.

9. Din echilibrul barei se deduce că $\bar{F}_A$ este vertical căci trebuie să fie concurent la ∞ cu $\bar{P}$ și $\bar{N}$ (fig. VIII.9).

Scanned with OKEN Scanner

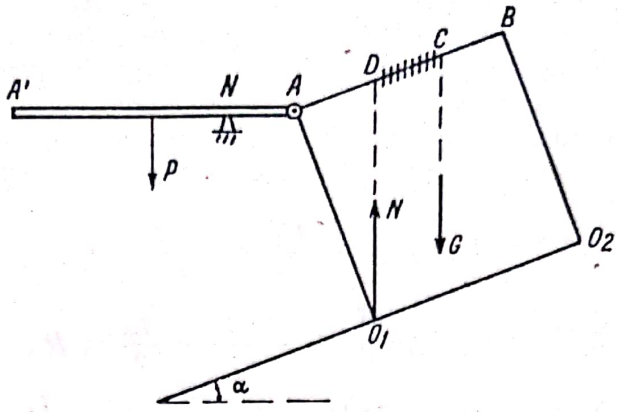


Fig. VIII.9

Răsturnare în raport cu O_1. Forța $\bar{F}_A$ la cub trebuie să fie în jos pentru articulația între A și D, deci la bară $\bar{F}_A$ e în sus, reazemul va fi între A' și P.

Cu cît articulația se face mai aproape de D, $\bar{F}_A$ trebuie să crească deci reazemul se apropie de P. De la D la B este imposibilă răsturnarea în raport cu O_1 pentru $\bar{F}_A$ în jos. Între D și C imposibilă răsturnarea în raport cu O_1 chiar cu $\bar{F}_A$ în sus căci momentele în raport cu centrul cubului au același sens. De la C la B este posibilă răsturnarea în raport cu O_1, $\bar{F}_A$ în sus pentru cub, în jos pentru bară, $\bar{N}$ între P și A.

Răsturnare în raport cu O_2. Forța de sprijin la cub s-a deplasat în O_2, deci între A și C, $\bar{F}_A$ trebuie să fie în sus pentru cub, în jos pentru bară, $\bar{N}$ între A și P. $\bar{F}_A$ cu atît mai mare cu cît articulația e mai aproape de C, deci sprijinul $\bar{N}$ mai aproape de A. De la C la B imposibil. Frecarea între cub și plan $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

10. Reducem forțele la trei pentru a putea să le aplicăm legea echilibrului a trei forțe concurente în plan. Cele trei forțe vor fi: $\bar{P}$, $\bar{T}_A$ și $\bar{S}_{bc}$.

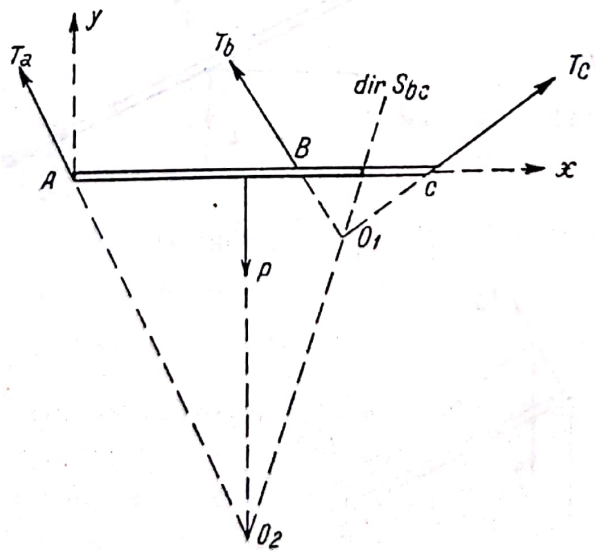


Fig. VIII.10, *a'*

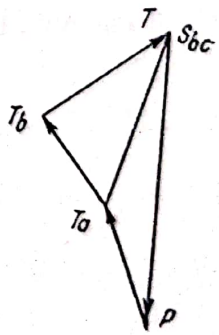


Fig. VIII.10, *a''*

Scanned with OKEN Scanner

(fig. VIII.10 a'), (rezultanta lui $\bar{T}_b$ cu $\bar{T}_c$) care trece prin punctul lor O_1 de concurență. $\bar{S}_{bc}$ mai trebuie să treacă și prin punctul O_2 de concurență al lui $\bar{T}_A$ cu $\bar{P}$, ceea ce dă direcția lui $\bar{S}_{bc}$ care împreună cu $\bar{P}$ și $\bar{T}_A$ formează un poligon închis.

Găsim $T_A \approx 0{,}45\,P$; $S_{bc} \approx 0{,}7\,P$. $\bar{S}_{bc}$ se descompune după direcțiile $\bar{T}_b$ și $\bar{T}_c$, unde $T_b \approx 0{,}4\,P$, $T_c = 0{,}65\,P$ (fig. VIII.10, a'').

$$\textit{Analitic}: \Sigma X_i = 0 : T_c \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{T_A}{2} - \frac{T_b\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0 : T_A \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{T_b\sqrt{2}}{2} + \frac{T_c}{2} = P;$$

$$\Sigma M_A = 0 : -P\,4l + T_b \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5l + \frac{T_c}{2} \cdot 8\,l = 0;$$

de unde $T_A = 0{,}48\,P$; $T_b = \dfrac{2P\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{3}} = 0{,}43\,P$; $T_c = 0{,}64\,P$.

11. a) *Frecare în A.* Posibil dacă O este deasupra orizontalei AD, imposibil dacă O este pe orizontala AD sau dedesubt căci ar rezulta $\bar{N}_A$ în jos (fig. VIII.11, a).

φ_A este unghiul lui $\bar{N}_A$ cu AO (O punct de concurență $\bar{G}$ cu $\bar{N}_B$ și cu AO direcția lui $\bar{S}_A$).

Frecare în B: $\bar{S}_B$ este vertical (concurent cu $\bar{N}_A$ și $\bar{G}$ la ∞, dar problema e imposibilă căci $\Sigma M_G = 0$ (G = mijlocul barei) nu e posibilă ($\bar{S}_B$ și $\bar{N}_A$ în sus).

b) *Frecare în A:* $\bar{S}_A$ pe direcția barei $\varphi = 90° - \alpha$; $\mu_A = \operatorname{ctg}\alpha$; caz posibil.

Frecare în B: $\bar{S}_B$ vertical. Caz imposibil ($\Sigma M_B = 0$ nu e satisfăcută (fig. VIII.11, b).

c) *Frecare în A:* Posibil. $\varphi_A < 90° - \alpha$.

Frecare în B: Posibil. $\varphi_B = \alpha$ (fig. VIII.11, c).

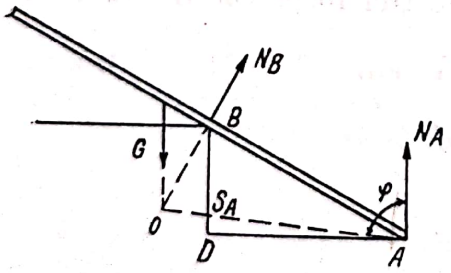


Fig. VIII.11, a

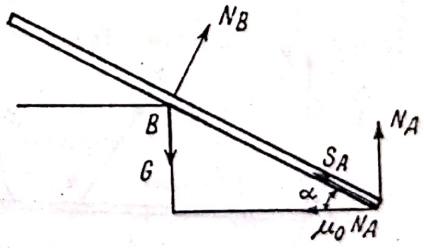


Fig. VIII.11, b

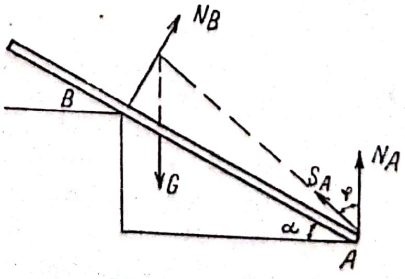


Fig. VIII.11, c

Scanned with OKEN Scanner

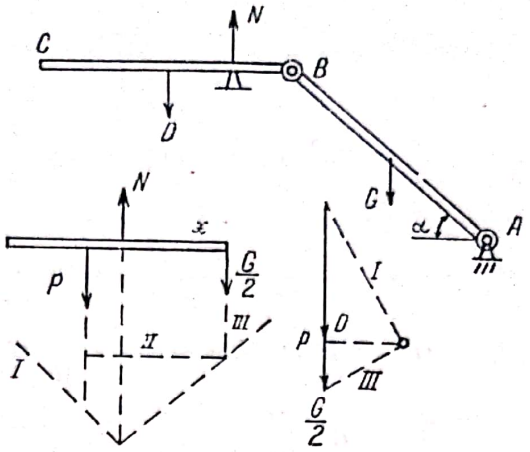


Fig. VIII.12, *a*

12. a) Din echilibrul barei BC unde $\bar{P}$ și $\bar{N}$ sînt concurente la ∞ rezultă că $\bar{F}_B$ este verticală (fig. VIII.12, *a*). Din echilibrul lui BA, rezultă că $\bar{F}_B$ este în sus și egală cu $\frac{\bar{G}}{2}$ pentru bara AB, deci în jos pentru bara BC, deci $\bar{N}$ este între P și B. $\bar{N}$ va fi pe suportul rezultantei lui $\bar{P}$ cu $\frac{G}{2}$.

Avem : $N = P + \frac{G}{2}$; $Nx = P\frac{a}{2}$; $x = \frac{Pa}{2P + G}$.

b) Se tratează identic.

Capitolul IX

FIRE

A. FIRE CU FRECARE

1. $P = T\ e^{\mu\cdot\alpha}$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ unde T este tensiunea în porțiunea de fir AC, iar $\alpha = \sphericalangle AOB$.

Corpul G. $N = G - \frac{T}{2}$; $T = \frac{2G}{2\sqrt{3} - 1}$; $P = e^2\ T \approx \frac{15G}{2\sqrt{3} - 1} \approx 6\ G$.

2. Aci sînt două cazuri posibile : (a) Corpul P tinde să coboare ; (b) P tinde să se urce.

a) *Corpul* G : $T\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{G}{2} + \mu_0 N$; $N = G\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{T}{2} \Rightarrow T = G\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1} \approx$

$\approx 0{,}84\ G$.

Firul : $P = Te^{\mu\cdot\alpha}$; $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$; $P = Te^{\frac{5}{2}} \cong 12\,T \cong 10\,G$.

b) *Corpul* G : $\frac{T\sqrt{3}}{2} = \frac{G}{2} - \mu_0 N$; $N = G\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{T}{2} \Rightarrow T \cong G\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1} \cong$

$\cong 0{,}12\,G$.

Firul : $T = Pe^{\mu\cdot\alpha}$; $P = \frac{T}{e^{\mu\cdot\alpha}} \approx \frac{0{,}12G}{12} \approx 0{,}01\,G$.

3. a) *Roata* G : $\Sigma M_0 = 0$: $TR = N_0 s \Rightarrow T = \frac{G}{10}$ (fig. IX.3, *a*).

Firul : $P = \frac{G}{10}e^{\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}} = \frac{G}{10}\cdot e = 0{,}27\,G$; $\mu_0 N_0 = T$; $\mu_0 = 0{,}1$.

b) *Cazul 1* (fig. IX.3, *b*). Roata are tendință de urcare pe plan.

$\Sigma M_0 = 0$: $TR - G\sin\alpha R - N_0 s = 0$; $T = G\left(\sin\alpha + \frac{1}{10}\cos\alpha\right)$

$P = Te^{\mu_1\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = G\left(\sin\alpha + \frac{1}{10}\cos\alpha\right)e^{\frac{2}{\pi}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$.

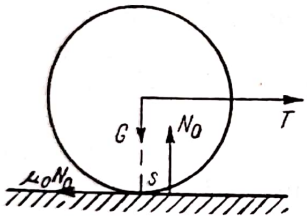


Fig. IX.3, *a*

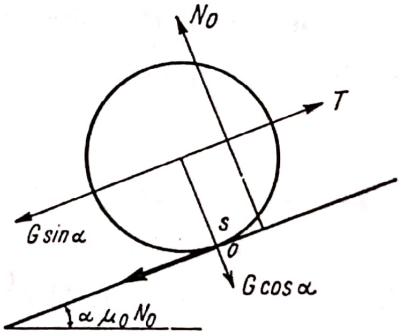


Fig. IX.3, *b*

$\Sigma X_i = 0$ (Ox paralel cu planul) ;

$T = G\sin\alpha + \mu_0 N_0 = G(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)$.

Găsim $\mu_0 = \frac{1}{10}$.

Cazul 2. Roata are tendință de coborîre pe plan.

Analog $\Sigma M_0 = 0$: $G\sin\alpha R - TR - N_0 s = 0 \Rightarrow T = G\left(\sin\alpha - \frac{1}{10}\cos\alpha\right)$

$\left(\text{forța de frecare în sus, } \mu_0 = \frac{1}{10}\right)$. Firul $T = Pe^{\mu_1\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$P = \frac{G\left(\sin\alpha - \frac{1}{10}\cos\alpha\right)}{e^{\frac{2}{\pi}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}}.$$

4. Luînd momente în raport cu centrul troliului:

$$TR = Gr \Rightarrow T = \frac{G}{2}\cdot$$

Cazul a) G tinde să se urce:

$$P = Te^{\mu\alpha} = \frac{G}{2}e^{\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}} = \frac{2{,}7}{2}G = 1{,}35\,G.$$

Cazul b) G tinde să coboare:

$$T = Pe^{\mu\alpha} \Rightarrow P = \frac{G}{2\cdot 2{,}7} \approx 0{,}18\ G.$$

Deci pentru echilibru $0{,}18\ G \leqslant P \leqslant 1{,}35\ G$.

5. a) G tinde să coboare pe plan.

Corpul G: $T_2 = G\frac{\sqrt{3}}{2}$; *Corpul* P $T_1 = \frac{P}{2}$.

Firul: $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$ de unde $P = \frac{G\sqrt{3}}{\sqrt{e}}$ luînd $\sqrt{3} \approx \sqrt{e}$ avem $P = G$.

Roata (fig. IX.5, *a*): Avem $T_1 = \frac{G}{2}$; $T_2 = \frac{G}{2}\sqrt{e} \approx \frac{G}{2}\sqrt{3}$.

$\Sigma X_i = 0$: $T_2 \cos 60° - T_1 \cos 30° - \mu_0 N_0 = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0$;
$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_0 = T_2 \sin 60 + T_1 \sin 30 = G$;
$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow N_0 s = T_2 R - T_1 R \Rightarrow s = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

b) G tinde să urce:

$T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}$; $P = 3G$; $T_1 = \frac{3G}{2}$; $T_2 = \frac{\sqrt{3}G}{2}$; $s = \frac{R}{2}$ (fig. IX.5, *b*);

$N_0 = \frac{3G}{2}$; $\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

6. a) $P = G$; $T_1 = \frac{G}{2}$; $T_2 = G\frac{\sqrt{3}}{2}$; $X_0 = 0$, $Y_0 = G$; $F_0 = Y_0 = G$

$\Sigma M_0 = 0$: $T_2 R - T_1 R - \mu_0 F_0 r = 0 \Rightarrow \mu_0 \frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{R}{r}$ (fig. IX.6).

b) $P = 3G$; $X_0 = \frac{G\sqrt{3}}{2}$; $Y_0 = \frac{3G}{2}$; $F_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = G\sqrt{3}$.

$\Sigma M_0 = T_1 R - T_2 R - \mu_0 F_0 r = 0 \Rightarrow \mu_0 = \frac{R}{2r}(\sqrt{3} - 1)$.

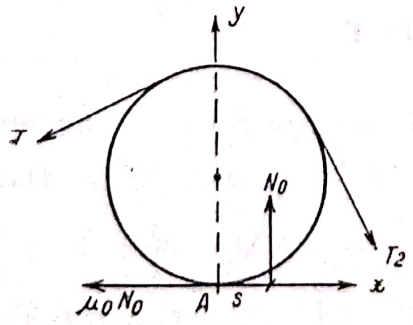


Fig. IX.5, *a*

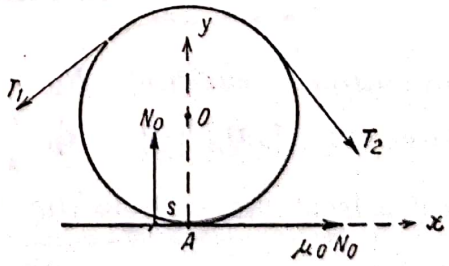


Fig. IX.5, *b*

7. a) *Firul:* $T = Pe^{\mu\frac{\pi}{2}} = 2{,}7\,P$ (aci se ia G trasat în linie plină).

Troliul: $\Sigma M_0 = 0 : T\cdot 2r = Gr + P\cdot 2r \Rightarrow P = \dfrac{G}{2(e-1)} \approx 0{,}3\ G$;

$$T = \frac{G\cdot e}{2(e-1)} \approx 0{,}8\ G.$$

Bara: $\Sigma M_A = 0 : Fl = T\dfrac{3l}{4} \Rightarrow F = \dfrac{3}{4}T \approx 0{,}6\ G.$

b) Aci se ia G trasat în linie punctată $P = Te^{\mu\frac{\pi}{2}} \Rightarrow T = \dfrac{P}{e}$; $\Sigma M_0 = 0$:

$\dfrac{P}{e}\cdot 2r = P\,2r - Gr$;

$P = \dfrac{G\cdot e}{2(e-1)} \approx 0{,}8\ G$; $T \approx 0{,}3\ G$; $F = \dfrac{3}{4}T = 0{,}22\ G.$

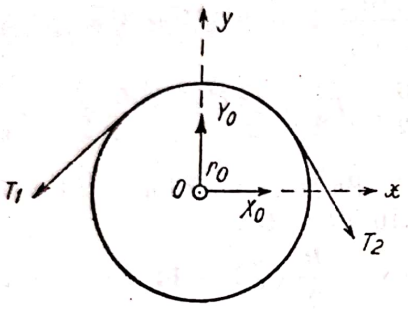


Fig. IX.6

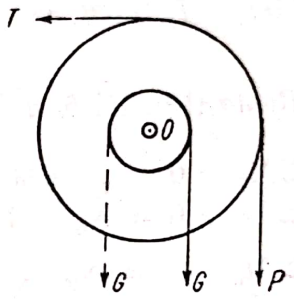


Fig. IX.7

8. a) *Firul:* $T_2 = T_1 e^{\mu\pi} = T_1\cdot e$;

Troliul: $2M_0 = 0 \Rightarrow T_2\cdot 2r = T_1\,2r + Gr$

$$T_1 = \frac{G}{2(e-1)} \approx 0{,}3\ G; \quad T_2 = \frac{G\cdot e}{2(e-1)} \approx 0{,}8\ G.$$

Bara: $\Sigma M_A = 0 : T_2R + T_1\,3R - P\dfrac{3}{2} = 0 \Rightarrow P = \dfrac{1{,}7G}{1{,}5} \approx 1{,}13\ G.$

b) G atîrnă în sensul punctat: $T_1 = T_2\,e^{\mu\pi} = T_2\cdot e$. Găsim

$T_1 \approx 0{,}8\ G$; $T_2 \approx 0{,}3\ G$; $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 0{,}3\ GR + 0{,}8\ G\cdot 3\ R - P\dfrac{3}{2}R = 0$

$P = \dfrac{2{,}7}{1{,}5}G = 1{,}8\ G.$

B. FIRE ELASTICE

9. Din *sistemul solidifical:* $R_B = R_{B'} = G$; B' este reazemul din dreapta.

Bara AB': $\Sigma M_A = 0 : R_{B'}\dfrac{l}{2} - G\dfrac{l}{4} - T\dfrac{l}{2} = 0 \Rightarrow T = \dfrac{G}{2}$. Dar din firul atîrnat pe verticală (fig. IX.9) $T_0 = G = K\Delta l_0 = Kl$; $K = \dfrac{G}{l}$ deci la sistemul de bare $T = K\Delta l = \dfrac{G}{l}\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{2} - l_0\right) = \dfrac{G}{2} \Rightarrow l_0 = \dfrac{l}{2}(\sqrt{3} - 1).$

Scanned with OKEN Scanner

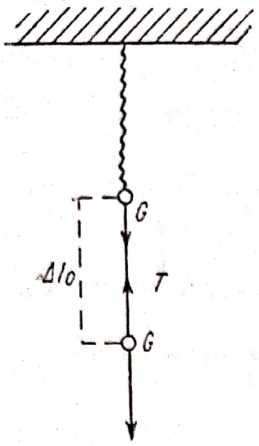


Fig. IX.9

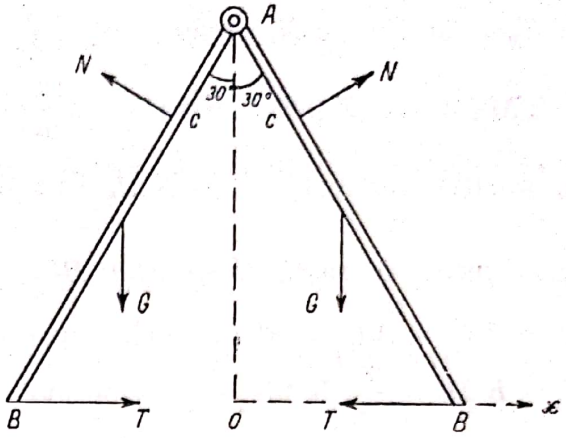


Fig. IX.10

10. a) Determinarea coeficientului de alungire K (fig. IX.10). Aici $\Delta l = \left(l - \frac{l}{2}\right)$

deci $T = K\Delta l = \frac{G}{l}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{G}{2}$.

Sistemul solidificat : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N = 2\,G$.

Bara AB : $\Sigma M_A = 0 : G\frac{l}{4} + \frac{G}{2}\frac{l\sqrt{3}}{2} - 2\,Gx = 0$,

de unde $x = \frac{l(1+\sqrt{3})}{8} \approx 0{,}34\ l$.

b) Reazemele la sfertul barelor $N = 2\,G$; $T = K\Delta l = \frac{G}{l}(l - l_0)$.

$\Sigma M_B = 0$ pentru bara AB :

$-N\frac{l}{4} + G\frac{l}{4} + \frac{G}{l}(l - l_0)\frac{l\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow l_0 = l - \frac{\sqrt{3}}{6}l = 0{,}72\ l$.

11. a) $\Delta l = R$, $T = K\Delta l = 3\,G$; $X_0 = -3\,G$, $Y_0 = 20\,G$

$F_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \approx 20{,}2\ G$

$\Sigma M_0 = 0 : TR = \mu_0 F_0\, r \Rightarrow \mu_0 = \frac{3}{20.2}\frac{R}{r}$ (fig. IX.11, *a*).

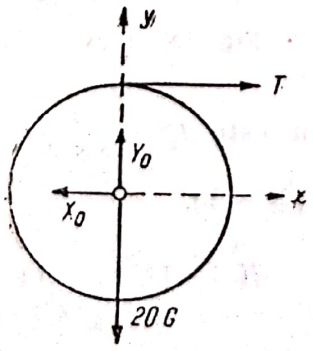


Fig. IX.11, *a*

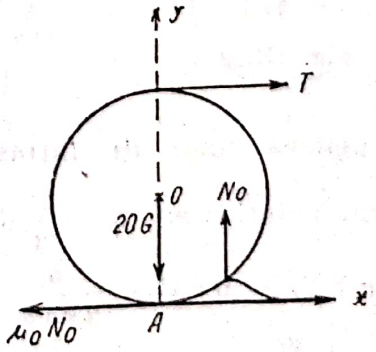


Fig. IX.11, b

b) $N_0 = 20\,G$; $\mu_0 N_0 = 3G$; $\mu_0 = \frac{3}{20}$.

$\Sigma M_A = 0$: $T\,2R = N_0 s$; $s = \frac{6R}{20} = 0{,}3\,R$ (fig. IX.11, *b*).

12. În poziție verticală $T_0 = K\Delta l_0$ sau $G = K\frac{R}{3}$; $K = \frac{3G}{R}$.

Firul prins de roată în poziția BC : Avem $BC = 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$ deci $\Delta l = BC - AB = R(\sqrt{3} - 1)$, tensiunea în fir în această poziție este $T = K\Delta l = \frac{3G}{R} R(\sqrt{3} - 1) = 3G\,(\sqrt{3} - 1)$.

a) La axul roții (fig. IX.12, *a*)

$X_0 = -\frac{T}{2}$; $Y_0 = 4G - \frac{T\sqrt{3}}{2}$. Deci $F_0 = G\sqrt{16 - 6\sqrt{3}}$.

Din $\Sigma M_0 = 0$, obținem $\mu_0 = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{16 - 6\sqrt{3}}} \frac{R}{r_0} \approx 0{,}38\,\frac{R}{r_0}$.

b) (fig. IX.12, *b*). Avem analog $T = 3G(\sqrt{3} - 1)$, deci $N_0 = \frac{G}{2}(3\sqrt{3} - 1)$ și $\mu_0 N_0 = \frac{3G}{2}(\sqrt{3} - 1)$ deci $\mu_0 = \frac{3\sqrt{3} - 3}{3\sqrt{3} - 1} \approx 0{,}52$.

Din $\Sigma M_D = 0$ avem

$N_0 s = T\frac{3R}{2} \Rightarrow s = \frac{9(\sqrt{3} - 1)}{3\sqrt{3} - 1} R \approx 1{,}57\,R$.

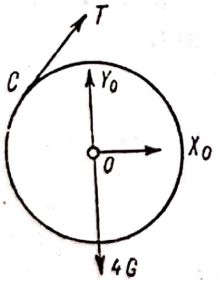


Fig. IX.12, *a*

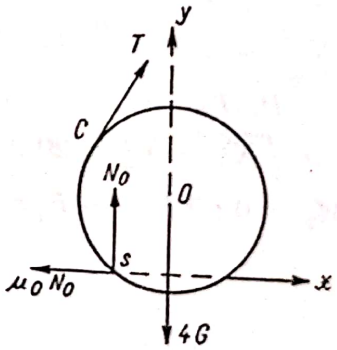


Fig. IX.12, *b*

13. a) Lungimea unui fir întins, la echilibru este $l_1 = \frac{l}{\cos 30} = \frac{2l\sqrt{3}}{3}$.

Firul neîntins are $l_0 = \frac{2l}{3}$ deci $\Delta l = \frac{2l}{3}(\sqrt{3} - 1)$.

Din $\Sigma Y_i = 0$: $T = \frac{G}{2 \sin 30} = G = K\Delta l = K\frac{2l}{3}(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow K = \frac{3G}{2l(\sqrt{3} - 1)}$.

Dacă se taie un fir (de ex. GB), în celălalt fir va fi inițial $T_1 = G\cos 60 = \frac{G}{2} = K\Delta l_1 = \frac{3G}{2l(\sqrt{3}-1)}\Delta l_1$ (Δl_1 = alungirea inițială), deci $\Delta l_1 = \frac{l(\sqrt{3}-1)}{3} < \Delta l$ din poziția de echilibru. Firul elastic la tăierea celuilalt se contractă brusc.

b) Dacă $\alpha = 60°$; $l_1 = \frac{l}{\cos 60} = 2l$; $\Delta l = \frac{4l}{3}$; $K = \frac{G\sqrt{3}}{4l}$.

La tăierea firului $\Delta l_1 = \frac{4l}{2} > \Delta l$, firul elastic se alungește brusc. Se poate calcula că la $\alpha = 45°$, firul are $\Delta l_1 = \Delta l$ rămîne inițial de aceeași lungime.

14. a) Din suspensia pe verticală (fig. IX.14, *a*) se determină $K_1 = \frac{3G}{2}$; $K_2 = 4G$. Pe masa orizontală $\Delta l_1 = 2$; $\Delta l_2 = 1$ (din enunț) deci

$$T_1 = K_1\Delta l_1 = 3G;\quad T_2 = 4G.$$

$\bar{T}_1$ și $\bar{T}_2$ sînt perpendiculare. Rezultanta lor $R = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = 5G$ este egală și de sens contrar cu forța de frecare, deci $\mu = 5$.

b) Avem (fig. IX.14, *b*): $T_1 = K_1\Delta l_1 = \frac{3G}{2}\Delta l_1$; $T_2 = 4G\Delta l_2$

$$\cos\alpha_1 = \frac{4}{5};\quad \cos\alpha_2 = \frac{3}{5}.$$

Din $\Sigma X_i = 0$: $T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0$;
$\Sigma Y_i = 0$: $T_1\sin\alpha_1 + T_2\sin\alpha_2 - G = 0$;
iar din proiecția lungimii firelor pe orizontală și verticală rezultă

$$(l_0' + \Delta l_1)\cos\alpha_1 = (l_0'' + \Delta l_2)\cos\alpha_2 = 5$$
$$(l_0' + \Delta l_1)\sin\alpha_1 - (l_0'' + \Delta l_2)\sin\alpha_2 = 0$$

găsim $\Delta l_1 = \frac{2}{5}$ m, $\Delta l_2 = \frac{1}{5}$ m; deci $l_0' = \frac{18}{2}$ m; $l_0'' = \frac{14}{5}$ m.

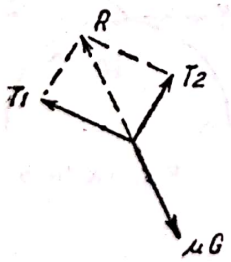


Fig. IX.14, *a*

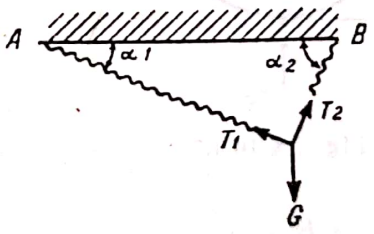


Fig. IX.14, b

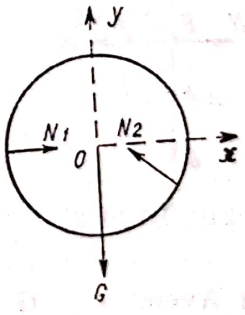


Fig. IX.15

15. $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{G}{\sin\alpha} = \frac{2G\sqrt{3}}{3}$.

Bara. $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T = G(\sqrt{3}+1)$.

Lungimea resortului în figura IX.15 este $4R\sin\alpha = 2R\sqrt{3}$, iar $K = \frac{8G}{l} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{2G}{R}$. Deci $T = K\Delta l$ dă $G(\sqrt{3}+1) = \frac{2G}{R}(2R\sqrt{3} - l_0)$ de unde $l_0 = (3\sqrt{3} - 1)\frac{R}{2} \cong 2{,}1R$.

16. a) *Firul* OB : $\Delta l = R$; $T = \frac{4G}{R}R = 4G$.

Inelul (fig. IX.16, a') : $T\frac{\sqrt{3}}{2} = \mu N + G$; $\frac{T}{2} = N \Rightarrow \mu = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$.

Cercul (fig. IX.16,a'') : $X_A = -N = -2G$; $Y_A = 2G - \mu N = -G(2\sqrt{3} - 3)$,

$F_A = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}\, G = 2G$; $2GR + \mu NR = \mu_A F_A r_A$;

$$\mu_A = \frac{2\sqrt{3}+1}{2}\frac{R}{r_A}.$$

Încastrarea : $X_D = -2G$; $Y_D = 10G + Y_A = 10G - G(2\sqrt{3} - 3) = G(13 - 2\sqrt{3})$;

$$M_D = 10G \cdot 2R - G(2\sqrt{3} - 3)\,4R + \mu_A F_A r_A.$$

b) $T = 4G$; $N = G + \frac{T}{2} = 3G$; $\mu N = \frac{T\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

$X_A = \mu N = -2G\sqrt{3}$; $Y_A = N + 2G = 5G$; $F_A = G\sqrt{37} \approx 6G$;

$\mu_A F_A r_A = \mu N \cdot 2R$; $\mu_A = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{R}{r_A}$; $X_D = -2G\sqrt{3}$;

$Y_D = Y_A + 10G$; $M_D = X_A\,4R + \mu_A F_A r_A$.

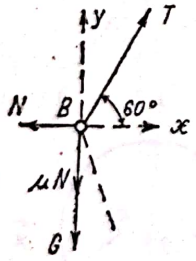


Fig. IX.16, a'

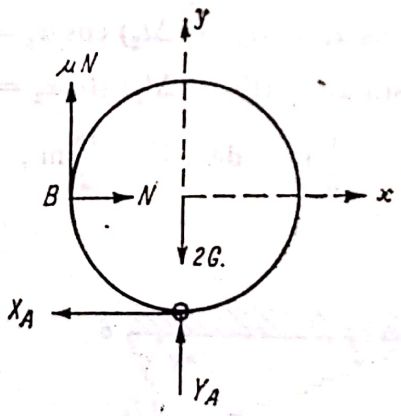


Fig. IX.16, a''

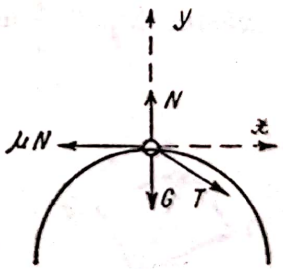


Fig. IX.16, b

17. a) Avem $T = G = K\frac{R}{2} \Rightarrow K = \frac{2G}{R}$.

Corpul B (fig. IX.17, a') : $\Delta l = R(\sqrt{3} - 1)$; $T = 2G(\sqrt{3} - 1)$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \frac{T\sqrt{3}}{2} = \mu N\,; \quad \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow G - \frac{T}{2} = N\,;$$

Deci $N = G(2 - \sqrt{3})$; $\mu = \frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Roata (fig. IX.17, a''): $X_0 = \frac{T\sqrt{3}}{2} = G\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$;

$$Y_0 = G + \frac{T}{2} = G\sqrt{3};$$

$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow \mu_0 G\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}\cdot\frac{R}{10} = TR$, deci $\mu_0 = \frac{20(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{15-6\sqrt{3}}}$.

b) Analog ca la (a):

Corpul B (fig. IX.17, b'): $T = 2G(\sqrt{3}-1)$; $N = \frac{G}{2}$; $\mu = 3\sqrt{3} - 4 \approx 1{,}1$.

Roata (fig. IX.17, b''): $X_0 = G\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu N = G(2-\sqrt{3})$; $Y_0 = N + \frac{G}{2} = G$;

$F_0 = 2G\sqrt{2-\sqrt{3}}$ deci $\mu NR = \mu_0 F_0 \frac{R}{10} \Rightarrow \mu_0 \approx 2{,}5$.

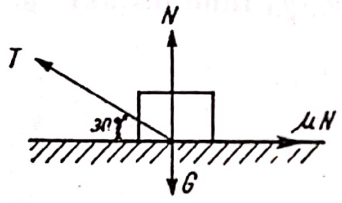


Fig. IX.17, a'

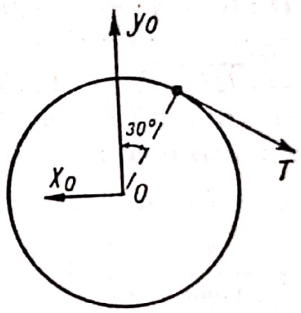


Fig. IX.17, a''

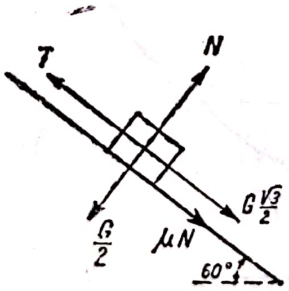


Fig. IX.17, b'

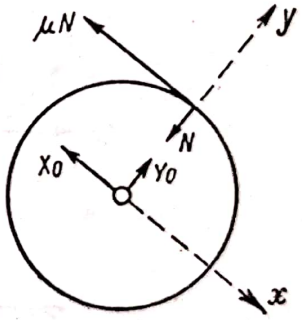


Fig. IX.17, b''

18. a) $T_0 = G = K\frac{l}{4}$; $K = \frac{4G}{l}$.

Pentru sistemul ABC, $\Sigma M_C = 0$ dă $T = \frac{7G\sqrt{3}}{18} = K(l - l_0)$

de unde $l_0 = \left(1 - \frac{7\sqrt{3}}{72}\right)l \approx \frac{5}{6}l$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\Sigma M_A = 0$ la bara $AB \Rightarrow \frac{G}{2} + Y_B - X_B\sqrt{3} = 0$;

$\Sigma M_C = 0$ la bara $BC \Rightarrow G - Y_B - X_B\sqrt{3} = 0$;

deci $X_B = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_B = \frac{G}{4}$; $T = \frac{7G}{2} = K\left(2l\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{l\sqrt{3}}{2} - l_0\right)$ deci

$$l_0 = \frac{l}{8}(12\sqrt{3} - 7).$$

C. FIRE GRELE

19. Presupunînd *firul parabolic* (fig. IX.19), secționăm în punctul cel mai de jos, luăm $\Sigma M_A = 0$ presupunînd că $AD = AC = 50$ deci greutatea lui AD : $G = q \cdot 50 = 0{,}05 \cdot 50 = 2{,}5$ N.

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow q \cdot 50 \cdot 25 = H \cdot f$. deci $H = 62{,}5$, iar $V = G = 2{,}5$

$T_{max} = \sqrt{H^2 + V^2} = 62{,}548$ N.

Din ecuația lănțișorului. Se știe că $T_A = qy_A$ (y_A fiind distanța de la directoarea lănțișorului la punctul respectiv).

$$y_A = a + f = a + 1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot a^2} + \ldots + 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{1 \cdot 2a^2} - \ldots\right),$$

de unde $a + 1 = a + \frac{x^2}{2a}$ dar x în A este $CA = x = 50$.

Deci $a = 1\,250$ m și $y_A = 1\,251$ m ; $T = 0{,}05 \cdot 1\,251 = 62{,}55$ N.

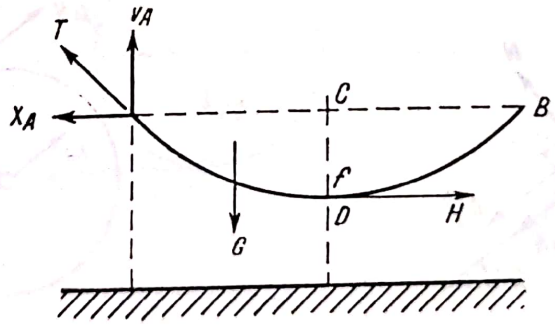


Fig. IX.19

20. Avem forța $F = 2T \cos\alpha$, iar $\cos\alpha = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$ (fig. IX.20).

Determinarea lui T prin parabolă

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow H = 1\,500$; $G = 30 = V$

Avem $T \approx H$; deci $F = 2 \cdot 1\,500 \cdot \frac{1}{10} = 300$ N.

Scanned with OKEN Scanner

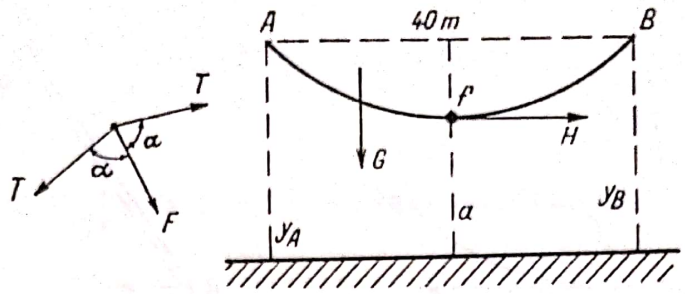


Fig. IX.20

Cu ajutorul lănțișorului $y_B = a + f = a + 0{,}2 = \frac{a}{2}\left(2 + \frac{x^2}{a^2}\right)$ pentru $x = 20$ avem $a = \frac{200}{0{,}2} = 1\,000$ m ; $T_B = q \cdot y_B = 1\,500$ N și $F = 300$ N.

21. *Partea din stînga* a cablului $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Hf = \frac{q x^2}{2}$.

Partea din dreapta $\Sigma M_B \Rightarrow H(f - 2) = q \frac{(10 - x)^2}{2}$, eliminînd H avem (fig. IX.21),

$x^2 - 30x + 150 = 0$; $x = 15 \pm \sqrt{75} = 6{,}4$ m. Cealaltă soluție este imposibilă.

$V_A = qx = 0{,}2 \cdot 6{,}4 = 1{,}28$ N ; $H = 0{,}1 \cdot 3{,}6^2 = 1{,}29$;

$T_A = \sqrt{1{,}28^2 + 1{,}29^2} \approx 1{,}8$ N.

$V_B = q \cdot 3{,}6 = 0{,}72$; $H = 1{,}29$. $T_B = \sqrt{0{,}72^2 + 1{,}29^2} = 1{,}5$ N.

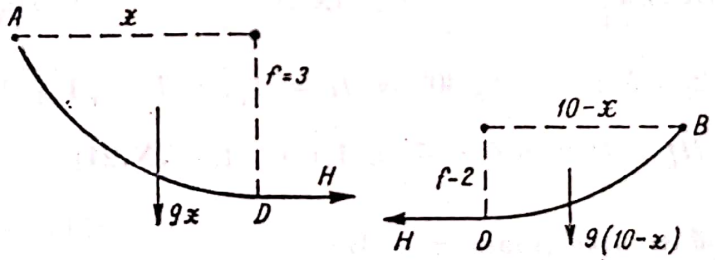


Fig. IX.21

22. *Firul* (fig. IX.22, *a'*) : $\Sigma M_B = 0$; $Q \frac{l}{4} = Hf \Rightarrow H = 3$.

Sistemul de bare (fig. IX.22, *a''*) : $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow 2N \cos 60 = 2G + 2Q \Rightarrow$
$\Rightarrow N = 13$ N.

Bara AB : $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow G \frac{l}{4} + Q \frac{l}{2} + H \frac{l\sqrt{3}}{2} - Nx = 0$,

de unde $x = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{26} l \approx 0{,}35\ l$.

Scanned with OKEN Scanner

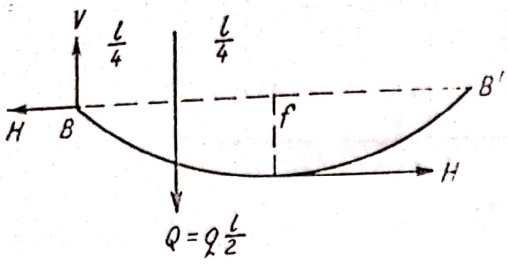


Fig. IX.22, *a'*

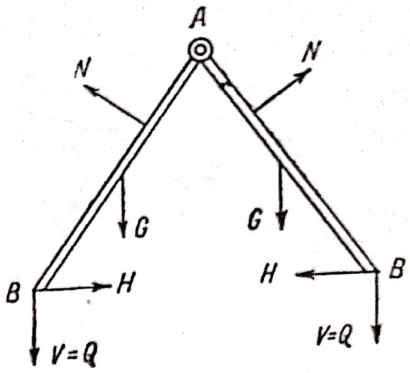


Fig. IX.22, *a''*

23. Fig. IX.23, *a'* : $\Sigma M_A = 0$ (porțiunea din stînga)

$$Q \cdot 5 = Hf \qquad (1)$$

Inelul (fig. IX.23, *a''*) : $N = Q + G = 25$; $\mu N = 1{,}5 \cdot 25 = 37{,}5$; $H = \mu N = 37{,}5$

Introducînd în (1) : $f = \frac{2}{3}$ m.

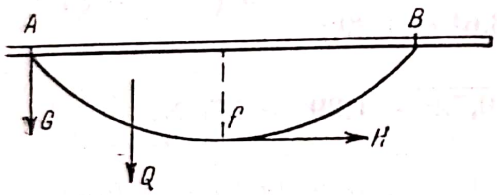


Fig. IX.23, *a'*

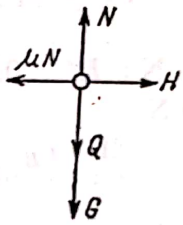


Fig. IX.23, *a''*

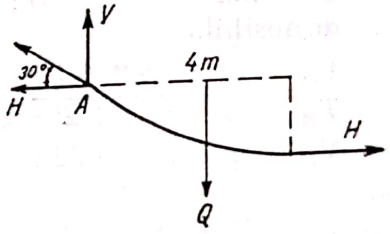


Fig. IX.24

24. $Q = q \cdot 4 = 2 = V$; $\frac{V}{H} = \operatorname{tg} 30° \Rightarrow H = 2\sqrt{3}$; $T = \sqrt{4 + 12} = 4$ N

$\Sigma M_A = 0$: $Hf = Q \cdot 2 \Rightarrow f = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}1$ m (fig. IX.24).

Frecarea :

a) *G tinde să se urce* (luăm $\pi \approx 3$) :

$$T = Ge^{\mu\alpha} \text{ unde } \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \text{ deci } 4 = Ge^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}} = 2{,}7G$$

$G = \frac{4}{2{,}7} \approx 1{,}5$ N. În cazul în care în loc de greutate G ar fi însăși cablul lăsat să atîrne, ar trebui să atîrne 3 m de cablu.

b) *G tinde să coboare.* $G = Te^{\mu\alpha} = 4 \cdot 2{,}7 = 10{,}8$ N deci dacă ar fi cablul care atîrnă, ar trebui să fie 21,6 m cablu atîrnat vertical pentru echilibru.

Concluzii. Pentru echilibru $1{,}5 \leqslant G \leqslant 10{,}8$ sau ca lungime de fir care atîrnă $3 \leqslant l \leqslant 21{,}6$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

FORȚE ÎN SPAȚIU

1. a) *Echilibrul lui D* (fig. X.1, *a*). Din cauza simetriei toate forțele din fire au aceeași mărime T, unghiurile lor cu Oz sînt date de $\sin\alpha = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = 45°$.

Din $\Sigma Z_i = 0$ pentru sistemul solidificat $Z_D = 6G$ deci $\Sigma Z_i = 0$ la nodul D dă: $4T\cos\alpha = Z_D$; $T = \frac{3G\sqrt{2}}{2}$.

Placa. Notînd cu $\bar{S}$ forțele din firele *1*, *2*, *3*, *4*, din $\Sigma Z_i = 0$ asupra plăcii avem: $4T\cos\alpha - 5G - 4S\cos\alpha = 0 \Rightarrow S = \frac{G\sqrt{2}}{4}$.

Verificare. Echilibrul nodului E: $4S\cos\alpha = G$, care se verifică.

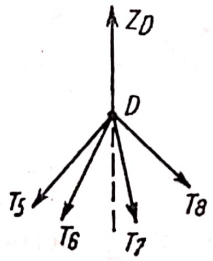


Fig. X.1, *a*

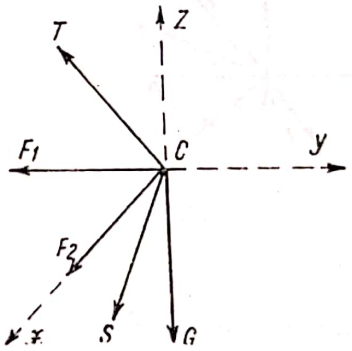


Fig. X.1, *b*

b) Aci din solidificare $Z_D = 5G$, $T = \frac{5G\sqrt{2}}{4}$, $S = \frac{G\sqrt{2}}{4}$. Luînd un nod (de ex. C) avem figura (fig. X.1, *b*) unde:

$$\Sigma X_i = 0: F_2 + \frac{T\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{S\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0: -F_1 - \frac{T\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{S\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0: T\frac{\sqrt{2}}{2} - G - \frac{S\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Găsim $F_1 = F_2 = \frac{-3}{4}G\sqrt{2}$ (compresiuni).

Scanned with OKEN Scanner

2. Cele trei forțe F sînt egale din cauza simetriei (fig. X.2). Avem $OA = \frac{2}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2}$, deci unghiul α al unei bare cu orizontala e dat de $\cos\alpha = \frac{\frac{2}{3}\,l\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{33}}{6}$.

Din $\Sigma Z_i = 0 \Rightarrow 3F\sin\alpha = G$; $F = \frac{2G}{\sqrt{33}}$.

În A: $2T\frac{\sqrt{3}}{2} = F\cos\alpha$; $T = \frac{F}{6} = \frac{G}{3\sqrt{33}}$, iar $F\sin\alpha = N = \frac{G}{3}$.

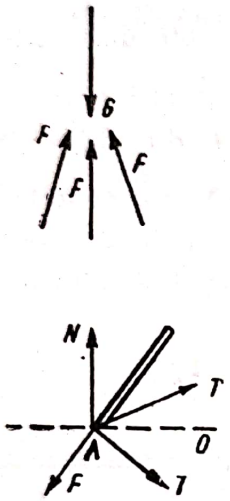


Fig. X.2

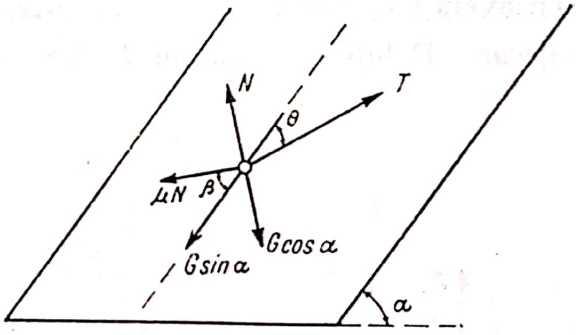


Fig. X.3

3. Descompunem pe $\bar{G}$ după linia de cea mai mare pantă și perpendicular pe ea (și pe plan). De asemenea, în planul înclinat $\bar{T} = \bar{P}$ se descompune în $T\cos\theta$ pe linia de cea mai mare pantă și $T\sin\theta$ perpendicular pe ea (fig. X.3). Deci:

Pe linia de cea mai mare pantă avem ecuația de echilibru:

$$T\cos\theta - G\sin\alpha + \mu N\cos\beta = 0 \qquad (1)$$

(presupunem că μN care e în planul înclinat face $\sphericalangle\,\beta$ cu linia de cea mai mare pantă).

Perpendicular pe linia de cea mai mare pantă în planul înclinat:

$$T\sin\theta - \mu N\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

Pe verticală: $N = G\cos\alpha$ (3)

Presupunînd $\alpha = 45°$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $G = 3P$ avem $\sin\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta$, apoi $\sin\theta = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{3}$, β dă direcția de mișcare a greutății G pe planul înclinat.

4. Forțele din figura X.4 sînt în planul înclinat, afară de $\bar{N}$.
Perpendicular pe planul înclinat avem ecuația de echilibru $N = G\cos\alpha$.
Pe linia de cea mai mare pantă: $\mu N\cos\theta = G\sin\alpha$.
Pe orizontala din plan: $F = \mu N\sin\theta$. Obținem $\cos\theta = \frac{1}{2}$; $\theta = 60°$;
$F = \mu G\cos\alpha\sin\theta = G\sqrt{3}\sin\alpha$.

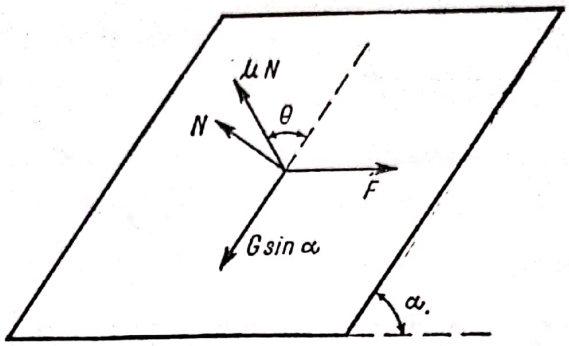


Fig. X.4

5. *a*) $X = 2P$; $Y = 4P$; $Z = P \Rightarrow R = P\sqrt{21}$.
$M_x = 4Pl$; $M_y = 4Pl$; $M_z = 4Pl \Rightarrow M = 4Pl\sqrt{3}$.
$\cos\alpha_x = \frac{2}{\sqrt{21}}$; $\cos\alpha_y = \frac{4}{\sqrt{21}}$; $\cos\alpha_z = \frac{1}{\sqrt{21}}$; ($\alpha_i$ = unghiul lui $\bar{R}$ cu axele respective);
$\cos\theta_x = \cos\theta_y = \cos\theta_z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (θ_i = unghiurile lui $\bar{M}$ cu axele respective).
$\cos\delta = \cos\alpha_x\cos\theta_x + \cos\alpha_y\cos\theta_y + \cos\alpha_z\cos\theta_z = \frac{\sqrt{7}}{3}$
($\cos\delta \approx 0{,}88$) ($\delta$ = unghiul lui $\bar{R}$ cu $\bar{M}$).
b) Față de O_1, R și $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ sînt aceleași.

$$M'_x = 3Pl;\quad M'_y = 2Pl;\quad M'_z = 0 \Rightarrow M = Pl\sqrt{13}.$$

$$\cos\theta x = \frac{3}{\sqrt{13}};\quad \cos\theta_y = \frac{2}{\sqrt{13}};\quad \cos\theta_z = 0;$$

$$\cos\delta = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{21}}.$$

Ecuația axei centrale (față de axele prin O):

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z} \text{ sau}$$

$$\frac{4l - y + 4z}{2} = \frac{4l - 2z + x}{4} = 4l - 4x + 2y = \frac{4l}{\sqrt{7}}.$$

6. a) $X = P\sqrt{2}$, $Y = 3P$, $Z = 5P \Rightarrow R = 6P$; $\cos\alpha_x = \frac{\sqrt{2}}{6}$; $\cos\alpha_y = \frac{3}{6}$;
$\cos\alpha_z = \frac{5}{6}$ (fig. X.6, *a*).

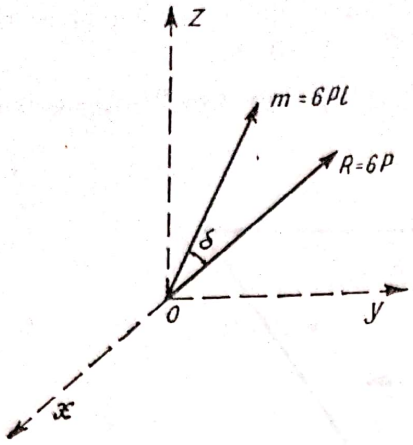


Fig. X.6, *a*

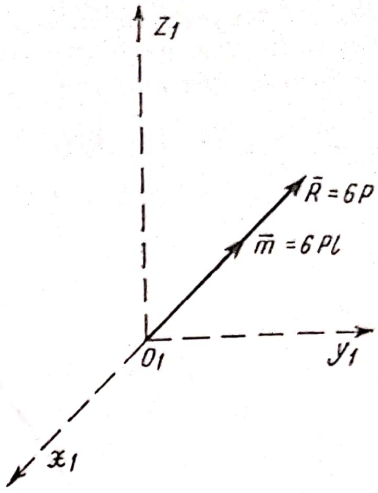


Fig. X.6, *b*

$$M_x = 5Pl\,;\ M_y = P\sqrt{2}l\,;\ M_z = 3Pl\,;\ M = 6Pl\,;\ \cos\theta_x = \frac{5}{6}\,;$$

$$\cos\theta_y = \frac{\sqrt{2}}{6};\ \cos\theta_z = \frac{3}{6}$$

$$\cos\delta = \frac{5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 15}{36} \approx 0{,}73 \quad (\delta \approx 45°).$$

b) $M_x = Pl\sqrt{2}$; $M_y = 3Pl$, $M_z = 5Pl$.

$M = 6Pl$; $\cos\theta_x = \frac{\sqrt{2}}{6}$; $\cos\theta_y = \frac{3}{6}$; $\cos\theta_z = \frac{5}{6}$;

X, Y, Z, α_x; α_y; α_z aceleași ca la (a)

$\cos\delta = 1$; $\delta = 0$, $\bar{M}$ și $\bar{R}$ au același suport care e axa centrală (fig. X.6, *b*).

7. $\bar{P}_1$ în M_1 tinde să răstoarne în jurul lui BC. Deoarece $P_1D = GD$, $\bar{P}_1 = \bar{G}$, $\bar{P}_2$ și $\bar{P}_3$ tind să răstoarne în jurul lui AB respectiv AC (fig. X.7).

Avem $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$P_2E = \frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{l}{\sqrt{5}};\quad GF = \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2\sqrt{5}}$$

$$\Sigma M_{AB} = 0 : P_2\frac{l}{\sqrt{5}} = G\frac{l}{2\sqrt{5}};\quad P_2 = \frac{G}{2} = P_3$$

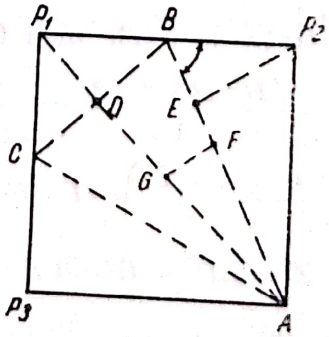


Fig. X.7

8. a) Din ecuațiile de proiecții există numai

$$\Sigma Z_i = 0 : T_1 + T_2 + T_3 = \frac{5G}{4}$$

$$\Sigma M_x = 0 : T_2 l - Gl + T_3 2l - \frac{G}{4} 2l = 0 ;$$

$$\Sigma M_y = 0 : -T_2 l + G \frac{l}{2} - T_3 l = 0 ;$$

$\Sigma M_z = 0$ nu există ;

deci : $T_1 = \frac{3G}{4}$; $T_2 = -\frac{G}{2}$; $T_3 = G$ (firul *2* trebuie înlocuit cu o bară fără greutate proprie pentru a admite compresiunea).

b) Se vede imediat că punctele de aplicație ale lui $\bar{T}_1$, $\bar{T}_3$ și $\bar{G}$ sînt coliniare, deci $T_1 = \frac{G}{2}$, $T_3 = \frac{G}{2}$; $T_2 = 0$.

9. a) $\Sigma Z_i = 0 : -T + R_A + R_D - \frac{G}{2} - G - G - \frac{G}{2} = 0$;

$\Sigma M_x = 0 : -\frac{G}{2} \frac{l}{4} - \frac{G}{2} \frac{l}{4} + R_D l - Tl = 0$;

$\Sigma M_y = 0 : \frac{G}{2} l + G \frac{l}{2} - R_A l + Tl = 0$;

de unde $R_A = \frac{5G}{2}$; $R_D = 2G$; $T = \frac{3G}{2}$.

b) Analog găsim $R_0 = 2G$, $R_A = \frac{G}{2}$; $R_B = \frac{G}{2}$.

10. $\Sigma X_i = 0 : X_0 - Q = 0$; $\Sigma Y_i = 0 : Y_0 - P = 0$; $\Sigma Z_i = 0 : Z_0 + R_A - 7G = 0$.

$\Sigma M_x = 0 : R_A 4l - 4G \cdot 2l - G \cdot 4l = 0$; $\Sigma M_y = 0 : 2Gl + 4G2l - R_A 2l + G\, 2l - Ql = 0$.

$\Sigma M_z = 0 : Q \cdot 4l - P\, 2l = 0$ de unde $P = 12G$, $Q = 6G$, $R_A = 3G$; $X_0 = Q$; $Y_0 = P$; $Z_0 = 4G$.

11. $\Sigma X_i = 0$ nu există ; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B = 0$; $\Sigma Z_i = 0 : F + Z_A + Z_B - G = 0$;

$\Sigma M_x = 0 : Fl - G \frac{l}{2} - \mu F_A r - \mu F_B r = 0$; $\Sigma M_y = 0 : -F \frac{3l}{2} - Z_A 2l + Gl = 0$;

$\Sigma M_z = 0 : Y_A 2l = 0$. Deci $F_A = Z_A$; $F_B = Z_B$ căpătăm :

$X_A = 0$; $Y_A = 0$; $X_B = 0$; $Y_B = 0$; $Z_A = \frac{G}{2} - \frac{3F}{4}$; $Z_B = \frac{G}{2} - \frac{F}{4}$;

$$F = \frac{G(l + 2\mu r)}{2(l + \mu r)} . \text{ Numeric } F = \frac{11}{21} G \approx \frac{G}{2} .$$

12 $\Sigma X_i = 0 : F + X_A + X_B = 0$; $\Sigma Y_i = 0 : Y_A + Y_B = 0$;

$\Sigma Z_i = 0 : Z_B - G = 0$.

$\Sigma M_x = 0 : -G \frac{l}{2} - Y_A 2l = 0$; $\Sigma M_y = 0 : 2X_A l + Fl = 0$;

$\Sigma M_z = 0 : -Fl + \mu \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}\, r + \mu \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}\, r + \mu \frac{2}{3} Z_B r = 0$;

Scanned with OKEN Scanner

de unde: $X_A = -\frac{F}{2}$; $X_B = -\frac{F}{2}$; $Z_B = G$;

$Y_A = -\frac{G}{2}$; $Y_B = -\frac{G}{4}$; F se determină din:

$$F = \frac{1}{40}\sqrt{4F^2 + G^2} + \frac{G}{30} \approx 0{,}06\,G.$$

Capitolul XI

FRÎNE — MAŞINI SIMPLE

1. *Fără frecare:* $F = 2P \sin\frac{\alpha}{2}$ din $\Sigma Y_i = 0$ (fig. XI.1, a').

Cu frecare · $F = 2P \sin\frac{\alpha}{2} + 2\mu P \cos\frac{\alpha}{2}$; $\mu = \operatorname{tg}\varphi$;

$$F = 2P\,\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)}{\cos\varphi}.$$

După ce încetează $\bar{F}$ de a lucra, pana are tendinţa să urce în sus, frecarea lucrează în jos (fig. XI.1, a''):

$$2P \sin\frac{\alpha}{2} = 2\mu P \cos\frac{\alpha}{2} \text{ deci } \mu \geqslant \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ \varphi \geqslant \frac{\alpha}{2},$$

pentru o frecare mai mică decît aceasta trebuie întrebuinţată o forţă $\bar{F}_1$ în jos care să împiedice ridicarea. Se găseşte

$$F_1 = 2P\,\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

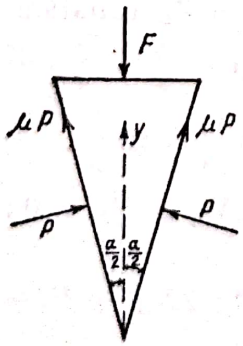


Fig. XI.1, a'

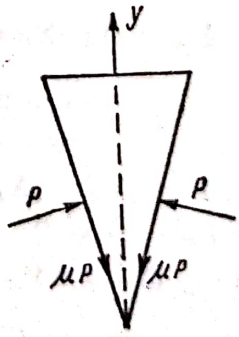


Fig. XI.1, a''

Scanned with OKEN Scanner

2. *Roata II* : $\Sigma M_{02} : \mu P R_2 - G r_2 = 0$ deci $P = \frac{G}{\mu} \frac{r_2}{R_2}$.

Roata I : $\Sigma M_{01} : \mu P R_1 - Q r_1 = Q$; $Q = \frac{G r_2 R_1}{r_1 R_2}$ (fig. XI.2).

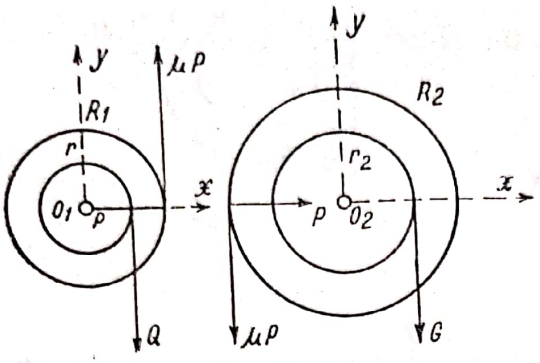


Fig. XI.2

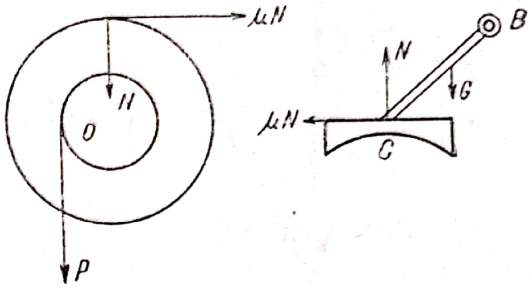


Fig. XI.3

3. *Troliul* : $\Sigma M_0 = 0 : \frac{G}{2} r - \mu N R = 0 \Rightarrow \mu N = \frac{G}{4}$.

Bara AB : $\Sigma M_B = 0 : \mu N \frac{l}{2} + N \frac{l\sqrt{3}}{2} - G \frac{l\sqrt{3}}{4} = 0$;

deci $N = \frac{6 - \sqrt{3}}{12} G$; $\mu = \frac{3}{6 - \sqrt{3}}$ (fig. XI.3).

Încastrarea : $X_A = \mu N = \frac{G}{4}$;

$Y_A = 2G - N = \frac{18 + \sqrt{3}}{12} G$; $M_A = \frac{12 + \sqrt{3}}{12} Gl$.

4. *Troliul* (fig. XI.4, *a'*) : $\Sigma M_0 = 0 : \mu N\, 2r + \mu N_1\, 2r = Gr$.

Bara BC (fig. XI.4, *a''*) : $X_B = \mu N$; $Y_B = \frac{N}{2} = P$.

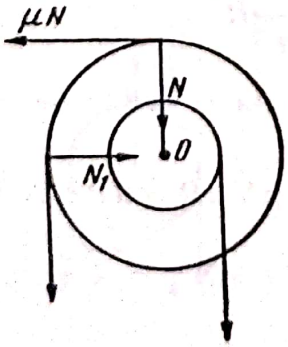


Fig. XI.4, *a'*

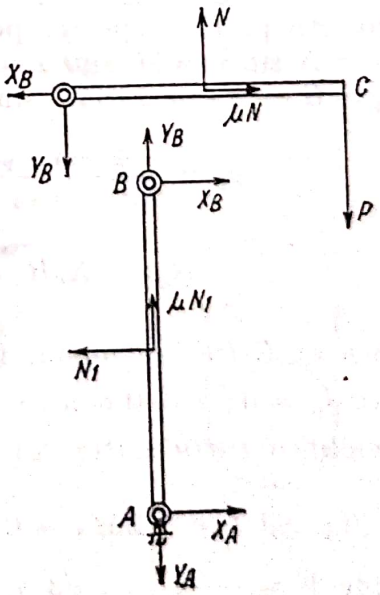


Fig. XI.4, *a''*

Bara AB (fig. XI.4, *a''*) : $\Sigma M_A = 0 : X_B \cdot 2R - N_1 R = 0$; $N_1 = 2X_B = 2\,\mu N$.

Obţinem : $N = \dfrac{G}{2\mu(1+2\mu)}$; $P = \dfrac{G}{4\mu(1+2\mu)}$; $N_1 = \dfrac{G}{1+2\mu}$.

5. *Sistemul solidificat* (fig. XI.5) $\Sigma M_0 = 0 : N\,2R\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{G}{2}\,\dfrac{R}{2} - \dfrac{G}{2}\,R -$

$- G\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = 0$;

de unde $N = \dfrac{G\sqrt{3}}{2}$; $N_0 = \dfrac{G\sqrt{3}}{2}$; $\mu N = G$; $\mu = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

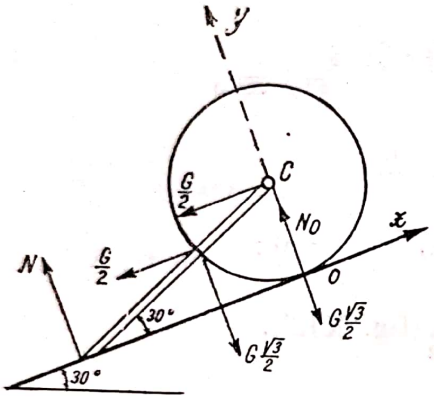


Fig. XI.5

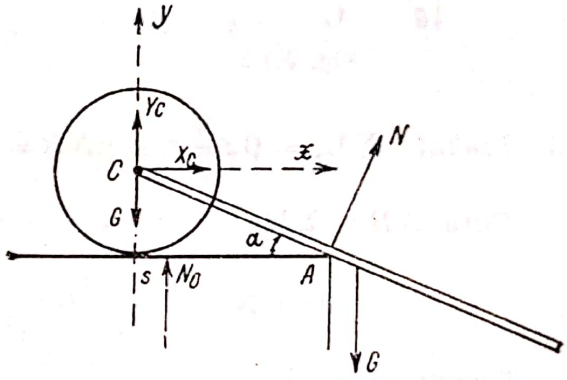


Fig. XI.6

6. a) Fie $CA = x = \dfrac{R}{\sin\alpha}$ (fig. XI.6).

Bara $\Sigma M_c = 0 : \dfrac{NR}{\sin\alpha} = G\,2R\cos\alpha$; $N = 2G\sin\alpha\cos\alpha$.

Proiecţii pe C_x respectiv pe C_y dau :
$X_c = N\sin\alpha = 2G\sin^2\alpha\cos\alpha$; $Y_c = 2G\sin\alpha\cos^2\alpha - G$
$N_0 = G - Y_c = 2G(1 - \sin\alpha\cos^2\alpha)$. Trebuie ca : $\sin\alpha\cos^2\alpha < 1$

$$\mu_0 = \frac{2G\sin^2\alpha\cos\alpha}{2G(1-\sin\alpha\cos^2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{1-\sin\alpha\cos^2\alpha};$$

$$N_0 s = X_c R\,;\; s = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{1-\sin\alpha\cos^2\alpha}R.$$

b) Dacă ar fi frecare numai în A se vede că $\mu_A = \operatorname{tg}\alpha$; $X_c = 0$ deci $\mu_0 = 0$; $s = 0$ pentru orice $\hat{\alpha}$.

7. Din echilibrul *troliului* (fig. XI.7, *a'*) $\Sigma M_0 = 0 : \mu N\,2R = GR$; $N = \dfrac{G}{2\mu}$.

Bara (fig. XI.7, *a''*) $\Sigma M_A = 0 : N\left(l + \dfrac{l}{2}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mu N\,\dfrac{l}{4} - F\,\dfrac{l}{2}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

de unde $F = \dfrac{G}{2\mu\sqrt{3}}(4 + \sqrt{3} + \mu)$.

Scanned with OKEN Scanner

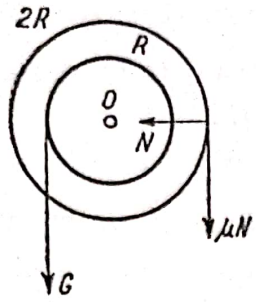


Fig. XI.7, a'

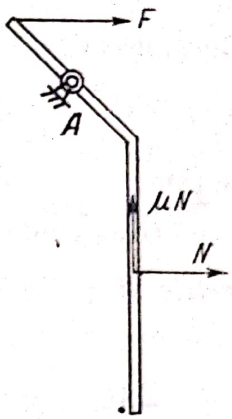


Fig. XI.7, a''

3. a) *Fir perfect flexibil* (fig. XI.8):
Scripetele I: $T_1 = P$; $T_5 = 2P$;
Scripetele II: $T_1 = T_2 = P$; $T_3 = 2P$.
Scripetele III: $T_3 = T_4 = 2P$; $G = T_3 + T_4 = 4P$; $P = \frac{G}{4}$.

Bara:

$$M_A = \frac{G}{2} l + \frac{G}{4} 2l + 2G\ 3l + \frac{G}{2} 4l = 9Gl.$$

$$X_A = 0; \quad Y_A = \frac{13\,G}{4}.$$

Firul imperfect flexibil:
Scripetele I: $P = \xi T_1$; $T_1 + P = T_5$;
Scripetele II: $T_1 = \xi T_2$; $T_1 + T_2 = T_3$;
Scripetele III: $T_3 = \xi T_4$; $T_3 + T_4 = G$.

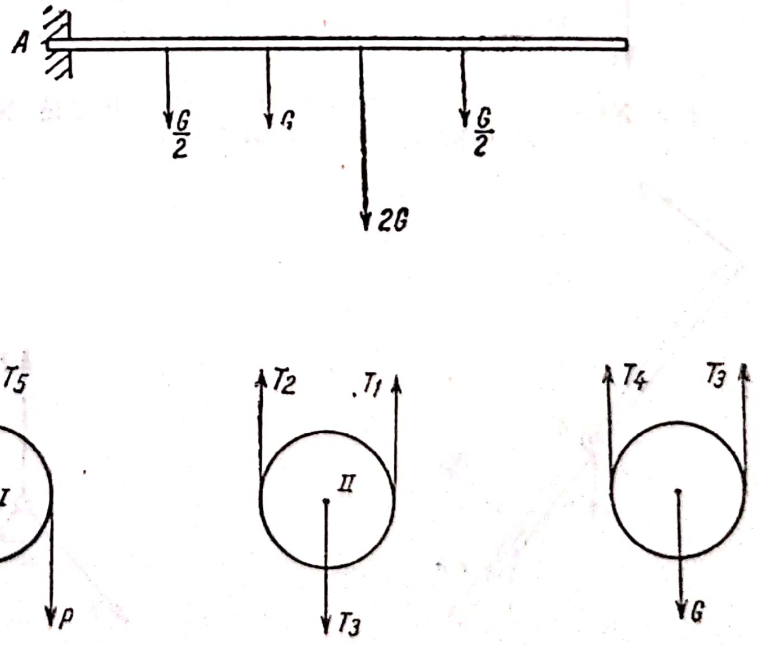


Fig. XI.8

De unde : $P = \frac{\xi^3 G}{(1+\xi)^2}$; $T_1 = \frac{\xi^2 G}{(1+\xi)^2}$; $T_2 = \frac{\xi G}{(1+\xi)^2}$; $T_3 = \frac{\xi G}{1+\xi}$;

$T_4 = \frac{G}{1+\xi}$; $T_5 = \frac{\xi^2 G}{1+\xi}$. Celelalte calcule ca la a).

Se remarcă că aceste calcule sînt făcute pentru G în tendința de urcare. Dacă G ar tinde să coboare în loc de ξ ar fi $\frac{1}{\xi}$.

9. *Scripetele* (fig. XI.9) : $Ge^{-\mu\pi} \leqslant F \leqslant Ge^{\mu\pi}$;

$$T = G + F = G(1 + e^{\pm\mu\pi}).$$

Troliul : $\Sigma M_0 = 0$: $2PR = TR \pm \mu_0 (P + T) r_0$;

de unde $P = G(1 + e^{\pm\mu\pi}) \frac{R \pm \mu_0 r_0}{2R \mp \mu_0 r_0}$.

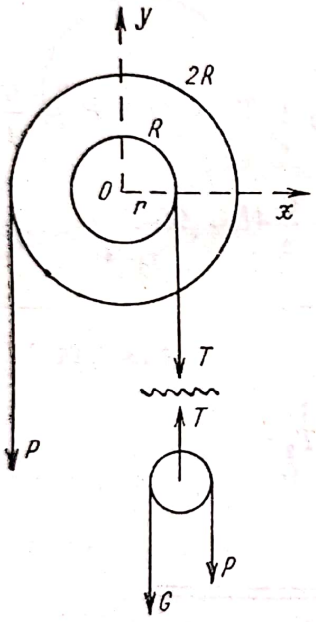


Fig. XI.9

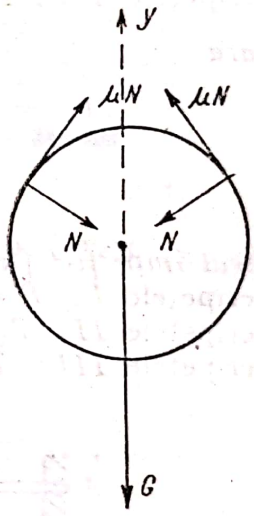


Fig. XI.10, *a'*

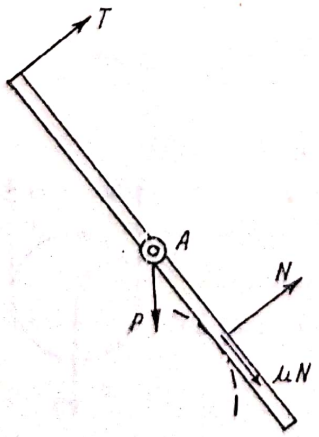


Fig. XI.10, *a''*

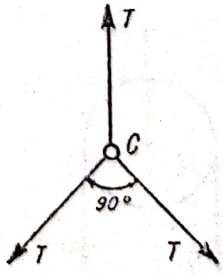


Fig. XI.10, *a'''*

10. *Sfera* (fig. XI.10, *a'*) : $\Sigma Y_i = 0$: $2\mu N \frac{\sqrt{2}}{2} = G + 2N\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Una din bare (fig. XI.10, *a''*) : $\Sigma M_A = 0 : Tl = N\frac{l}{2}$.

Cuiul C (fig. XI.10, *a'''*) : $F = 2T\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar din sistemul solidificat $F = 2P + G$, de unde $N = G + 2P$; $\mu = \frac{3G + 2P}{2(G + 2P)}$.

11. $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$ sau $P = T_1 e^{\mu \cdot \pi}$ (fig. XI.11). Punctul 0 este axa troliului, $\Sigma M_0 = 0 : P\,2r - Gr - T_1\,2r = 0 \Rightarrow P = \frac{G}{2(1 - e^{-2\mu\pi})}$.

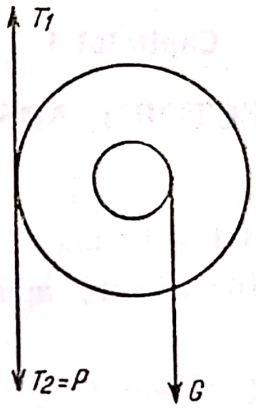


Fig. XI.11

12. Pentru *G la limita de coborîre* avem : $G = Pe^{\frac{7\pi}{\pi}}$;

aci $\alpha = 3 \cdot 2\pi + \pi = 7\pi$ deci $1\,000 = P \cdot e^{\frac{7\pi}{\pi}} = e^7 P \approx 1\,080P$;

deci $P = \frac{1000}{1080}\text{N} = 0{,}92$ N.

Pentru ca *G* să fie *la limita de urcare* :

$P = 1\,000\, e^{\mu\alpha}$; $P = 1\,000 \cdot 1\,080 = 1\,080\,000$ N.

Partea a II-a

CINEMATICA ȘI DINAMICA

Capitolul I

TRAIECTORII, MIȘCĂRI

1. a) *Corpul* I : $s_1 = v_1 t = 3 \cdot 4 = 12$ m.

Corpul II : $s = \frac{at^2}{2} = 16$; $a = 2$; $m_2 a = 20$; $m_2 = 10$ kg ; $G_2 = m_2 g \approx 100$ N.

b) $F_2 - \mu G_2 = m_2 \cdot 2$ sau $20 - 0{,}2\, m_2 g = m_2 \cdot 2 \Rightarrow m_2 = 5$ kg ; $G_2 \approx 50$ N.

c) Rezultanta lui $\vec{F}_1$ și $\mu\vec{G}_1$ trebuie să fie nulă pentru $v = \text{const.}$ $F_1 = \mu G_1 \Rightarrow F_1 = 6$ N.

d) La A și B avem după 4 s : $v_A = 3$ m/s ; $v_B = at = 2 \cdot 4 = 8$ m/s.

Mișcare întîrziată :

Corpul I : $-\mu G_1 = m_1 a_1$; $a_1 = -2$ m/s^2.

Corpul II : $-\mu G_2 = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = -2$ m/s^2.

La oprire : $v_f = 0$, deci :

Corpul I : $0 = v_A + a_1 t_1 = 3 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}$ s ; $s_1 = v_A t_1 + \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{9}{4}$ m.

Corpul II : $0 = 8 - 2\, t_2 \Rightarrow t_2 = 4$ s ; $s_2 = 8\, t_2 - \frac{2t_2}{2} = 16$ m.

Distanța între cele două corpuri cînd sînt oprite este :

$$d = \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 12\right)^2 + (16 + 16)^2} \approx 35 \text{ m.}$$

2. a) $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{5} = 0{,}6$ s ; $v_s = v_0 + gt = 8$ m/s.

b) $h = v_0 t + (g - a_1)\frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \frac{2{,}16}{3} = 0{,}72$ s ; $v_s = v_0 + (g - a_1)t = 6{,}32$ m/s.

c) $h = v_0 t + (g + a_2)\frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \frac{3{,}7}{7} = 0{,}53$ s ; $v_s = 9{,}42$ m/s.

d) $h = (v_0 - v_1)\, t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = 1$ s ; $v_s = (v_0 - v_1) + gt = 8$ m/s.

e) $h = (v_0 + v_1)\, t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{1{,}9}{5} = 0{,}38$ s ; $v_s = 9{,}8$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

3. După h_1, mobilul *1* are viteza $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ (fig. I.3). El parcurge restul $y - h_1$ în timpul t dat de:

$$y - h_1 = \sqrt{2gh_1}\, t + \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

În acest timp mobilul *2* parcurge $y - h_2$ fără viteză inițială

$$y - h_2 = \frac{gt^2}{2}; \qquad (2)$$

din ecuațiile (1) și (2) se determină t și y: $y = \frac{(h_1 + h_2)^2}{4h_1}$; $t = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{2gh_1}}$. Se deduce că $h_2 > h_1$.

Vitezele la sol sînt:

$$V_1 = \sqrt{2gy} = \sqrt{\frac{g}{2h_1}}\,(h_1 + h_2); \quad V_2 = gt = \frac{g(h_2 - h_1)}{\sqrt{2gh_1}}.$$

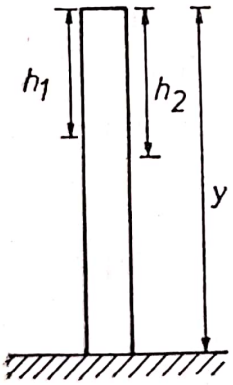


Fig. I.3

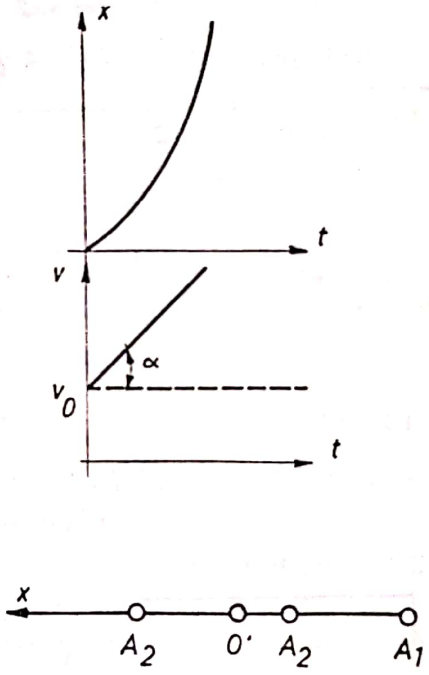


Fig. I.4, *a*

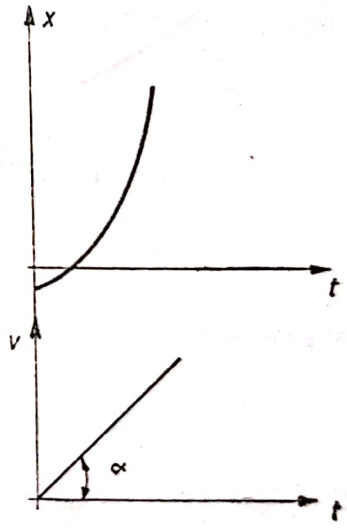


Fig. I.4, *b*

4. Din ecuația $m\ddot{x} = X$ rezultă:

$a = \ddot{x} + 4$; $v = 4t + C_1$; $x = 2t^2 + C_1 t + C_2$.

a) $C_1 = 2$; $C_2 = 0$ ecuația parametrică este $x = 2t^2 + 2t$; $v = 4t + 2$; la $t = 1$, $x = 4$, $v = 6$.

b) $C_1 = 0$; $C_2 = -1$ ecuația parametrică este $x = 2t^2 - 1$; $v = \dot{x} = 4t$; la $t = 1$, $x = 1$, $v = 4$.

Diagramele mișcării:

a) Mișcarea este accelerată (fig. I.4, *a*); pornește din O cu $v_0 = 2$, $a_0 = 4$. La $t = 1$ este în A_1 ($x_1 = 4$) cu $v_1 = 6$.

b) Mișcarea este accelerată (fig. I.4, *b*); pleacă din A_2 ($OA_2 = -1$) cu $v_2 = 0$ și $a_2 = 4$. După $t = 1$ se află în A_2' ($OA_2' = 1$) cu $v_2' = 4$ m/s.

5. $\ddot{x} = 32$, $\ddot{y} = 0$ deci $\dot{x} = 32t + C_1$, $\dot{y} = K_1$ și $x = \frac{32t^2}{2} + C_1 t + C_2$; $y = K_1 t + K_2$.

a) $C_2 = 0$; $C_1 = 2$; $K_2 = 0$; $K_1 = 4$.
Ecuațiile parametrice sînt:
$x = 16t^2 + 2t$; $y = 4t$.
Eliminînd pe t, ecuația traiectoriei este $2y^2 + y = 2x$ (parabolă, fig. I.5, *a*).

b) $C_1 = 0$; $C_2 = 1$; $K_1 = 4$; $K_2 = 2$.
$x = 16t^2 + 1$; $y = 4t + 2$.
Ecuația traiectoriei este $x = (y - 2)^2 + 1$ (parabolă, fig. I.5, *b*).

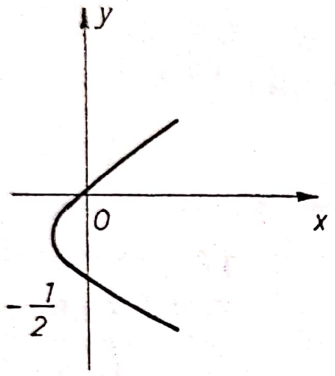


Fig. I.5, *a*

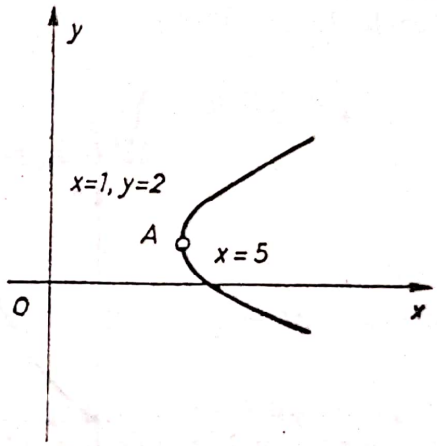


Fig. I.5, *b*

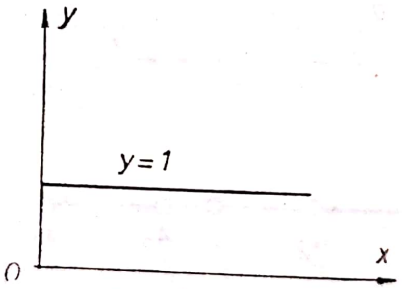


Fig. I.5, *c*

c) $C_1 = 1$; $C_2 = 0$; $K_1 = 0$; $K_2 = 1$.
$x = 16t^2 + t$; $y = 1$.
Traiectoria este dreapta $y = 1$ paralelă cu Ox (fig. I.5, *c*) și punctul se deplasează pe ea cu legea mișcării $x = 16t^2 + t$.

6. $\ddot{x} - x = 0$; $\ddot{y} - y = 0$. Ecuațiile caracteristice $r^2 - 1 = 0$ dau:
$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$; $y = K_1 e^t + K_2 e^{-t}$;

a) aplicînd condițiile inițiale se găsește: $C_1 = 1$; $C_2 = -1$; $K_1 = 2$; $K_2 = -2$; deci ecuațiile parametrice sînt:
$x = e^t - e^{-t}$; $y = 2(e^t - e^{-t})$; eliminînd pe t, ecuația traiectoriei este $y = 2x$ (dreaptă, fig. I.6, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

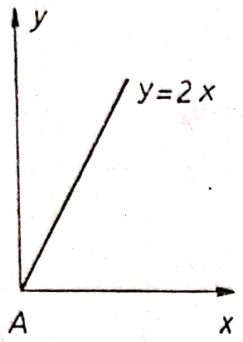


Fig. I.6, *a*

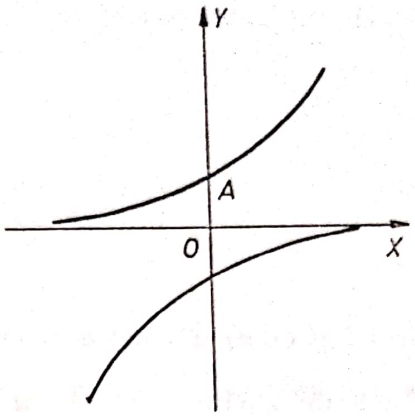


Fig. I.6, *b*

b) Analog: $C_1 = \frac{1}{2}$; $C_2 = \frac{-1}{2}$; $K_1 = 2$; $K_2 = 0$; de unde $x = \frac{y^2 - 4}{4y}$ este ecuaţia traiectoriei (fig. I.6, *b*).

7. $\frac{dv_x}{dt} = 0$; $\frac{dv_y}{dt} = v_y$ de unde: $v_x = C_1$; $x = C_1 t + C_2$ şi $\log v_y = t + K_1$; $v_y = e^{t+K_1}$; $y = e^t + te^{K_1} + K_2$. Aplicînd condiţiile iniţiale, avem:

a) $C_1 = 1$; $C_2 = 0$; $K_1 = 0$; $K_2 = 1$ $x = t$; $y = e^t + 1$ deci ecuaţia traiectoriei este $y = e^x + 1$ (exponenţială).

b) $C_1 = 0$; $C_2 = 1$; $K_1 = 0$; $K_2 = 0$ deci $x = 1$; $y = e^t$ (dreaptă paralelă cu Oy).

8. Din eliminarea lui t se obţine elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ (fig. I.8).

a) Găsim condiţiile iniţiale din ecuaţiile parametrice:

$(t = 0)$ Punctul A $\left\{ \begin{array}{l} x_A = 4,\ y_A = 0\ ;\ v_{xA} = 0\ ;\ v_{yA} = 2 (v_A = 2)\ ; \\ a_{xA} = -4\ ;\ a_{yA} = 0\ (a_A = -4). \end{array} \right.$

$\left(t = \frac{\pi}{4}\right)$ Punctul B $\left\{ \begin{array}{l} x_B = 2\sqrt{2}\ ;\ y_B = \sqrt{2}\ ;\ v_{xB} = -2\sqrt{2}\ ;\ v_{yB} = \sqrt{2}\ (v_B = \\ = \sqrt{10})\ ; \\ a_{xB} = -2\sqrt{2}\ ;\ a_{yB} = -\sqrt{2}\ (a_B = \sqrt{10}). \end{array} \right.$

$\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$ Punctul C $\left\{ \begin{array}{l} x_c = 0\ ;\ y_c = 2,\ v_{xc} = -4,\ v_{yc} = 0\ (y_c = -4),\ a_{xc} = 0, \\ a_{yc} = -2. \end{array} \right.$

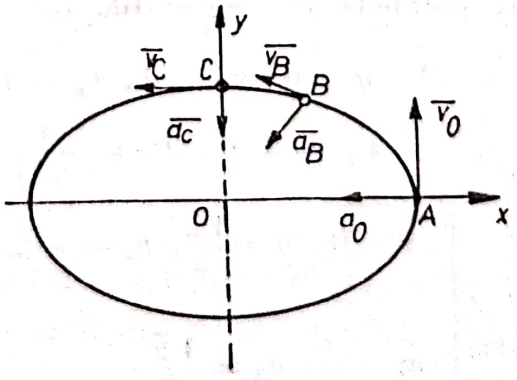


Fig. I.8

Raza de curbură în B: $\bar{v}$ face $\hat{\alpha}_x$ cu Ox $\left(\cos\alpha_x = -\frac{2\sqrt{2}}{10},\ \cos\alpha_y = \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$;

$\bar{a}$ face $\hat{\theta}_x$ cu Ox $\left(\cos\theta_x = -\frac{2\sqrt{2}}{10};\ \cos\theta_y = -\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$.

deci $\hat{\delta}$ ($\bar{v}$ cu $\bar{a}$) este $\cos\delta = \cos\alpha_x\cos\theta_x + \ldots = 0{,}6$; $R = \frac{-\sqrt{10}}{0{,}8} \approx -4$.

Raza de curbură în A: $a = a_x = a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow -4 = \frac{4}{R}$; $R = -1$.

Raza de curbură în C: $-2 = \frac{16}{R}$; $R = -\frac{1}{8}$.

Legea conservării energiei: $X = ma_x = -mx$; $Y = ma_y = -my$;

În A: $L = 0$; $E_{\text{potențială}} = 0$; $E_{\text{cinetică}} = \frac{mv_A^2}{2} = m\cdot 2$; $E_{total} = m\cdot 2$.

În B: $L = \int_A^B (X\,dx + Y\,dy) = \int_4^{2\sqrt{2}} -mx\,dx - \int_0^{\sqrt{2}} -my\,dy = m\cdot 3$;

$E_{pot} = -L = -m\cdot 3$; $E_{cin} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{m\cdot 10}{2} = m\cdot 5$; $E_{total} = E_{pot} + E_{cin} = m\cdot 2$.

În C: $L = \int_4^0 -mx\,dx - \int_0^2 my\,dy = m\cdot 6$; $E_{pot} = -m\cdot 6$; $E_{cin} = \frac{m\cdot 16}{2}$; $E_{tot} = m\cdot 2$.

b) Aceeași traiectorie, dar se găsește ca punct de pornire C iar la $t = \frac{\pi}{2}$ mobilul este punctul A:

la $t = 0$ $\begin{cases} x = 0;\ y = 2;\ v_x = 4;\ v_y = 0,\ (v = 4); \\ a_x = 0,\ a_y = -2\ (a = -2). \end{cases}$

la $t = \frac{\pi}{2}$ $\begin{cases} x = 4,\ y = 0,\ v_x = 0;\ v_y = -2;\ a_x = -4,\ a_y = 0. \end{cases}$

9. a) Traiectoria este parabola $y^2 = \frac{1-x}{2}$ (fig. I.9, *a*)

la $t = 0$ (punctul A) $\begin{cases} x = 1;\ y = 0;\ v_x = 0;\ v_y = 1; \\ a_x = -4;\ a_y = 0;\ R_A = \frac{-1}{4}. \end{cases}$

la $t = \frac{\pi}{4}$ (punctul B aflat la intersecția curbei cu axa oy) $\begin{cases} x = 0;\ y = \frac{\sqrt{2}}{2},\ v_x = -2,\ v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(v = \frac{3\sqrt{2}}{2}\right); \\ a_x = 0;\ a_y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

În A : $L = 0$, $E_{pot} = 0$; $E_{cin} = \frac{m \cdot 1^2}{2} = \frac{m}{2}$; $E_{total} = \frac{m}{2}$.

În B : $L = \int_A^B (X\,dx + Y dy)$ unde $X = ma_x = -4mx$; $Y = -my$.

deci $L = \int_1^0 -4mx dx - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} my dy = \frac{7m}{4}$; $E_{pot} = -\frac{7m}{4}$; $E_{cin} = \frac{m}{2}\frac{9}{2}$; $E_{total} = \frac{m}{2}$.

b) Se găsește aceeași traiectorie ca la a) dar condițiile inițiale :

la $t = 0$ (punctul A) $\left\{ x = 1,\ y = 0 ;\ v_x = 0 ;\ v_y = 1,\ a_x = -4,\ a_y = 0. \right.$

după $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mobilul este în B $\left\{ x = 0,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2},\ v_x = \frac{-4}{\sqrt{2}} ;\ v_y = 1\ (v = 3) ;\ a_x = -4,\ a_y = 0 ;\ X = m\ddot{x} = -4m ;\ Y = 0. \right.$

În A : $E_p = -L = 0$; $E_c = \frac{m}{2}$.

În B : $E_p = -4\,m$; $E_c = m\,\frac{9}{2}$; $E_{total} = \frac{m}{2}$.

c) Aceeași traiectorie ca la a) dar la $t = 0$:
$x = -1$; $y = 1$; $v_x = 0$; $v_y = 0$ $(v = 0)$, $a_x = 4$, $a_y = -1$ (punct C).
Mobilul se află în A (dat de $y = 0$; $x = 1$) la $t = \frac{\pi}{2}$, cu $v_x = 0$; $v_y = -1$, $(v = -1)$, $a_x = -4$, $a_y = 0$; $X = -4mx$; $Y = -my$.
Se verifică analog legea conservării energiei :
În C : $E_p = 0$; $E_c = 0$; $E_{total} = 0$.
În A : $E_p = \frac{-m}{2}$; $E_c = \frac{m}{2}$; $E_{total} = 0$.

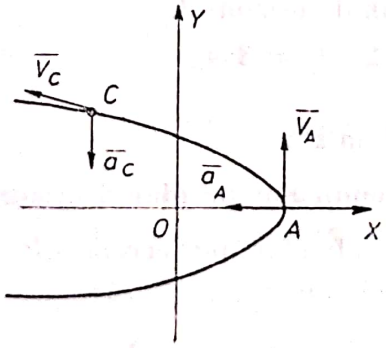


Fig. I.9, *a*

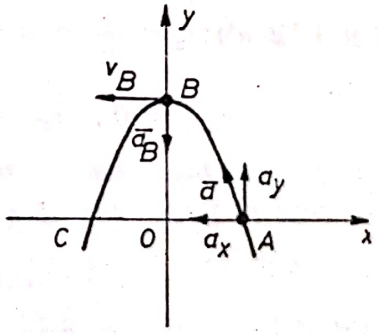


Fig. I.10, *a*

10. Traiectoria este :

a) parabola $y = 2(1 - x^2)$ (fig. I.10, *a*). Mobilul pleacă din A cu $v_0 = 0$ și accelerație $\sqrt{17}$ $(a_x = -1,\ a_y = 4)$. Ajunge în B după $t = \frac{\pi}{2}$ secunde cu $v_x = -1$, $v_y = 0$; $a_x = 0$, $a_y = -4$; $R_B = -\frac{1}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Aceeași traiectorie. Pleacă din B spre A cu $v_x = 1$, $v_y = 0$; $a_x = 0$; $a_y = -4$.

c) Pleacă din B pe aceeași traiectorie cu $v_x = 2$; $v_y = 0$; $a_x = 0$; $a_y = -16$.

d) Aceeași traiectorie. Mobilul pleacă din C spre B cu $v_x = 1$; $v_y = 4$; $a_x = 0$; $a_y = -4$.
În C: $a_{total} = a_y = -4$. Proiecția lui $\bar{a}$ perpendicular pe direcția lui $\bar{v}$ este $\frac{4}{\sqrt{17}}$ deci $a_n = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{v^2}{R} = \frac{5}{R}$; $R = \frac{5\sqrt{17}}{4}$.

11 $v_B = v_A + a_{tg}t \Rightarrow a_{tg} = 3$ m/s² unde a_{tg} este componenta accelerației pe tangentă, iar a_n este componenta accelerației pe raza de curbură. Analog pentru F_{tg} și F_c (fig. I.11).

În A: $a_n = \frac{v_A^2}{R} = \frac{16}{2} = 8$ m/s²;
$F_{tg} = ma_{tg} = 9$ N;
$F_c = ma_n = 24$ N;
$N'_A = mg \approx 30$ N;
$N''_A = F_c = 24$ N.

În B: $a_n = \frac{v_B^2}{R} = 50$ m/s²;
$F_{tg} = 9$ N;
$F_c = 450$ N;
$N'_B = mg = 30$ N;
$N''_B = F_c = 450$ N.

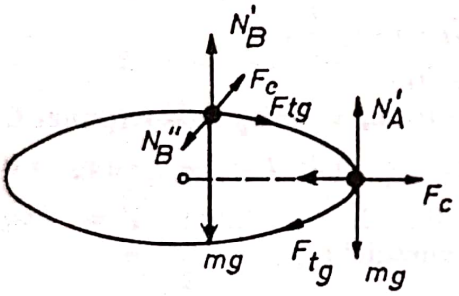


Fig. I.11

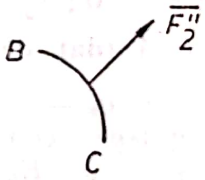


Fig. I.12, a'

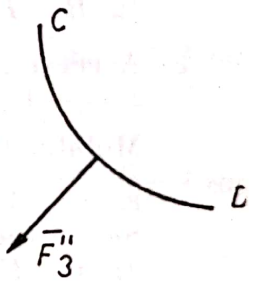


Fig. I.12, a''

12. *Porțiunea* AB: $s_1 = 12$ m; $v_1 = 2$ m/s; $t_1 = 6$ s; $a_1 = 0$; $F_1 = N_1 = mg \approx 50$ N, perpendicular pe planul orizontal.

BC (fig. I.12, a'): $s_2 = \frac{\pi r}{2} \cong 6$ m; $v_2 = 2$; $t_2 = 3$ s;

$a_{2tg} = 0$; $a_{2n} = \frac{v_2^2}{r} = 1$ m/s²;

$F'_2 = mg = 50$ N, perpendicular pe planul orizontal;

$F''_2 = \frac{mv^2}{r} = 5$ N, perpendicular pe cercul BC în plan orizontal.

CD (fig. I.12, a''): $s_3 = \frac{\pi \cdot 2r}{2} \approx 12$ m; $v_3 = 2$; $t_3 \approx 6$ s;

$a_{3tg} = 0$; $a_{3n} = \frac{v_3^2}{2r} = \frac{1}{2}$ m/s²;

$F'_3 = mg = 50$; $F''_3 = \frac{m v_3^2}{2r} = \frac{5}{2}$ N.

DE: $s_4 = 8$ m; $v_4 = 2$, $t_4 = 4$ s; $a_4 = 0$; $F_4 = 50$ N.
Timpul total este: $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 19$ s.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

DEPLASĂRI VIRTUALE

1. Luăm axele de coordonate ca în figura II.1 și dăm o deplasare compatibilă cu legăturile (bara se deplasează în jos). $y = l \sin \alpha$; $\delta_y = l \cos \alpha \delta\alpha$; $x = 2\,l \cos \alpha$; $\delta x = -2l \sin \alpha \delta\alpha$; $\delta L = -P\delta x - C\delta y = 0 \Rightarrow P2l \sin \alpha \delta\alpha - Gl \cos \alpha \delta\alpha = 0$. Lucrul mecanic δL în această deplasare este nul, deplasarea fiind virtuală. Rezultă $\operatorname{tg} \alpha = G/2P$ (sînt trasate numai forțele ce produc lucrul mecanic).

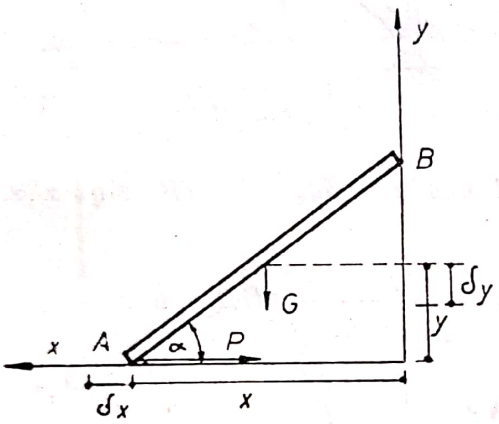


Fig. II.1

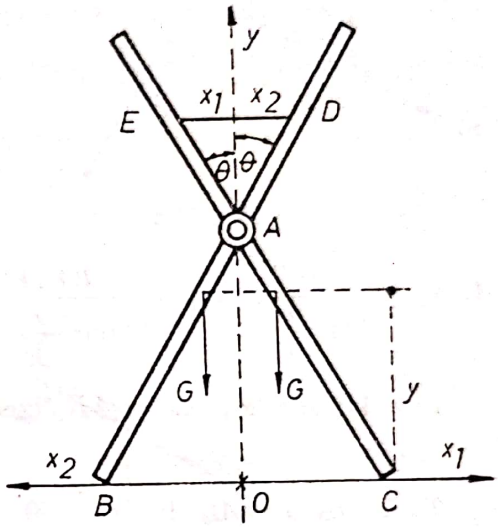


Fig. II.2

2. a) $y = \frac{3}{2} l \cos \theta$; $\delta y = \frac{3l}{2} \sin \theta \delta\theta$; $x_1 = x_2 = \frac{l}{2} \sin \theta$; $\delta x_1 = \delta x_2 = \frac{l}{2} \cos \theta \delta\theta$; $\delta L = -2G\delta y - T\delta x_1 - T\delta x_2 = 0$.

$$2 \frac{3}{2} Gl \sin \theta \delta\theta - 2T \frac{l}{2} \cos \theta \delta\theta = 0.$$

$T = 3G \operatorname{tg} \theta = G\sqrt{3}$. (Forțele T din fir au punctele de aplicație în E și D, iar sensurile spre dreapta și respectiv spre stînga),

b) $\delta y = -\frac{3l}{2} \sin \theta \delta\theta$; $\delta x_1 = \delta x_2 = \frac{3l}{4} \cos \theta \delta\theta$.

$$T = 2G \operatorname{tg} \theta = 2G \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Luăm punctul fix O în centrul figurii II.3 și axe : Os pe direcția forțelor $\bar{F}$ și Ox pe direcția forțelor $\bar{T}$. Presupunem firul tăiat și figura deformată sub un unghi α variabil :
$s = l \sin \alpha$; $\delta s = l \cos \alpha \delta\alpha$; $x = l \cos \alpha$; $\delta x = -l \sin \alpha \delta\alpha$; $\delta L = -2F\delta s - 2T\delta x = 0$ sau $\delta L = -2Fl \cos \alpha \delta\alpha + 2Tl \sin \alpha \delta\alpha = 0$. $F = T \operatorname{tg} \alpha$. Dar $T_0 = K\Delta l_0$ sau $G = K \frac{l_0}{2}$; $K = \frac{2G}{l_0}$.

Alungirea este $\Delta l = \frac{5l_0}{4} - l_0 = \frac{l_0}{4}$, deci $T = K\Delta l = \frac{G}{2}$ și $F = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Pentru echilibrul cu firul de lungime $\frac{5\,l_0}{4}$, avem $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{8}$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}53$; $F = 0{,}265\ G$.

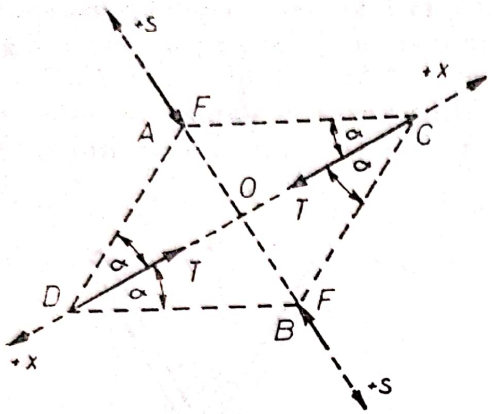


Fig. II.3

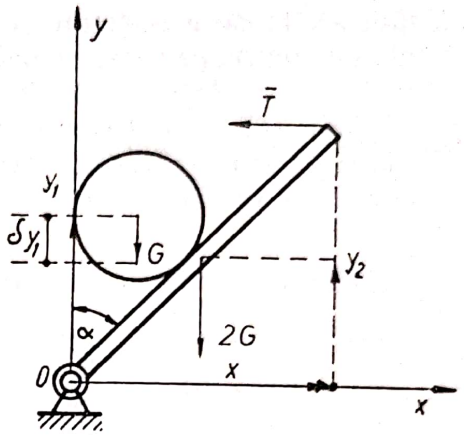


Fig. II.4

4. $y_1 = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\delta y_1 = \frac{-R\,\delta\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; $y_2 = 2R\cos\alpha$; $\delta y_2 = -2R\sin\alpha\delta\alpha$.

$x = 4R\sin\alpha$; $\delta x = 4R\cos\alpha\delta\alpha$; $\delta L = \frac{GR}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} + 4GR\sin\alpha -$

$T4R\cos\alpha = 0$, la $\alpha = 60° \Rightarrow T = G(\sqrt{3}+1)$.

5. a) $y_1 = \frac{l}{2}\cos\alpha$; $\delta y_1 = -\frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha$; $y_2 = l\cos\alpha$; $\delta y_2 = -l\sin\alpha\delta\alpha$

$y_3 = \frac{3l}{2}\cos\alpha$; $\delta y_3 = -\frac{3}{2}l\sin\alpha\delta\alpha$; $y_4 = 2l\cos\alpha$; $\delta y_4 =$

$= -2\,l\sin\alpha\delta\alpha$, $x_1 = x_2 = l\sin\alpha$; $\delta x_1 = \delta x_2 = l\cos\alpha\delta\alpha$.

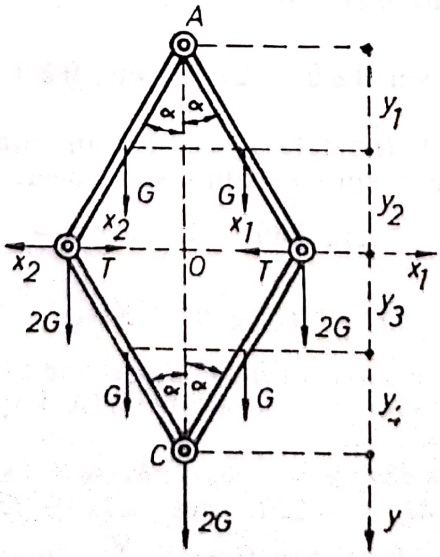


Fig. II.5

$\delta L = -2G\frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha - 4Gl\,\mathrm{si\,n}\alpha\,\delta\alpha - 2G\frac{3l}{2}\sin\alpha\delta\alpha - 2G\ 2l\sin\alpha\delta\alpha +$
$+ 2Tl\ \cos\ \alpha\delta\alpha = 0.$

De unde $T = -6G$ tg α (compresiune): trebuie pusă bară în loc de fir (fig. II.5).

b) Deplasările virtuale sînt aceleași afară de ale lui $\bar{T}$ care acum e vertical în C deci ultimul termen din δL este $-T2l\sin\alpha\delta\alpha$ în loc de $2Tl$ cos $\alpha\delta\alpha$. Se capătă $T = 6G$ (tracțiune).

6. $y_1 = \frac{l_1}{2}\sin\ \alpha + h$; $\delta y_1 = \frac{l_1}{2}\cos\ \alpha\delta\alpha$; $y_2 = \frac{l_2}{2} - \sin\ \theta$; $\delta y_2 =$
$= \frac{l_2}{2}\cos\ \theta\delta\theta$; $x = l_1\cos\alpha + l_2\cos\theta$; $\delta x = -l_1\sin\alpha\delta\alpha - l_2\sin\theta\delta\theta$ (fig. II.6). Avem $l_2\sin\theta = h + l_1\sin\alpha$, derivînd: $l_2\cos\theta\delta\theta = l_1\cos\alpha\delta\alpha$ deci $\delta\theta = \frac{l_1}{l_2}\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\delta\alpha$; $\delta L = -G_1\ \delta y_1 - G_2\delta y_2 - P\delta x = 0$ sau $\delta L =$
$= -\frac{G_1 l_1}{2}\cos\alpha - \frac{G_2 l_1}{2}\cos\alpha + \frac{P l_1}{\cos\theta}\sin\ (\alpha + \theta) = 0$ de unde
$P = \frac{(G_1 + G_2)\cos\alpha\cos\theta}{2\sin\ (\alpha + \theta)}$.

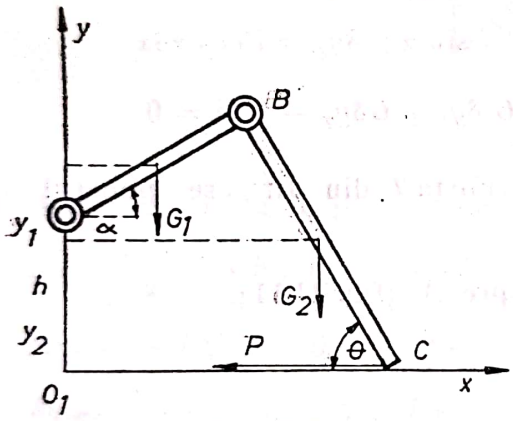


Fig. II.6

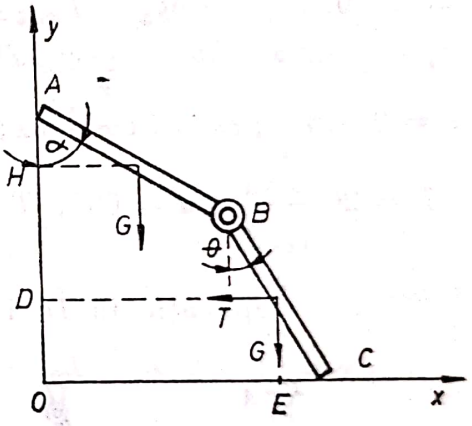


Fig. II.7, a

7. a) $y_1 = OD$; $y_2 = OH$; $x = DE$; $y_1 = \frac{l}{2}\cos\theta$; $\delta y_1 = -\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta$
$y_2 = l\cos\theta + \frac{l}{2}\cos\alpha$; $\delta y_2 = -l\sin\theta\delta\theta - \frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha$; $x = OE =$
$= l\sin\alpha + \frac{l}{2}\sin\theta$; $\delta x = l\cos\alpha\delta\alpha + \frac{l}{2}\cos\theta\delta\theta$; $AO = h = l\cos\alpha +$
$+ l\cos\theta$; $\delta h = 0 = -l\sin\alpha\delta\alpha - l\sin\theta\delta\theta$; $\delta\alpha = \frac{-\sin\theta}{\sin\alpha}\delta\theta$.
$\delta L = -G\delta y_1 - G\delta y_2 - T\delta x = 0$ de unde $T = \frac{2G\sin\theta\sin\alpha}{\cos\theta\sin\alpha - 2\cos\alpha\sin\theta}$.

b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $T = 2G$ tg θ.

8. a) Oy în jos cu O în A. Axa s cu originea în C, sens CB
$y_1 = \frac{l}{2}\cos\alpha$; $\delta y_1 = -\frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha$; $y_2 = l\cos\alpha$; $\delta y_2 = -l\sin\alpha\ \delta\alpha$;
$s = 2l\cos\frac{\alpha}{2}$; $\delta s = -l\sin\frac{\alpha}{2}\ \delta\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

$$\delta L = G\delta y_1 + P\delta y_2 - T\delta s = 0 \Rightarrow T = (G + 2P)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

b) Avem același y_1 și y_2 dar $s = 2x\cos\frac{\alpha}{2}$.

Se obține $T = (G + 2P)\frac{l}{x}\cos\frac{\alpha}{2}$.

T crește cînd x scade și cînd $\hat{\alpha}$ scade.

9. Originea axei Oy pe orizontala lui C, sensul în jos:

$$y_1 = \frac{l}{2}\cos\alpha - \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha};\quad \delta y_1 = -\frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\delta\alpha;$$

$$y_2 = \frac{3l}{2}\cos\alpha - \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha};\quad \delta y_2 = -\frac{3l}{2}\sin\alpha\delta\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\delta\alpha;$$

$$y_3 = 2l\cos\alpha - \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha};\quad \delta y_3 = -2l\sin\alpha\delta\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\delta\alpha;$$

$\delta L = 2G\,\delta y_1 + 2G\,\delta y_2 + P\delta y_3 = 0$ de unde $\sin^3\alpha = \frac{4G + P}{4G + 2P}\frac{a}{l}$.

10. Axă Oy în jos cu originea pe orizontala AD:

$y_1 = l\sin\alpha$; $\delta y_1 = l\cos\alpha\delta\alpha$; $y_2 = 2l\sin\alpha$; $\delta y_2 = 2l\cos\alpha\delta\alpha$;

$\delta L = 4G\,\delta y_1 + G\delta y_2 - T\delta y_2 = 0 \Rightarrow T = 3G.$

11. $y_1 = \frac{l}{2}\sin\alpha$; $\delta y_1 = \frac{l}{2}\cos\alpha\delta\alpha$; $y_2 = l\sin\alpha$; $\delta y_2 = l\cos\alpha\delta\alpha$

$s = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$; $\delta s = l\cos\frac{\alpha}{2}\delta\alpha$; $\delta L = 2G\,\delta y_1 + G\delta y_2 - T\delta s = 0$

$T = 2G\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\alpha = 60°$; $T = \frac{2G\sqrt{3}}{3}$ (Forța T din fir are punctul de aplicație în D și sensul spre A, (fig. II.11).

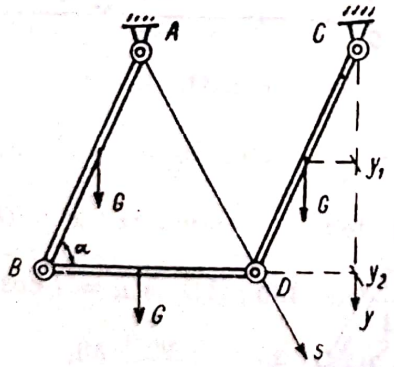


Fig. II.11

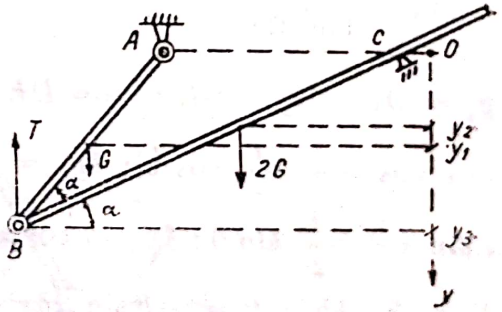


Fig. II.12

12. Axa Oy în jos cu originea pe orizontala AC (fig. II.12):

$y_1 = \frac{l}{2}\sin 2\alpha$; $\delta y_1 = l\cos 2\alpha\delta\alpha$; $y_2 = l\sin 2\alpha - l\sin\alpha$;

$\delta y_2 = 2l\cos\alpha\delta\alpha - l\cos\alpha\delta\alpha$; $y_3 = l\sin 2\alpha$; $\delta y_3 = 2l\cos 2\alpha\delta\alpha$;

$\delta L = Gl\cos 2\alpha\delta\alpha - T\,2l\cos 2\alpha\delta\alpha + 2G\,2l\cos 2\alpha\delta\alpha - 2Gl\cos\alpha\delta\alpha = 0$

de unde punînd $\alpha = 30° \Rightarrow T = \frac{G}{2}(5 - 2\sqrt{3})$.

Scanned with OKEN Scanner

13. $y_1 = \frac{l}{2}\cos\alpha$; $\delta y_1 = -\frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha$; $y_2 = l\cos\alpha + \frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\delta y_2 = -l\sin\alpha\delta\alpha$; $y_3 = \frac{l}{2}\cos\alpha + \frac{l\sqrt{2}}{2}$; $\delta y_3 = -\frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha$;

$y_T = l\cos\alpha + \frac{l\sqrt{2}}{2}$; $\delta y_T = -l\sin\alpha\delta\alpha$;

$\delta L = -G\delta y_1 - G\delta y_2 - G\delta y_3 + T\delta y_T = 0 \Rightarrow T = 2G$ (fig. II.13).

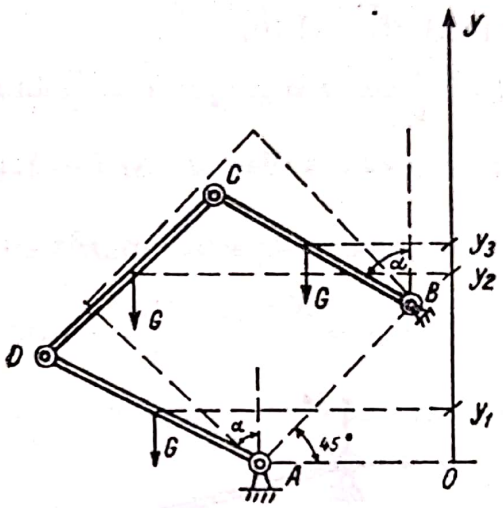


Fig. II.13

14. Axa y verticală în jos cu originea în A:

$y_P = \frac{l\sqrt{3}}{2}\cos\theta$; $\delta y_P = -\frac{l\sqrt{3}}{2}\sin\theta\delta\theta$; $y_G = l\sqrt{3}\cos\theta - \frac{l}{2}\cos\gamma$.

$\delta y_G = -l\sqrt{3}\sin\theta\delta\theta + \frac{l}{2}\sin\alpha\delta\alpha$; $y_T = l\sqrt{3}\cos\theta - l\cos\alpha$;

$\delta y_T = -l\sqrt{3}\sin\theta\delta\theta + l\sin\alpha\delta\alpha$.

Proiectînd lungimile barelor pe orizontală:

$l\sqrt{3}\sin\theta = l\sin\alpha$ deci $l\sqrt{3}\cos\theta\delta\theta = l\cos\alpha\delta\alpha$

sau $\delta\alpha = \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\cos\alpha}\delta\theta$

$\delta L = 2P\delta y_P + 2G\delta y_G - T\delta y_T = 0$ de unde

$$T = \frac{G\sin\alpha\cos\theta - (P + 2G)\sin\theta\cos\alpha}{\sin(\alpha - \theta)};$$

pentru $\theta = 30°$ și $\alpha = 60°$ avem $T = \frac{G - P}{2}$.

15. Axa y verticală în sus cu originea în A:

$y_2 = l\cos\alpha$; $\delta y_2 = -l\sin\alpha\delta\alpha$; $y_1 = 2l\cos\alpha - \frac{l}{2}\cos\theta$;

$\delta y_1 = -2l\sin\alpha\delta\alpha + \frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta$; $y_T = 2l\cos\alpha - l\cos\theta$;

$\delta y_T = -2l\sin\alpha\delta\alpha - l\sin\theta\delta\theta$.

Scanned with OKEN Scanner

Proiecție pe orizontală : $AD = 2l\frac{1}{2} + \frac{l\sqrt{3}}{2} = 2l \sin \alpha + l \sin \theta$.

Derivînd : $2l \cos \alpha \delta\alpha + l \cos \theta \delta\theta = 0 \Rightarrow \delta\theta = -\frac{2 \cos \alpha}{\cos \theta}\delta\alpha$

$\delta L = -4G\delta y_2 - 2G\delta y_1 + T\delta y_T = 0$ introducînd $\alpha = 30°$,

$$\theta = 60° \text{ găsim } T = \frac{7G}{4}.$$

16. Originea axei Oy în A (fig. II.16) :

$y_1 = \frac{l}{2}\sin\alpha$; $\delta y_1 = \frac{l}{2}\cos \alpha\delta\alpha$; $y_2 = l + \frac{l}{2}\sin\alpha$; $\delta y_2 = \frac{l}{2}\cos \alpha\delta\alpha$;

$y_3 = \frac{l}{2} + l \sin \alpha$; $\delta y_3 = l \cos \alpha\delta\alpha$; $y_N = l + l \sin \alpha$; $\delta y_N = l \cos \alpha\delta\alpha$;

$\delta L = G\frac{l}{2}\cos \alpha\delta\alpha + G\frac{l}{2}\cos \alpha\delta\alpha + Gl \cos \alpha\delta\alpha - Nl \cos \alpha\delta\alpha = 0$

$$N = 2G.$$

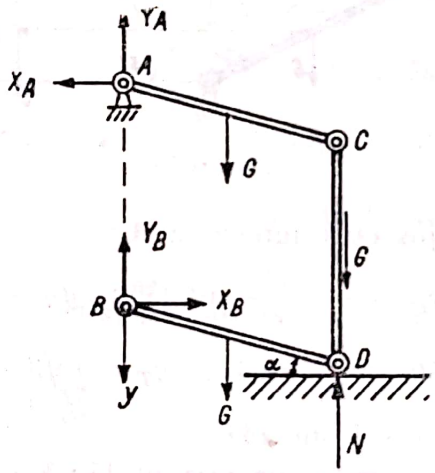


Fig. II.16

Verificare. Bara AC :

$\Sigma M_c = 0 : X_A l \sin \alpha + G\frac{l}{2}\cos \alpha - Y_A l \cos \alpha = 0$; $X_B = -X_A$.

Bara BD : $\Sigma M_D = 0$: $Y_B l \cos \alpha + X_A l \sin \alpha - \frac{G}{2} l \cos \alpha = 0$.

Găsim $Y_A + Y_B = G$.

Din *sistemul solidificat :*

$$\Sigma Y_i = 0 : N = 3G - (Y_A + Y_B) = 2G.$$

Introducînd în ecuații avem :

$$Y_A = \frac{G}{2} ; \; X_A = 0 ; \; X_B = 0 ; \; Y_B = \frac{G}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

LUCRU MECANIC — FORȚE DE INERȚIE

1. *Mersul locomotivei + vagon.* Forțele de frecare sînt echilibrate de forța de tracțiune $\bar{T}$ (mișcare uniformă)

$$T = \mu(M + m)g.$$

Mersul locomotivei pe distanța s (mișcare accelerată $\bar{a}$) (fig. III.1, *a'*). Nu s-a remarcat desprinderea vagonului, deci $\bar{T}$ e același

$$T = \mu Mg + Ma = \mu(M + m)g \Rightarrow a = \frac{\mu mg}{M}.$$

Viteza la sfîrșitul lui s (din lucrul mecanic):

$$Ts - \mu Mgs = \frac{Mv_s^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} \Rightarrow v_s^2 = v_0^2 + \frac{2\mu mg}{M}s.$$

Mișcarea locomotivei pe distanța x_1 pînă la oprire după încetarea lui T (mișcare întîrziată cu $\bar{a}_1$):

$$\mu Mg + Ma_1 = 0\,; \quad a_1 = -\mu g.$$

Legea lucrului mecanic:

$$-\mu Mgx_1 = -\frac{Mv_s^2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} + \frac{m}{M}s.$$

Mersul vagonului (mișcare întîrziată $\bar{a}_2$) (fig. III.1, *a''*) pe x_2 pînă la oprire

$$ma_2 + \mu mg = 0 \Rightarrow a_2 = -\mu g.$$

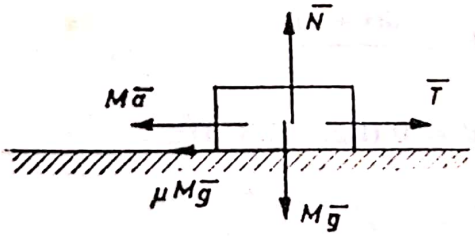


Fig. III.1, *a'*

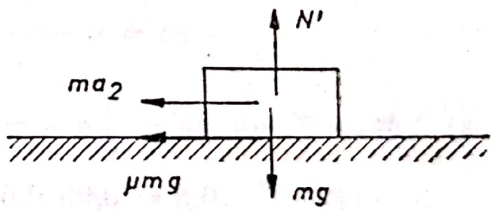


Fig. III.1, *a''*

Legea lucrului mecanic:

$$-\mu mgx_2 = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Spațiul între cele două vehicule la oprire

$$d = s + x_1 - x_2 = \frac{M + m}{M}s.$$

Scanned with OKEN Scanner

Numeric : $v_0 = 20$ m/s ; $v_s = 40{,}62$ m/s ; $x_1 = 165$ m ; $x_2 = 40$ m, $d = 625$ m.
Timpul de accelerare al locomotivei. Din

$$v_s = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v_s - v_0}{a} \approx 16 \text{ s.}$$

Timpul de întîrziere al locomotivei. Din

$$0 = v_s + a_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_s}{\mu g} = 8 \text{ s.}$$

Timpul total de la desprinderea vagonului la oprirea locomotivei

$$t + t_1 \approx 24 \text{ s.}$$

Timpul de oprire al vagonului. Din

$$0 = v_0 + a_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{\mu g} = 4\text{s},$$

deci locomotiva mai merge 20 s după oprirea vagonului.

2. Pe distanța AB legea lucrului mecanic

$$(P - G)h = \frac{G}{g}\frac{v_B^2}{2} \qquad (v_A = 0).$$

Pe distanța BC

$$-Gx = 0 - \frac{G}{g}\frac{v_B^2}{2} \Rightarrow x = \frac{P-G}{G}h.$$

Pe distanța CA

$G(x + h) = \frac{G}{g}\frac{v_A^2}{2}$ unde v_A = viteza cu care sosește la piesă.

Pe deformarea s (asupra ciocanului lucrează o forță $\bar{F}$ în sus dată de piesă), s e în jos :

$$-Fs = 0 - \frac{G}{g}\frac{v_A^2}{2} \Rightarrow F = \frac{G(x+h)}{s}.$$

3. a) $\Sigma M_a = G \sin \alpha h - \frac{G}{g} a \cdot h - G \cos \alpha d = 0$ (fig. III.3, *a*) ;

$0{,}1 \cdot 0{,}8 - \frac{a}{g} \cdot 0{,}8 = 0{,}99 \cdot 0{,}6$ găsim :

$$a = -6{,}42 \text{ m/s}^2, \; v_0 = \frac{18\,000}{3\,600} = 5 \text{ m/s} ;$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} ; \; v_f = 0 = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{5}{6{,}42} = 0{,}74 \text{ s} ;$$

$$s = 5 \cdot 0{,}74 - \frac{6{,}42 \cdot 0{,}74^2}{2} = 3{,}58 \text{ m.}$$

Frecarea : $\mu G \cos \alpha = G \sin \alpha + \frac{G}{g} a \Rightarrow \mu = 0{,}85.$

Scanned with OKEN Scanner

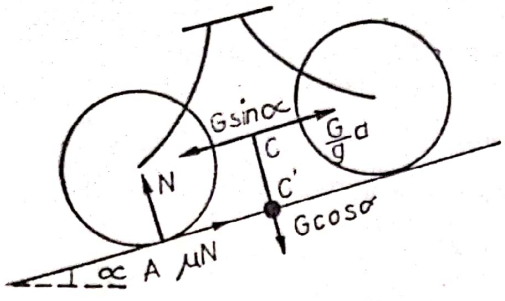


Fig. III.3, *a*

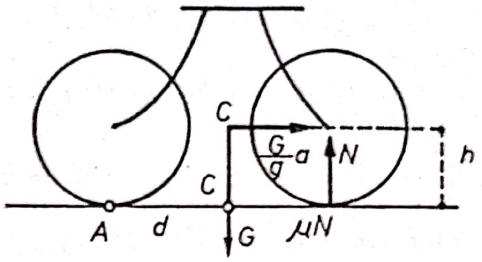


Fig. III.3, *b*

b) Din $\Sigma M_A = \frac{G}{g} ah + G \cdot d = 0$ sau $a = -g\frac{d}{h} = 7{,}5\ \text{m/s}^2$ (fig. III.3,b)

$v_0 = 5$ m/s ; $s = 5\ t - \frac{7{,}5\ t^2}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{1{,}5}$ s ;

$s = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}66$ m ; $\mu G = \frac{G}{g} a$; $\mu = 0{,}75$. (sensul lui μN este spre stînga).

4. a) *Corp solidificat, fără frecare*

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ (P+G)\sin\alpha = \frac{P+G}{g} a \Rightarrow a = g\ \sin\alpha.$$

Bara. La încastrare :

$$Y_A = P\cos\alpha\ ;\quad X_A = 0 \text{ căci } P\ \sin\ \alpha = \frac{P}{g} a\ ;\quad M_A = 0.$$

Nu se poate răsturna oricare ar fi h (din $\Sigma M_0 = 0$).

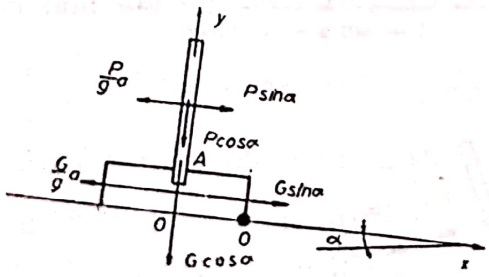


Fig. III.4. *a*

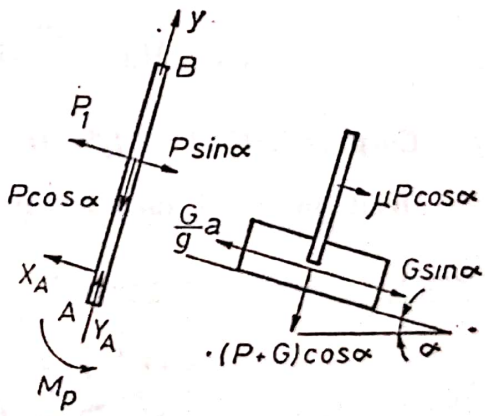


Fig. III.4, *b*

b) *Sistemul solidificat cu frecare* $\Sigma X_i = 0$:

$$(P+G)\sin\alpha - \mu\ (P+G)\ \cos\ \alpha = \frac{P+G}{g}\ a\ ;$$

deci : $a = g(\sin\ \alpha - \mu\ \cos\ \alpha)$.

Deci (fig. III.4, *b*) $P_1 = \frac{P}{g} a = P(\sin\ \alpha - \mu\ \cos\ \alpha)$.

Scanned with OKEN Scanner

Bara. Elementele încastrării:

$$X_A = \mu P \cos\alpha;\ Y_A = P\cos\alpha;\ M_A = \mu P \cos\alpha \frac{l}{2}.$$

Sistemul solidificat $\Sigma M_0 = 0 : \mu P \cos\alpha\left(\frac{l}{2}+h\right) + \mu G\cos\alpha\frac{h}{2} -$

$$-(P+G)\cos\alpha\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow h = \frac{P+G-\mu P}{(G+2P)\mu}l.$$

5. a) *Fără frecare* (fig. III.5, *a*).

La corpul $3G$ avem: $T = 3G - \frac{3G}{g}a$. Iar la corpul de pe plan solidificat: $T = 3G\sin\alpha + \frac{3G}{g}a \Rightarrow a = \frac{g}{2}(1-\sin\alpha)$

$$T = \frac{3G}{2}(1+\sin\alpha).$$

Bara: $X_A = G(1+\sin\alpha)$; $Y_A = 2G\cos\alpha$; $M_A = \frac{Gl}{2}(1+\sin\alpha)$

Sistemul solidificat. Răsturnare în raport cu O. Căpătăm:

$$h = \frac{l(3\cos\alpha - \sin\alpha - 1)}{(1+\sin\alpha)}.$$

b) *Cu frecare:* $T = 3G - \frac{3G}{g}a = 3G\sin\alpha + \mu\, 3G\cos\alpha + \frac{3G}{g}a$

se obține $a = \frac{g}{2}(1-\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$; $T = \frac{3G}{2}(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.

Bara: La încastrare $X_A = G(1+\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$; $Y_A = 2G\cos\alpha$;

$$M_A = \frac{Gl}{2}(1+\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

Corp solidificat: $M_0 = 0 \Rightarrow h = l\frac{3\cos\alpha-\sin\alpha-1+\mu\cos\alpha}{1+\sin\alpha-4\mu\cos\alpha}$ mai mare decît în cazul fără frecare.

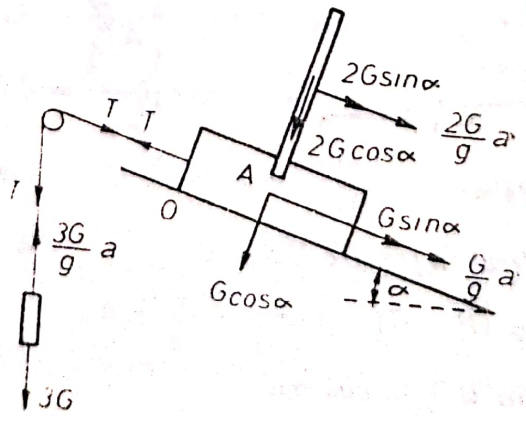


Fig. III.5, *a*

Scanned with OKEN Scanner

6. Mișcarea se face în jos pe plan (fig. III.6). Avem :

$$T = \frac{G}{2} + \frac{G}{2g}a = 3G \sin\alpha - \mu\, 3G \cos\alpha - \frac{3G}{g}a ;$$

de unde rezultă :

$$a = \frac{g}{7}(6 \sin\alpha - 6\,\mu\cos\alpha - 1) ; \quad T = \frac{3}{7}G(1 + \sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

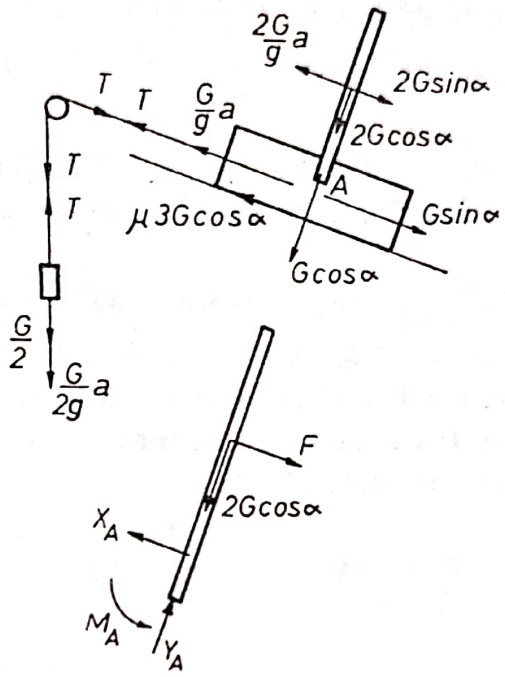


Fig. III.6

Bara. Punînd $F = \frac{2}{7}G(\sin\alpha - 6\mu\cos\alpha - 1)$, avem :

Elementele încastrării : $X_A = \frac{2}{7}G(\sin\alpha - 6\mu\cos\alpha - 1)$

$$Y_A = 2G\cos\alpha ; \quad M_A = \frac{G}{7}l(\sin\alpha - 6\mu\cos\alpha - 1).$$

Sistemul solidificat : $\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow h = \frac{2 + 3\cos\alpha - 12\,\mu\cos\alpha - 2\sin\alpha}{2 + 33\,\mu\cos\alpha - 2\sin\alpha}$

7. a) Calculăm accelerația : $v = v_0 + at \Rightarrow a = 3$ m/s².

Presupunem că P coboară : $T = P - \frac{P}{g}a = G + \frac{G}{g}a \Rightarrow P = G\frac{g+3}{g-3}$.

Presupunem că P urcă : $T = P + \frac{P}{g}a = G - \frac{G}{g}a \Rightarrow P = G\frac{g-3}{g+3}$.

b) Presupunem că P coboară : $L = P\cdot 9 - G\cdot 9 = \frac{P+G}{g}\frac{36}{2} \Rightarrow P =$

$= \frac{g+2}{g-2}G.$

Presupunem că P urcă : $L = G\cdot 9 - P\cdot 9 = \frac{P+G}{g}\frac{36}{2} \Rightarrow P = \frac{g-2}{g+2}G.$

8 a) Presupunem că P coboară : $T = P - \frac{P}{g}a = G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha + \frac{G}{g}a$

și aci $a = 3$ m/s² deci $P = \frac{G(3 + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)}{g - 3} \approx \frac{12\,G}{7}$.

Cu datele numerice nu se poate ca P să urce.

b) $L = P\cdot 9 - G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,9 = \frac{P+G}{g}\,\frac{36}{2} \Rightarrow P = G\,\frac{2 + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha}{g - 2}$

de asemenea e imposibil ca P să urce.

9. a) $s = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = 2$ m/s². Luăm $m_2 > m_1$; $T = m_1 g + m_1 a =$

$= (2 - m_1)g - (2 - m_1)a.$

de unde $(g = 10) m_1 = 0{,}8$ kg ; $m_2 = 1{,}2$ kg și $G_1 \approx 8$ N ; $G_2 = 12$ N.

b) $T = 20 - G_1 - \frac{20 - G_1}{g}a = G_1\sin\alpha + \mu G_1\cos\alpha + \frac{G_1}{g}a \Rightarrow G_1 =$

$= \frac{20(g-2)}{g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$ cu $\mu = 0{,}5$, $\alpha = 30°$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8$, $g = 10$, avem

$G_1 = 8{,}42$ N ; $G_2 = 11{,}58$ N.

a) și b) se pot rezolva și cu ajutorul legii lucrului mecanic.

10. În 2 s de la pornire P va coborî un spațiu s_1 și va avea o viteză v_1, date de legea lucrului mecanic (fig. III.10, a') :

$$L = 2G\,s_1 - Gs_1 - \frac{3G}{g}\,\frac{v_1^2}{2} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2g}{3}s_1.$$

Prin derivare

$$2v_1a_1 = \frac{2g}{3}v_1 \text{ deci } a_1 = \frac{g}{3}\,;\ s_1 = \frac{a_1t_1^2}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{2g}{3}\text{m}\,;\ v_1 = a_1t_1 = \frac{2g}{3}\text{ m/s}.$$

Tensiunea în fir este $T_1 = 2G - \frac{2G}{g}a_1 = \frac{4G}{3}$ N.

În acest moment se scoate G de la P și se adaugă la G (fig. III.10, a''). G din stînga continuă să coboare s_2 :

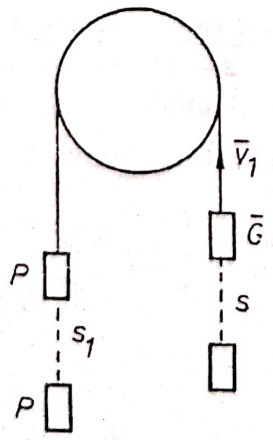


Fig. III.10, a'

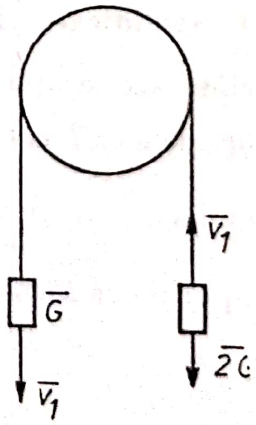


Fig. III.10, a''

Scanned with OKEN Scanner

$Gs_2 - 2Gs_2 = 0 - \frac{3G}{g}\frac{v_1^2}{2} \Rightarrow s_2 = \frac{2g}{3}$ m ; $a_2 = -\frac{g}{3}$ după aceasta sistemul începe să meargă spre dreapta uniform accelerat.

11. Lucrul mecanic pe AC:

$$2Gx - G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)x = \frac{3G}{g}\frac{v_c^2}{2};$$

Lucrul mecanic pe CB:

$$-G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)(l - x) = -\frac{G}{g}\frac{v_c^2}{2},$$

se obține:

$$x = \frac{3(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha}\frac{l}{2}.$$

12. $v_A^2 = 2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$; $v_A^2 - 4gR = v_D^2 = 0$, deci

$$R = \frac{l}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

13. Avem $T = G - \frac{G}{g}a$ (fig. III.13, a'); $T_1 = 2T = \mu P + \frac{P}{g}a_1$ (fig. III.13, a''), $a_1 = \frac{a}{2}$. Obținem:

$$a = 2g\frac{2G - \mu P}{4G + P}; \quad T = \frac{PG(1 + 2\mu)}{4G + P}. \tag{1}$$

Legea lucrului mecanic

$$Gs - \mu P\frac{s}{2} = \frac{G}{g}\frac{v^2}{2} + \frac{Pv^2}{2g\,4} \Rightarrow v^2 = 4gs\frac{2G - \mu P}{4G + P}. \tag{2}$$

Verificare. Prin derivarea lui (2)

$$2va = 4gv\frac{2G - \mu P}{4G + P}$$

se obține a dat de (1).

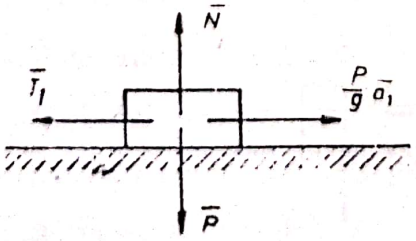


Fig. III.13, a'

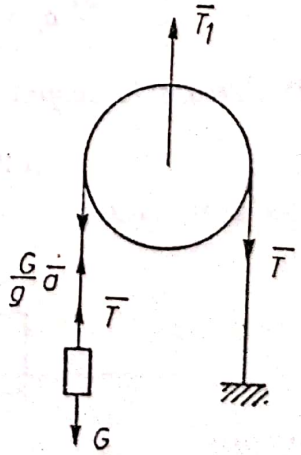


Fig. III.13, a''

14. *Sistemul solidificat :*

a) $T = P - \frac{P}{g}a = \frac{3G}{g}a + \mu\, 3G$ (fig. III.4, *a*).

Bara: $\Sigma M_A = 0 : N_B l = G\frac{l}{4} + \frac{G}{g}\frac{l}{2}a$ (reacțiunea N_B din punctul B are direcția orizontală și sensul spre dreapta).

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ N_B = \frac{G}{g}a \text{ deci } a = \frac{g}{2} \text{ și } P = 6G.$$

b) $-\mu\, 3G - \frac{3G}{g}a = 0 \Rightarrow a = -\mu g = \frac{-g}{2}$; $F_i = \frac{G}{g}a$ (fig. III.14, *b*)

$$\Sigma M_c = 0 : G\frac{l}{2} - \frac{G}{2}\frac{l}{4} - N_B\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_B = \frac{3G}{4};\quad X_c = \frac{5G}{4}\ ;\ Y_c = G.$$

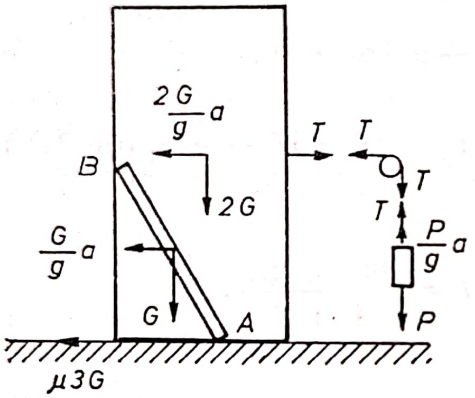


Fig. III.14, *a*

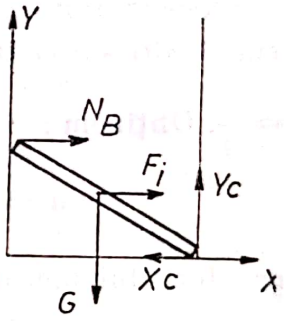


Fig. III.14, *b*

15. a) (I) *Presupunem frecare la corpul G.* Pentru sistemul solidificat $-\mu G - \frac{3G}{g}a = -\frac{\mu g}{3}$ deci forța de inerție va fi în sensul mișcării (fig. III.15, *a*).

Corpul 2G

$$\frac{2G}{g}a = F \Rightarrow F = \frac{2\mu G}{3} \text{ (tracțiune).}$$

(II) *Frecare la corpul 2G.* Aici :

$$-\mu\, 2G = \frac{3G}{g}a\ ;\quad a = -\frac{2\mu g}{3}.$$

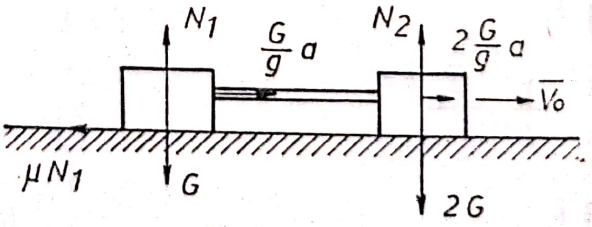


Fig. III.15, *a*

Corpul G :

$$F + \frac{G}{g}a = 0 \Rightarrow F = -\frac{2G\mu}{3} \text{ (compresiune).}$$

b) (I) Frecare la G. Cînd bara are greutate proprie avem $a = \frac{\cdot\cdot\mu g}{4}$ (fig. III.15, *b*) :

Corpul $2G$: $F = \frac{\mu G}{2}$; *Bara* : $F_1 = F + \frac{G}{g}a = \frac{3\mu G}{4}$.

Corpul G : $F_1 + \frac{G}{g}a = \mu G$ ultima ecuație se verifică.

(II) *Pentru frecare la* $2G$ vom obține $a = \frac{-\mu g}{2}$.

La corpul $2G$:

$$F = \mu G - \mu\, 2G = -\mu G \text{ (compresiune)}$$

Bara : $F_1 = \frac{\mu G}{2}$ (compresiune) ;

Corpul G : $F_1 = \frac{G}{g}a$ se verifică.

Concluzie. Cînd bara are greutate proprie, este supusă la încovoiere din cauza forțelor verticale $\vec{G}, \frac{\vec{G}}{2}, \frac{\vec{G}}{2}$ și la tracțiune cînd frecarea e la corpul G, sau la compresiune cînd frecarea e la corpul $2G$.

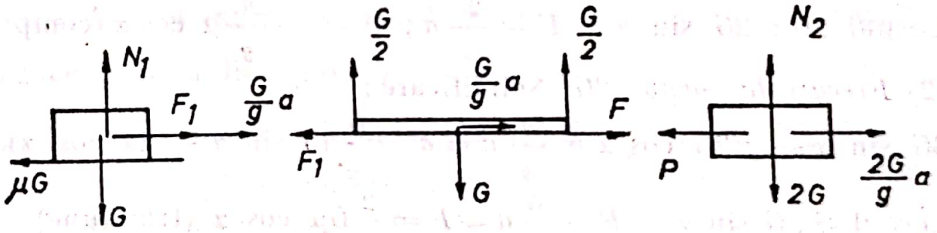


Fig. III.15, b

16. a) *Frecare la corpul* G. Sistemul în repaus :

$$\mu G \cos\alpha = 3G \sin\alpha\,; \quad \mu = 3 \operatorname{tg}\alpha.$$

Corp $2G$: $F = -2G \sin\alpha$ (compresiune).

Sistemul în mișcare. Solidificare : $3\frac{G}{g}a + 3G\sin\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha \cdot G\cos\alpha = 0$ de unde $a = -2g\sin\alpha$.

Corpul $2G$: $2G\sin\alpha + F = \frac{2G}{g}\cdot 2g\sin\alpha \Rightarrow F = 2G\sin\alpha$ (tracțiune).

b) *Frecare la corpul* $2G$. *Sistemul în repaus :*

$\mu\, 2G \cos\alpha = 3G \sin\alpha$; $\mu = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $F = G\sin\alpha$ (tracțiune).

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul în mișcare. Solidificare :

$$\frac{3G}{g}a + 3G\sin\alpha + \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha \cdot 2G\cos\alpha = 0\ ;\quad a = -2g\sin\alpha.$$

Corpul G : $G\sin\alpha = F + \frac{G}{g}a \Rightarrow F = -G\sin\alpha$ (compresiune).

În ambele cazuri se vede că de la trecerea din repaus în mișcare ca și la oprire din mișcare în repaus este schimbare bruscă de forță în bară (fig. III.16).

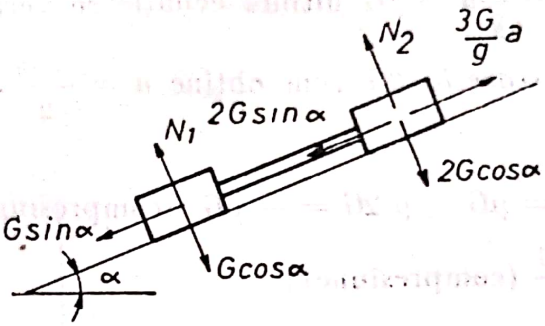


Fig. III.16

Se poate studia și cazul : G mai sus pe plan decît $2G$. Rezultatul are semn schimbat.

c) (1) *Frecare la corpul G.* Solidificare :

$$3G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha = \frac{3G}{g}a\ ;\quad a = \frac{g}{3}(3\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Corpul $2G$: $2G\sin\alpha + F = \frac{2G}{g}a\ ;\ F = -\frac{2G}{g}\mu\cos\alpha$ (compresiune).

(2) *Frecare la corpul 2G.* Solidificare :

$$3G\sin\alpha - \mu\, 2G\cos\alpha = \frac{3G}{g}a \Rightarrow a = \frac{g}{3}(3\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha).$$

Corpul G : $G\sin\alpha = F + \frac{G}{g}a \Rightarrow F = \frac{2}{3}G\mu\cos\alpha$ (tracțiune).

Dacă corpurile se inversează (G sus și $2G$ jos) se inversează semnul lui F.

17. Greutatea $2G$ începe să coboare, firul face $\hat{\theta}$ cu bara din stînga (fig. III.17). Legea lucrului mecanic de la poziția firului orizontal la această poziție unde : v_2 = viteza lui $2G$ în această poziție
v_1 = viteza lui G în această poziție

$$L = 2G\frac{\sqrt{2}}{2}l\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G\frac{\sqrt{2}}{2}l\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta\right) = \frac{2G}{g}\frac{v_2^2}{2} + \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{2}.$$

Dar $v_1 = v_2\operatorname{tg}\theta$ deci $v_2^2 = \frac{gl}{2+\operatorname{tg}^2\theta}(2\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta - 3)$

$v_2 = 0$ cînd $2\cos\theta + \sin\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 7\operatorname{tg}^2\theta - 8\operatorname{tg}\theta + 1 = 0$

Scanned with OKEN Scanner

sau $\operatorname{tg}\theta = 1$ (cazul inițial) și $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{7}$ (cazul opririi) care dă

$$\cos\theta = \frac{7\sqrt{2}}{10} \text{ și } \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \theta \approx 8°5'.$$

Determinarea tensiunii în fir. Avem $a_1 = a_2 \operatorname{tg}\theta$

$2G\frac{\sqrt{2}}{2} = T\cos\theta + \frac{2G}{g}a_2$; $G\frac{\sqrt{2}}{2} = T\sin\theta - \frac{G}{g}a_2\operatorname{tg}\theta$ de unde

$a_2 = \frac{g\sqrt{2}}{6\sin\theta}(2\sin\theta - \cos\theta)$; $T = \frac{G\sqrt{2}}{3\cos\theta\sin\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$.

La: $\theta = 45°$; $a_2 = \frac{g\sqrt{2}}{6}$; $T = \frac{4G}{3} \approx 1{,}33\ G$;

$\theta = 26°35'$: $a_2 = 0$; $T = \frac{G\sqrt{2}}{2}\sqrt{5} = 1{,}6\ G$;

$\theta = 8°5'$: $a_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{6}g$; $T = \frac{80G}{21} \approx 3{,}8G$.

Concluzie. Inelul $2G$ coboară accelerat cu accelerație descrescătoare de la unghiul de 45° al firului cu bara din stînga pînă la $\theta = 26°35'$. Apoi coboară întîrziat pînă la unghiul de 8°5'. În această mișcare tensiunea în fir crește de la $T = \frac{4G}{3}$ la $T = \frac{80G}{21}$. La acest unghi proiecția tensiunii pe bara din stînga fiind mai mare decît a lui $2G_1$ iar viteza nulă, mișcarea începe în sens contrar.

Mișcarea în sens invers. Sistemul pornește din repaus din poziția în care firul face cu bara din stînga $\theta = 8°5'$ $\left(\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{7}\right)$. Din legea lucrului mecanic unde viteza inițială e nulă iar cea finală o luăm tot nulă pentru a determina unde $(\hat{\alpha} = ?)$ se oprește axa.

$G\frac{\sqrt{2}}{2}l\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{10}\right) - G\sqrt{2}\,l\left(\frac{7\sqrt{2}}{10} - \cos\alpha\right) = 0 \Rightarrow 7\operatorname{tg}^2\alpha - 8\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$

care dă $\operatorname{tg}\alpha = 1$ și $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, deci sistemul se reîntoarce la poziția inițială, după care mișcarea va reîncepe. Mișcarea e oscilatorie.

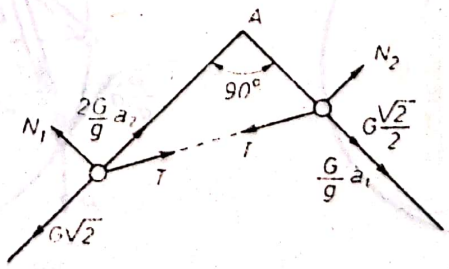


Fig. III.17

18. a) După parcurgerea unghiului θ, proiectînd pe tangentele la cerc pentru ambele inele, avem (fig. III.18):

$$T\frac{\sqrt{2}}{2} = P \sin(45 + \theta) - \frac{P}{g}a = G \sin(45 - \theta) + \frac{G}{g}a \text{ de unde}$$

$$a = \frac{g\sqrt{2}}{2(P+G)}[(P-G)\cos\theta + (P+G)\sin\theta] \text{ iar } T = \frac{2GP\cos\theta}{P+G}.$$

Se vede că: $T_{max} = \frac{2GP}{P+G}$ la $\theta = 0$ bara orizontală;

$T = 0$ la $\theta = \frac{\pi}{2}$ bara verticală;

$T < 0$ la $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Pentru $P = 2G$; $T = \frac{4}{3}G\cos\theta$.

b) Din legea lucrului mecanic unde atît energia inițială cît și cea finală sînt nule, avem:

$$L = \int_0^{\theta} P \sin(45° + \theta)R\, d\theta - \int_0^{\theta} G \sin(45° - \theta)R\, d\theta = 0$$

sau $PR\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta - \cos\theta + 1) - GR\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta + \cos\theta - 1) = 0$;

pentru $P = 2G$ avem:

$\sin\theta - 3\cos\theta + 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 0$ (poziția inițială) și $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{-3}{4}$;

$\theta \approx 172°$ $\left(\sin\theta = -\frac{3}{5};\ \cos\theta = \frac{+4}{5}\right)$ poziția finală. După care la inelul de greutate G. proiecția tensiunii și a lui $\bar{G}$ pe tangentă fiind de același sens, mișcarea începe în sens invers. Este o mișcare oscilatorie a sistemului.

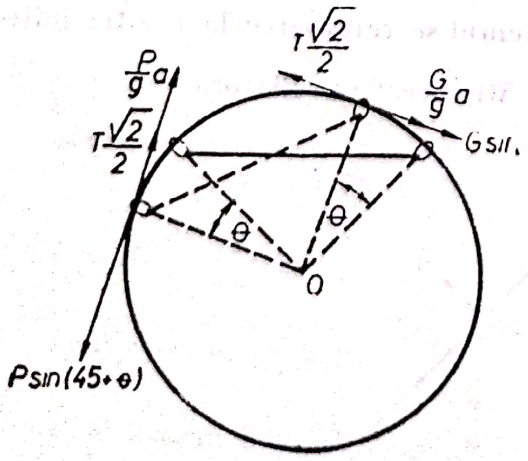


Fig. III.18

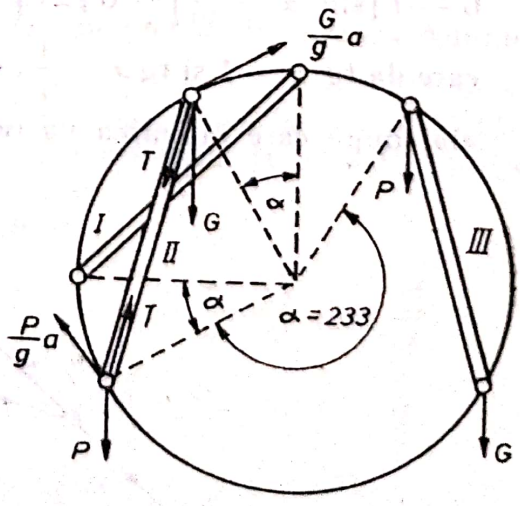


Fig. III.19

19. a) Proiectînd pe tangentă după parcurgerea unui unghi α:

$$\frac{T\sqrt{2}}{2} = \frac{G}{g}a - G \sin\alpha\,; \quad \frac{T\sqrt{2}}{2} = P\cos\alpha - \frac{P}{g}a.$$

Avem același $\bar{a}$ căci capetele barei au aceeași accelerație pe direcția barei iar unghiul acestei accelerații cu tangenta la cerc este același în P și G (fig. III.19).

De unde $T = \frac{PG(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sqrt{2}(G+P)}$

$T = 0$ cînd $\cos\alpha = \sin\alpha \Rightarrow \alpha = 45°$: firul vertical.

b) $L = \int_0^{\alpha} P\cos\alpha R\,d\alpha + \int_0^{\alpha} GR\sin\alpha d\alpha = 0$. Pentru $P = 2G$,

avem $\operatorname{tg}\alpha = 1$ și $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; cu $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$;

$\alpha = 180 + 53°$ (poziția III).

20. a) Avem $L = -G\frac{l}{2}(\sin\theta - \sin 30) = \frac{I_A}{2}\frac{\omega_0^2}{4} - \frac{I_A}{2}\omega_0^2$

$I_A = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}$ deci $\sin\theta = \frac{1}{2} + \frac{l}{4g}\omega_0^2$. Din $M_{ext} = I_A\varepsilon$ avem $-G\frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = -\frac{3g}{2l}\cos\varphi$; φ fiind unghiul cu orizontala variabil între 30° și 0, deci ε este variabil între $\frac{-3g\sqrt{3}}{4l}$ și $\frac{-3g}{2l}\cos\theta$.

b) Aci lucrează și forță de frecare pe care o presupunem concentrată la mijlocul barei.

Din $M_{ext} = I_A\varepsilon$ avem $-\mu G\frac{l}{2} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{-3g}{2l}$ (fig. III.20, *b*).

Din *legea lucrului mecanic* la rotație $L = M_{ext}\,\theta = \frac{I_A\omega_1^2}{2} - \frac{I_A\omega_0^2}{2}$ avem

$-\mu G\frac{l}{2}\theta = -\frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{3}{4}\frac{\omega_0^2}{2}$ deci $\theta = \frac{l}{4g\mu}\omega_0^2$.

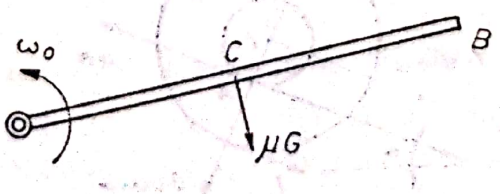


Fig. III.20, b

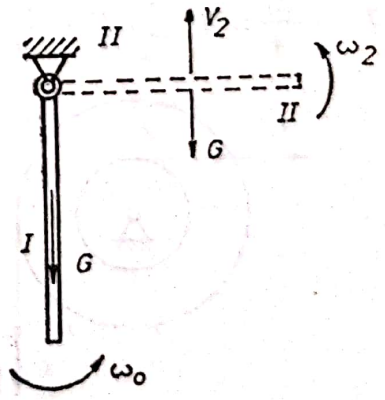


Fig. III.21

21. a) Fie ω_2 în poziția *II* (fig. III.21). După ruperea articulației bara face două rotații adică $\theta_1 = 4\pi = \omega_2 t_1$. Viteza centrului de greutate este $v_2 = \frac{l}{2}\omega_2$. Se oprește cînd $v = 0 = v_2 - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l\omega_2}{2g}$ deci $4\pi = \omega_2 \frac{l}{2}\frac{\omega_2}{g} \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{8\pi g}{l}$ cu $l = 1$ m avem numeric $\omega_2 \approx 15{,}5$ rad/s.

Legea lucrului mecanic de la (I) la (II).

$$-G\frac{l}{2} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_0^2}{2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{(8\pi+3)g}{l} \Rightarrow \omega_0 = 16{,}5 \text{ rad/s}.$$

b) $v_2 = \frac{l}{2}\omega_2 = 7{,}75$ m/s ; $v_2^2 = 2gh \Rightarrow h \approx 3$ m.

c) $\theta_2 = 7\pi = \omega_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{7\pi}{15{,}5} = 1{,}4$ s.

v_3 în cădere $= \sqrt{2gh_1} = gt_2 = 14$; $h_1 \approx \frac{196}{20} = 9{,}8$ m.

Deci de la articulație la sol $d = h_1 - h = 9{,}8 - 3 = 6{,}8$ m.

22. a) *Determinarea lui* μ_0 : $\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow G\,2R - GR - \mu_c 3G\frac{R}{10} = 0 \Rightarrow \mu_0 = \frac{10}{3}$.

Ruperea firului din stînga. În firul rămas $T_1 = G - \frac{G}{g}a_1$

unde $a_1 = 2R\varepsilon_1$; $\Sigma M_0 = 0$; $T_1\,2R - \mu_0(G+T_1)\frac{R}{10} = \frac{G}{g}\frac{4R^2}{2}\varepsilon_1$

de unde $\varepsilon_1 = \frac{5g}{8R}$; $a_1 = \frac{5g}{8}$; $T_1 = \frac{3G}{8}$.

Ruperea firului din dreapta. În firul rămas $T_2 = G - \frac{G}{g}a_2$;

$a_2 = R\varepsilon_2$; $T_2R - \mu_0(G+T)\frac{R}{10} = \frac{G}{g}\frac{4R^2}{2}\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{g}{8R}$; $a_2 = \frac{g}{8}$;

$T_2 = \frac{7G}{8}$.

23. Avem $T_1 = \mu G + \frac{G}{g}R\varepsilon$; $T_2 = G - \frac{G}{g}2R\varepsilon$.

$\Sigma M_0 = 0$: $T_2 \cdot 2R - T_1R = \frac{G}{g}\frac{4R^2}{2}\varepsilon$ (fig. III.23).

$T_2 = \frac{3G}{4}$; $T_1 = \mu G + \frac{G}{8} \Rightarrow \mu = \frac{9}{8}$.

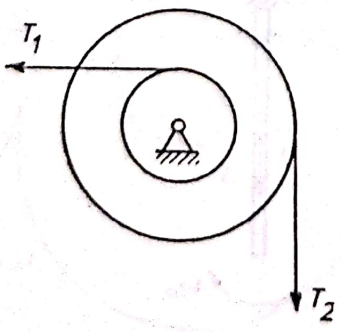


Fig. III.23

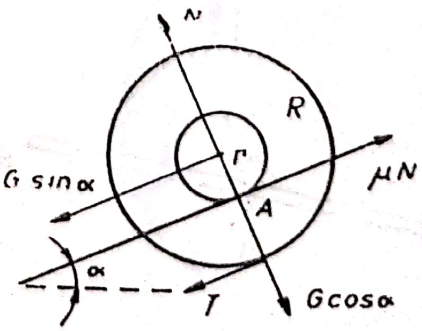


Fig. III.24

Scanned with OKEN Scanner

24. a) Pentru corpul P avem în mișcare ecuația (1), iar pentru roată ecuația (2):

(1) $T = P - \frac{P}{g}a = 2G - \frac{2G}{g}a$; $a = (R - r)\varepsilon = r\varepsilon$; $I_A = \frac{3G}{g}r^2$

(2) $\Sigma M_A = 0 : T(R - r) - G \sin \alpha r = I_A\varepsilon$, de unde $\varepsilon = \frac{3g}{10r}$; $T = \frac{7}{5}G$;

$N = G\cos\alpha$; $\mu G \cos\alpha = G \sin\alpha + T + \frac{G}{g}r\varepsilon \Rightarrow \mu = 0{,}25.$

b) $T = \frac{G}{4} + \frac{G}{4g}a$; $G \sin\alpha r - Tr = I_A\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{g}{14r}$; $T = \frac{15}{56}G$;

$\mu G \cos\alpha = G \sin\alpha + T - \frac{G}{g}r\varepsilon \Rightarrow \mu \approx 0{,}8.$

25. a) Din ecuația (1) pentru corpul G avem o relație între T și ε, iar din (2) pentru roată, a doua ecuație (fig. III.25):

(1) $T = G - \frac{G}{g}R\varepsilon$; $F_A = T + P = \frac{5G}{4} - \frac{G}{g}R\varepsilon$ (F_A este forța la ax).

(2) $\Sigma M_A = 0 : TR - \mu_0 F_A r_0 = I_A\varepsilon$ unde $I_A = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}$. De aci $\varepsilon = \frac{7g}{8{,}2\ R}$; $T \approx 0{,}17\ G.$

b) $T = G \sin\alpha - \mu G \cos\alpha - \frac{G}{g}R\varepsilon = \frac{G}{10} - \frac{G}{g}R\varepsilon.$

Găsim analog ca mai sus $\varepsilon = \frac{13\ g}{205\ R}$; $T = \frac{3}{82}G \approx 0{,}036\ G.$

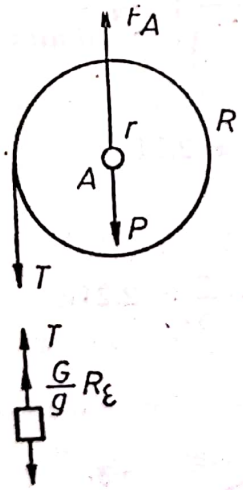


Fig. III.25

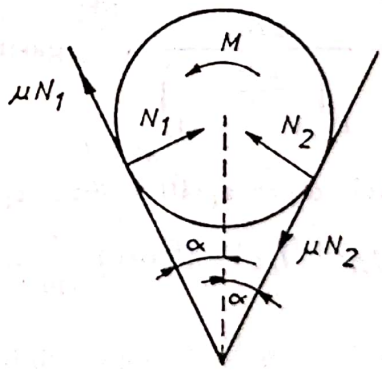


Fig. III.26

26. $\omega = \frac{\pi n}{30}$; $\varepsilon = \omega t$ (fig. III.26).

$\Sigma X_i = 0 : (N_1 - N_2)\cos\alpha - \mu(N_1 + N_2)\sin\alpha = 0;$

$\Sigma Y_i = 0 : (N_1 + N_2)\sin\alpha + \mu(N_1 - N_2)\cos\alpha = G;$

$\Sigma M_i = 0 : \mu(N_1 + N_2)R + I_0\varepsilon$ unde $I_0 = \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

$$N_1 = \frac{G(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{(1+\mu^2)\sin 2\alpha}; \quad N_2 = \frac{G(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{(1+\mu^2)\sin 2\alpha};$$

$$M = \frac{2G\mu\cos\alpha}{(1+\mu^2)\sin\alpha} R + \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{\pi n}{30} t.$$

27. a) Viteza unghiulară a roții *I* este $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = 12\pi$ rad/s.

Viteza curelei este $V = R_1\omega_1 = 6\pi$. Viteza unghiulară a roții *II* este $\omega_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{6\pi}{0{,}75} = 8\pi$ rad/s, deci $n_2 = \frac{30\omega_2}{\pi} = 240$ rot/min.

La scoaterea curelei $\omega_2 = 8\pi$, la sfîrșitul mișcării $\omega_f = 0$.

Deci $\omega_f = \omega_2 + \varepsilon t = 0 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\pi}{5}$ rad/s^2.

Momentul de frecare: $M_f = Gr_0\mu_0 = 400\cdot 0{,}1\mu$.

Momentul de inerție: $I_0 = \frac{G}{g}\frac{R_2}{2} \approx 11{,}2$; $I_0\varepsilon = -2{,}24\pi \approx -7$,

iar din $-M_{fr} - I_0\varepsilon = 0$ avem $\mu_0 = \frac{7}{40} = 0{,}165$.

Numărul n de turații pînă la oprire. Din legea lucrului mecanic

$$M_{fr}\cdot\theta = 0 - \frac{I_0\omega_2^2}{2} \Rightarrow \theta = \frac{-\omega_2^2}{2\varepsilon} = 32\cdot 5\cdot\pi = 160\pi; \; n = \frac{\theta}{2\pi} = 80 \text{ rot/min.}$$

Tensiunile în curele. Avem: $T_2R = T_1R + \mu_0Gr_0$, iar $T_2 = T_1e^{\frac{\mu 4\pi}{3}}$, deci:

$$T_1R\left(e^{\frac{\mu\,4\pi}{3}} - 1\right) = \mu_0Gr_0 \text{ sau } T_1 = \frac{\mu_0Gr_0}{R\left(e^{\frac{\mu\,4\pi}{3}} - 1\right)}; \; T_2 =$$

$$= \frac{\mu_0Gr_0}{R\left(e^{\frac{\mu\,4\pi}{3}} - 1\right)} e^{\frac{\mu 4\pi}{3}} \text{ găsim } T_1 \approx 0{,}37; \; T_2 \approx 2{,}74.$$

b) Aci $\omega_f = \varepsilon_1\cdot 40 = 8\pi$; $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{5}$; $I_0\varepsilon = 11{,}5\cdot\frac{\pi}{5} = 2{,}24\pi$

$$M_{fr} + I_0\varepsilon = 400\cdot 0{,}1\cdot\frac{7}{40} + 2{,}24\pi^2 \approx 14 \text{ J.}$$

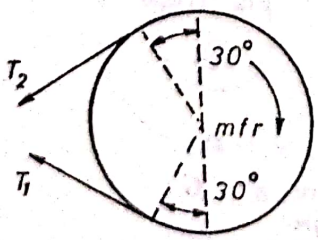


Fig. III.27

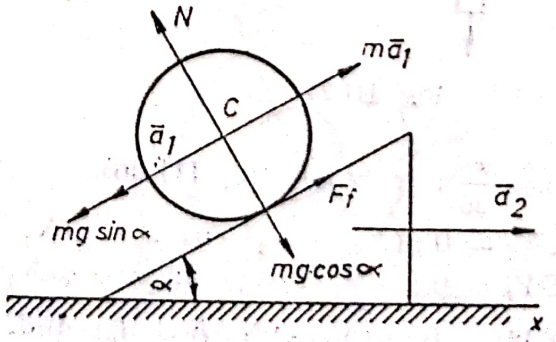


Fig. III.28

28. Fie $\bar{a}_1$ — accelerația centrului sferei ; $\bar{a}_2$ — accelerația planului ; $\bar{s}$ — deplasarea sferei ; $\bar{x}$ — deplasarea planului ; $\bar{F}_f$ — forța de frecare. $\ddot{\bar{s}} = \bar{a}_1$; $\ddot{\bar{x}} = \bar{a}_2$, $\bar{a}_{abs} = \bar{a}_{rel} + \bar{a}_{tr}$.

$\bar{a}_{rel} = \bar{a}_1$ paralel cu planul înclinat ; $\bar{a}_{tr} = \bar{a}_2$ orizontal (fig. III.28).

Proiecții paralele cu planul înclinat :

$$m(a_1 - a_2 \cos \alpha) = mg \sin \alpha - F_f.$$

Proiecții perpendiculare pe planul înclinat :

$$N = mg \cos \alpha - ma_2 \sin \alpha.$$

Momente în raport cu centrul sferei $I_c = \frac{2}{5} mR^2$

$$F_f R = \frac{2}{5} mR^2 \frac{a_1}{R} .$$

Punînd $s = \frac{a_1 t^2}{2}$; $x = \frac{a_2 t^2}{2}$ avem $\frac{7}{5} s - x \cos \alpha = g \sin \alpha \frac{2t}{2}$.

29. a) Barele AB au mișcare de rotație. Bara BB are mișcare de translație.

Legea lucrului mecanic $\left(I_A = \frac{G}{g} \frac{l^2}{3} \right)$:

$$2G \frac{l}{2} \sin \alpha + Gl \sin \alpha = 2I_A \frac{\omega^2}{2} + \frac{G}{g} \frac{v^2}{2} \text{ unde } v = l\omega.$$

Obținem $\omega^2 = \frac{12g}{5l} \sin \alpha$.

b) $G \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{G}{g} \frac{l^2}{3} \frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{l} \sin \alpha$, mai mare decît cel de la (a).

c) $G \frac{l}{2} \sin \alpha + Pl \sin \alpha = \frac{G}{g} \frac{l^2}{3} \frac{\omega^2}{2} + \frac{P}{g} l^2 \frac{\omega^2}{2} \Rightarrow P = \frac{G}{2}$.

30. Determinăm rezistența apei $R = Kv \Rightarrow 30 = K \frac{3\,600}{3\,600}$; $K = 30$

$m \frac{dv}{dt} = = - Kv$ sau $300 \frac{dv}{dt} = -30v$.

Determinarea lui $v = f(t)$.

$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{10} dt$; $\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{10} t$; $v = v_0 e^{-\frac{1}{10} t}$; $v_0 = 1$;

deci : $v = e^{-\frac{1}{10} t}$; după 5 s, $v = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}37$ m/s.

Determinarea lui $v = f(s)$.

$m \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -30v$ sau $300 dv = -30\, ds$; $dv = -\frac{1}{10} ds$.

$v = v_0 - \frac{1}{10} s$; $v = 1 - \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ m/s. Se oprește după $s = 10$ m.

31. Viteza limită e dată de $KV^2 = mg$. Aici $K \cdot 4 \approx \frac{10}{1\,000}$ de unde $K = \frac{1}{400}$.

Ecuația mișcării după ciocnire (unde v' după ciocnire $|v'| = \frac{1}{2} V = 1$) :

$$-(mg + Kv^2) = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds},$$

Scanned with OKEN Scanner

sau integrînd : $\log (mg + Kv^2)\Big|_1^0 = -\frac{2K}{m}s$ (la $s = 0,\ v = 1$)

$\log\frac{1}{100} - \log\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{400}\cdot 1^2\right) = \frac{-2}{400}1\,000\,s$; sau $\log\frac{4}{5} = -5\,s$;

$\log_e 4 = 1{,}39$; $\log_e 5 = 1{,}61$; $-0{,}22 = -5s \Rightarrow s = 0{,}044$ m.

Dacă nu ar fi fost rezistența aerului, mobilul sărea h dat de :

$\sqrt{2gh} = 1$ sau $h = \frac{1}{20} = 0{,}05$ m.

32. Avem $e^{\frac{2Ks}{m}} = \frac{mg}{mg - Kv^2}$ deci $e^{2\frac{1}{400}\cdot s\cdot 1000} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100} - \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{4}}$ sau $e^{5s} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5s = \log_e 4 - \log_e 3 \approx 1{,}39 - 1{,}09 \approx 0{,}3.$

$s = 0{,}06$ m.

33. $v = x\omega$ (fig. III.33). Rezistența pe un element este $dF = Kx\omega\frac{dx}{l}$

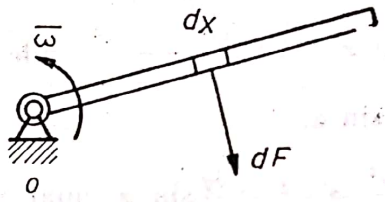


Fig. III.33

$\Sigma M_0 = 0$: $-\int_0^l dF\cdot x = M = I_0\frac{d\omega}{dt}$ sau

$K\omega\frac{l^2}{3} = \frac{Ml^2}{3}\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{K}{M}dt$ sau $\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{K}{M}t \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-\frac{K}{M}t}$.

Dar după $t = 3$ s ; $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ deci $\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 e^{-\frac{K}{3}\cdot 3}$ și $K = \log_e 2 \approx 0{,}7$.

Capitolul IV

FORȚE CENTRIFUGE

1. Notînd cu F_c forța centrifugă :

la $\hat{\theta}$ avem $T = G\cos\theta + F_c$, dar $F_c = \frac{G}{g}\frac{v^2}{l} = \frac{G}{gl}2gl\cos\theta$

deci $T = 3G\cos\theta = G$; $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) Avem $F_c = \frac{G}{g}\frac{l\sqrt{3}}{4}\omega^2$. Din (fig. IV.2, *a*) $\Sigma X_i = 0 : \frac{G}{g}\frac{l\sqrt{3}}{4}\omega^2 = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2\sqrt{3}}{2}$

$\Sigma Y_i = 0 : T_1\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{T_2}{2} - G = 0$ de unde $T_1 = G\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{G}{8g}l\sqrt{3}\omega^2$;

$$T_2 = \frac{3G}{8g}l\omega^2 - \frac{G}{2}.$$

Discuție : $T_1 \neq 0$ pentru orice $\omega \cdot T_2 = 0$ cînd $\omega^2 = \frac{4g}{3l}$ în acel caz $T_1 = 2G\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Aci (fig. IV.2, *b*) $F_c = \frac{G}{g}\frac{3l}{4}\omega^2$. Căpătăm $T_1 = \frac{G}{2} + \frac{3G\sqrt{3}}{8g}l\omega^2$

$T_2 = \frac{G\sqrt{3}}{2} - \frac{3G}{8g}l\omega^2$; $T_2 = 0$ cînd $\omega^2 = \frac{4g\sqrt{3}}{3l}$.

c) Avem două poziții extreme pentru valorile lui T_1 și T_2 cînd sistemul e deasupra lui AB, tensiuni minime, și cînd e dedesubt, tensiuni maxime (fig. IV.2, *c*). Forța centrifugă $F_c = \frac{G}{g}\frac{l\sqrt{3}}{4}\omega^2$

$T_1 = \frac{G\sqrt{3}l\omega^2}{8g} \mp \frac{G}{2}$; $T_2 = \frac{3Gl\omega^2}{8g} \mp \frac{G\sqrt{3}}{2}$. În poziția de sus ambele tensiuni sînt nule pentru $\omega^2 \leqslant \frac{4}{3}g\frac{\sqrt{3}}{l}$.

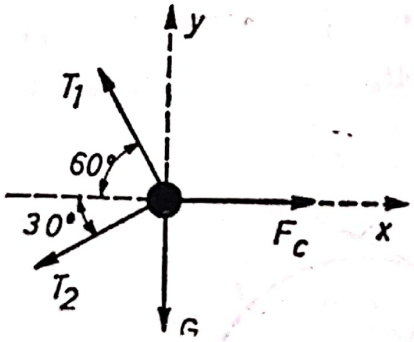


Fig. IV.2, *a*

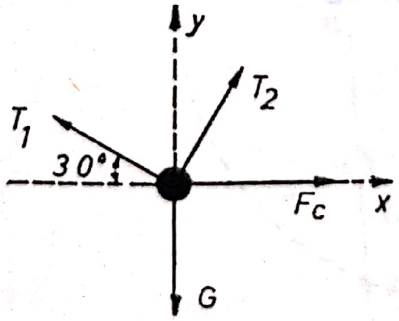


Fig. IV.2, *b*

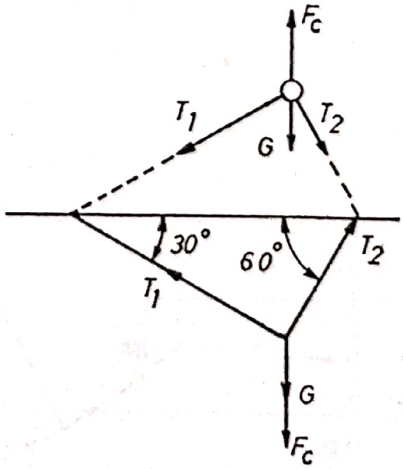


Fig. IV.2, *c*

3. Pământul face o rotație în 24 h deci $\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Viteza unui punct oarecare la ecuator unde $R = \frac{4\cdot 10^7}{2\pi}$ metri este $v = \frac{10^5}{6^3}$ m/s.

Forța centrifugă este deci $m\frac{v^2}{R} = m\frac{\pi 10^3}{2\cdot 6^6}$.

4. a) *Porțiunea I* (fig. IV.4). Firul parcurge în jurul lui B unghiul $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ cu $\bar{v}$ constant. Ghiuleaua descrie un cerc de rază l în timpul t_1 $\theta_1 = \omega_1 t_1$ iar $\omega_1 = \frac{v}{l} \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi l}{3v}$ iar $T_1 = \frac{G}{g}\frac{v^2}{l}$.

Porțiunea II. Cerc de rază $2l$ cu centrul în $C\cdot\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ deci

$\omega_2 = \frac{v}{2l}$, $t_2 = \frac{4\pi l}{3v}$; $T_2 = \frac{G}{2}\frac{v^2}{2l} = \frac{T_1}{2}$.

Porțiunea III. Firul se rotește în jurul lui A pe un cerc de rază $3l$. Aici $T_3 = \frac{G}{g}\frac{v^2}{3l} = \frac{T_1}{3}$; $\omega_3 = \frac{v}{3l}$; $t_3 = \frac{6\pi l}{3v}$.

b) $T_1 = \frac{G}{g}\frac{v^2}{l}$; $T_2 = \frac{T_1}{2}$; $T_3 = \frac{T_1}{3}$; $T_4 = \frac{T_1}{4}$.

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \frac{\pi}{2}.$$

$\omega_1 = \frac{v}{l}$; $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$; $\omega_3 = \frac{\omega_1}{3}$; $\omega_4 = \frac{\omega_1}{4}$.

$t_1 = \frac{\pi l}{2v}$; $t_2 = 2t_1$; $t_3 = 3t_1$; $t_4 = 4t_1$.

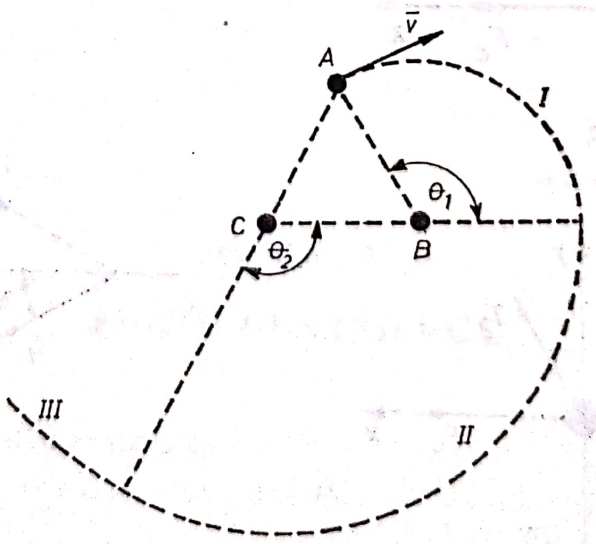


Fig. IV.4

5. a) $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$; $\omega_1 = \frac{v}{l} = \frac{12}{2} = 6$ rad/s; $\theta_1 = \omega_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{9}$ s

$T_1 = F_c = \frac{G}{g}\frac{v^2}{l} = \frac{G}{g} \cdot \frac{144}{2} = 7{,}2G$ (pe tot parcursul θ_1).

În poziția I după ce firul ABC formează o linie dreaptă, G parcuge un cerc cu raza $2l$ (pe tot parcursul de la poz. I la II).

$T_2 = F_c' = \frac{G}{g}\frac{v^2}{2l} = \frac{G}{g}\frac{144}{4} \approx 3{,}6G$ (tensiunea a scăzut brusc, nu e smucire).

$\theta_2 = \frac{\pi}{3} = \omega_2 t_2$; $\omega_2 = \frac{v}{2l} = 3$ rad/s; $t_2 = \frac{\pi}{9}$ s.

b) Legea lucrului mecanic de la pornire la poziția I pe cercul de raza l, centru B (poziția verticală în jos).

$$-G\left(l + \frac{l}{2}\right) = \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{2} - \frac{G}{g}\frac{144}{2} \Rightarrow v_1^2 = 144 - 6g; \quad v_1 = \sqrt{84}$$

$$T_1 = F_c - G\cos 60 = \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{l} - \frac{G}{2} \approx 4{,}2G - 0{,}5G = 3{,}7G.$$

În poziția I. După întinderea firului G parcurge un cerc cu centrul în A și rază $2l$; v_1 este tot $\sqrt{84}$ la începutul acestei mișcări deci $T_1 = \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{2l} - G\cos 60 \approx 1{,}6G$, o scădere bruscă a lui T_1 la întinderea firului.

În poziția II. Legea lucrului mecanic (poziția verticală în sus)

$-G\left(2l + \frac{l}{2}\right) = \frac{G}{g}\frac{v_2^2}{2} - \frac{G}{g}\frac{144}{2}$ de unde $v_2^2 = 144 - 10g$; $v_2 \cong \sqrt{44}$

$T_2 = F_c - G = \frac{G}{g}\frac{44}{2l} - G \approx 0{,}1G.$

6. a) $F_c = ml \sin \alpha \omega^2$ (fig. IV.6, *a*). Deci (ca pendul conic):

$$\Sigma X_i = 0: \quad F_c = T \sin \alpha;$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad T \cos \alpha = mg$$

de unde $\omega^2 = 40 \Rightarrow \omega \approx 6{,}3$ rad/s: $\cos \alpha = \frac{mg}{T} = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60°$.

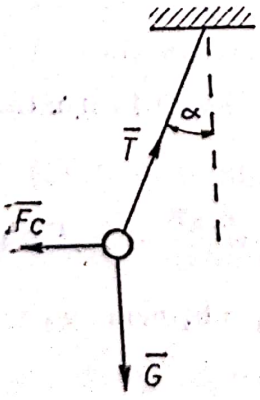


Fig. IV.6, *a*

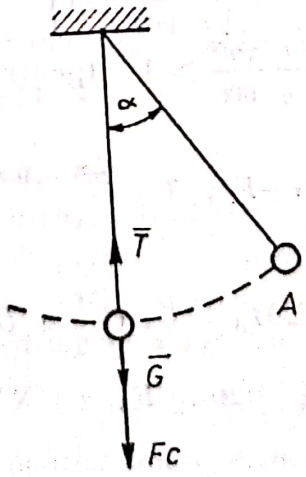


Fig. IV.6, *b*

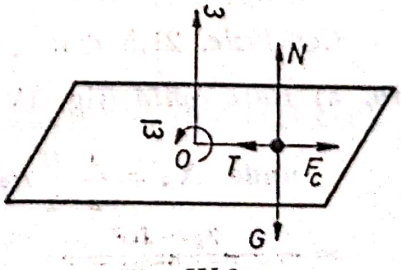


Fig. IV.6, *c*

Scanned with OKEN Scanner

b) Poziția cea mai defavorabilă este cea verticală (fig. IV.6, *b*). Acolo $T = mg + F_c$; $F_c = m\frac{v_B^2}{l} = 20$; $v_B^2 \approx 5$.

Din legea lucrului mecanic $v_B^2 = 2gl(1 - \cos\alpha)$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60°$

c) Aici (fig. IV.6, *c*) $T = F_c = ml\omega^2 = 40$; $\omega \approx 6{,}3$ rad/s.

7. Pe masă (fig. IV.7): $F_c = T = 40 = \frac{m}{2} l\omega_1^2 = \frac{1}{4}\omega_1^2$; $\omega_1^2 = 160$; $\omega_1 \approx 12{,}6$.

Pendulul conic: $T \sin\alpha = \frac{m}{2} l \sin\alpha\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2^2 = 160$;

$$T\cos\alpha = \frac{mg}{2};\quad \cos\alpha = \frac{1}{4};\quad \alpha \approx 75°30'.$$

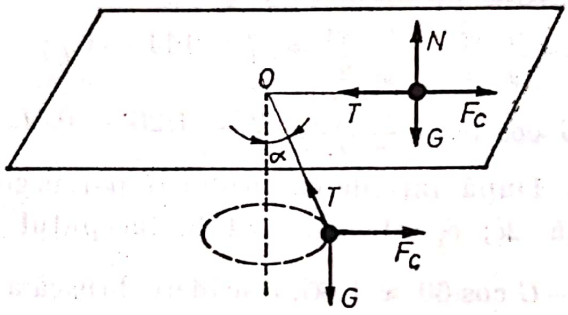


Fig. IV.7

8. $T = \mu\frac{G}{2} = 15$. Poziția cea mai defavorabilă a pendulului este cea verticală. Acolo $T = \frac{G}{2} + F_c$ unde $F_c = \frac{m}{2}\frac{v^2}{0.5\,l}$ iar

$v^2 = 2g\frac{l}{4}(1 - \cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4}$; $\alpha \approx 41°$.

9. *Poziția I*: $\Sigma\gamma_i = 0$: $2T\frac{\sqrt{3}}{2} = F_c - G$; $\omega = \frac{\pi n}{30}$; $F_c = \frac{G}{g} l \frac{\pi^2 n^2}{900}$;

$$T\sqrt{3} = G\left(\frac{l}{g}\frac{\pi^2 n^2}{900} - 1\right)$$

pentru ca $T > 0$ trebuie ca $\frac{l}{g}\frac{\pi^2 n^2}{900} > 1$ (pentru $g \approx 10$; $\pi^2 \approx 10$), găsim $n > 21{,}5$ rot/min.

Poziția II: $\Sigma\gamma_i = 0$: $2T\frac{\sqrt{3}}{2} = G + F_c$; $T = \frac{2n^2 + 900}{100\sqrt{3}} G < T_0 \Rightarrow n < 64$ rot/min.

Concluzie. $21{,}5 \leqslant n \leqslant 64$ rot/min.

10. a) *Bara cotită* (fig. IV.10, *a*) $\Sigma M_A = 0$: $G\frac{l}{2} + Gl + \frac{G}{g} l\omega^2 \frac{l}{2} = \mu_A F_A r_A$

unde $X_A = \frac{3}{2}\frac{G}{2} l\omega^2$; $Y_A = 2G$; $F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ obținem $\mu_A = \frac{l}{r_A}\frac{3g + l\omega^2}{\sqrt{16g^2 + 9l^2\omega^4}}$.

Scanned with OKEN Scanner

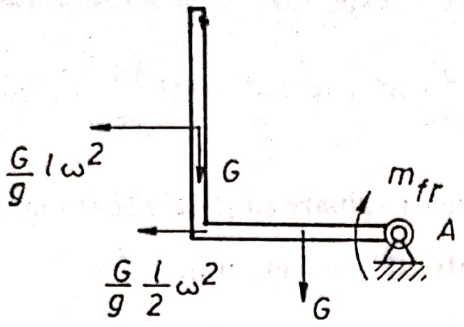


Fig. IV.10, *a*

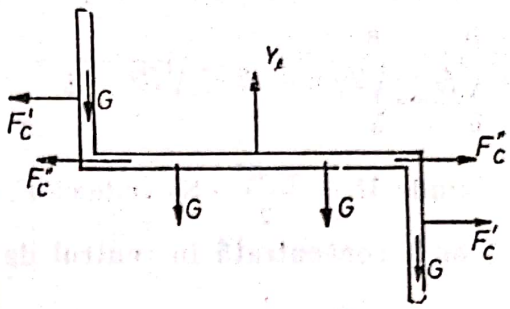


Fig. IV.10, *b*

b) Aici (fig. IV.10, *b*) $F_A = Y_A = 4G$; $\Sigma M_A = 0 : 2F_c' \frac{l}{2} = \mu_A 4G\, r_A$

$F_c' = \frac{G}{g} l\omega^2 \Rightarrow \mu_A = \frac{l^2\omega^2}{4gr_A}$.

11. Din suspendarea verticală a firului elastic (fig. IV.11, *a'*)

$mg = T = K\Delta l_0 = K\frac{l_0}{8} \Rightarrow K = \frac{8mg}{l^0} \approx 320.$

Din figura IV.11, *a''* : Avem $T = F_c \pm \mu N$ sau $Kx = m(l_0 + x)\omega^2 \mp \mu N$;

$0{,}75 \leqslant x \leqslant 0{,}91$ m.

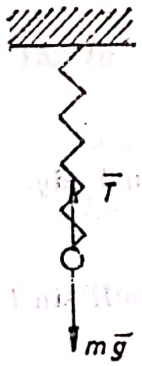


Fig. IV.11, *a'*

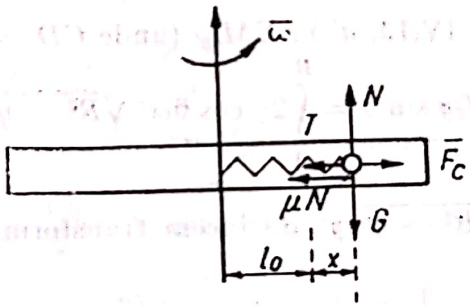


Fig. IV.11, *a''*

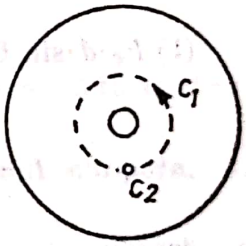


Fig. IV.12

12. Centrul de greutate este în C (fig. IV.12). $F_c = \frac{G}{g} r\omega^2$; $\omega = \frac{\pi n}{30} = 120$ rad/s

$r = 0{,}002$ m ; $F_c = 144$ N.

Poziţiile extreme

(1) C deasupra lui O în C_1 :

$R_A + R_B = F_c - G = 94$ N ; $R_A = R_B = 47$ N (în jos).

(2) C dedesubtul lui O în C_2:

$R_A + R_B = F_c + G = 194$ kg ; $R_A = R_B = 97$ N (în sus).

13. a') Fie un element de lăţime dy la distanţa y de diametrul OO (fig. IV.13, *a'*)

$$dm = 2\gamma \sqrt{R^2 - y^2}\, dy.$$

Forţa centrifugă pentru acest element este

$f_c = dm\, y\cos\theta\omega^2 = 2\gamma \sqrt{R^2 - y^2} \cos\theta\omega^2 y dy.$

Forța centrifugă totală pentru semicerc este (M este masa totală)

$$F_c = \int_0^R f_c = \int_0^R 2\gamma \cos\ \theta\omega^2 \sqrt{R^2 - y^2}\ \ y\,dy = \frac{2}{3}\gamma R^3 \cos\theta\omega^2 = M\frac{4R}{3\pi}\cos\theta\omega^2$$

unde $M = \frac{\gamma\pi R^2}{2}$. Se vede că F_c are aceeași valoare ca și cum toată masa ar fi concentrată în centrul de greutate al semicercului.

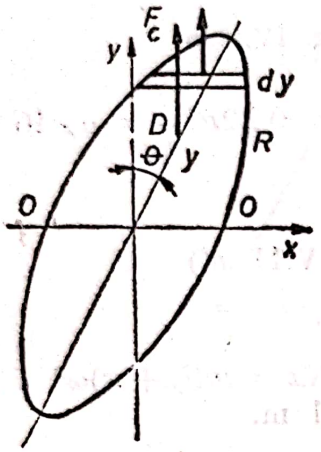


Fig. IV.13, *a'*

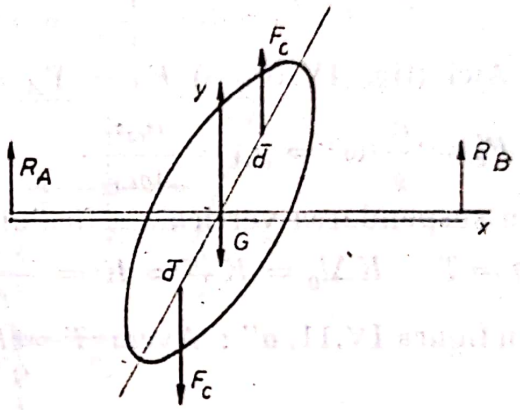


Fig. IV.13, *a''*

a'') *Poziția lui* F_c (fig. IV.13, *a''*) : $\Sigma M_{00'}$ (unde $CD = d$).

(1) $F_c \cdot d \cdot \sin\theta = \int_0^R f_c y \sin\theta = \int_0^R 2\gamma \cos\theta\omega^2 \sqrt{R^2 - y^2}\ \ y^2 \sin\theta\ \ dy$. În integrala $I = \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}\ y^2\ dy$ facem transformarea $y = R\sin t$ deci

$$I = R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\ dt = \frac{R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\ dt = \frac{R^4}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$I = \frac{\pi R^4}{16}$; deci în ecuația (1):

$$\frac{2}{3}\gamma R^3 \cos\theta\omega^2 \cdot d \sin\theta = 2\gamma \sin\theta \cos\theta\omega^2 \cdot \frac{R^4}{16}.$$

de unde $d = \frac{3\pi R}{16}$.

Vom avea $R_B l = G\frac{l}{2} + F_c\left(\frac{l}{2} - d\sin\theta\right) - F_c\left(\frac{l}{2} + d\sin\theta\right)$

$R_B = \frac{G}{2} - 2F_c\frac{d}{l}\sin\theta$; $R_A = \frac{G}{2} + 2F_c\frac{d}{l}\sin\theta$ în această poziție. În poziția extremă următoare R_A și R_B se intervertesc.

Scanned with OKEN Scanner

14. Forţele centrifuge au valoarea :

$$F_c' = \frac{\gamma l}{g}\frac{l}{2}\omega^2 ; \quad F_c'' = \frac{\gamma l}{g} l\omega^2 ; \quad F_c''' = \frac{\gamma x}{g}\left(l + \frac{x}{2}\right)\omega^2,$$

unde $\omega = \frac{\pi n}{30}$; $\omega^2 = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{30^2} \approx 160.$

Luînd $\Sigma M_A = 0$ şi $N_B = 20\gamma l$, avem :

$$20\gamma l \cdot l - \gamma l \frac{l}{2} - \gamma l \cdot l - \gamma x\left(l + \frac{x}{2}\right) - F_c'' \frac{l}{2} - F_c''' l = 0$$

de unde

$$x \approx 0{,}527 \text{ m}.$$

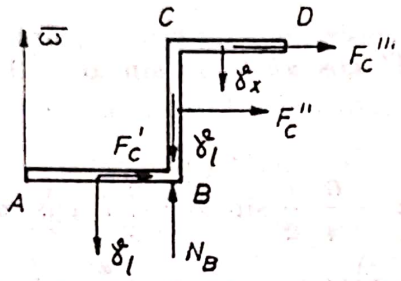


Fig. IV.14

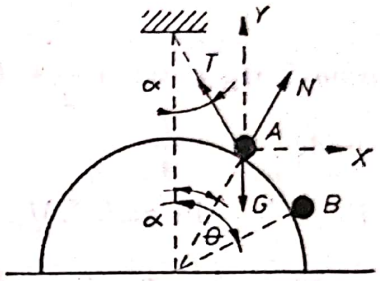


Fig. IV.15

15. *În repaus* : Din $\Sigma X_i = 0$: $T = N$. Din $\Sigma Y_i = 0$: $T = N = \frac{G}{2\cos\alpha}$

la $\alpha = 30°$, $T = N = \frac{G\sqrt{3}}{3}$.

La ruperea firului. În A : $N_A = G\cos\alpha$ care trebuie să fie egal cu $\frac{G}{2\cos\alpha}$.

Cînd $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, N este acelaşi înainte şi după rupere, dar $L = GR(\cos\alpha - \cos\theta) = \frac{G}{g}\frac{v_B^2}{2}$ sau $\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha$, pentru $\alpha = 30°$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\theta \approx 54°45'$.

Determinarea lui β. Acolo $N = \frac{G\sqrt{3}}{3} = G\cos\beta - F_c$, iar $v^2 = 2gR\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\beta\right)$, deci găsim $\cos\beta = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ sau $\beta \approx 39°25'$.

16. Greutatea $2G$ (fig. IV.16) : $T = 2G - \frac{2G}{g}a$.

Aceeaşi acceleraţie $\bar{a}$ o are tot sistemul deci şi punctul material G. Luînd sistemul prismă plus punctul G solidificat : $N = 2G$ deci : $T = 2G - \frac{2G}{g}a = \frac{2G}{g}a + \mu N \Rightarrow a = \frac{g}{4}$.

Punctul material : $T'\cos\alpha = G$; $T'\sin\alpha = \frac{G}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$; $T' = \frac{G\sqrt{17}}{4}$.

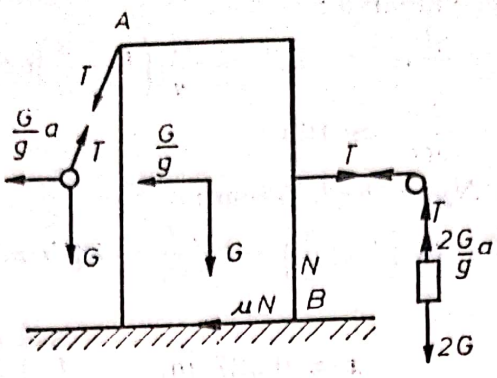


Fig. IV.16

Prisma $\Sigma M_B = 0$: $T\frac{l}{2} - G\frac{b}{2} - \frac{G}{4}\frac{l}{2} - T'\cos\alpha b - T'\sin\alpha l = 0$

de unde : $b = \frac{l}{4}$.

17. a) $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega^2$. $\Sigma M_A = 0$: $G\frac{l}{2}\sin\alpha - \frac{G}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega^2\frac{2}{3}l\cos\alpha =$

$= Tl\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow T = G\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{2\omega^2}{3g}l\cos\alpha\right)$ (T face unghiul $\frac{\alpha}{2}$ cu bara) ;

pentru $T = 0$: $\omega^2 = \frac{3g}{2l\cos\alpha}$; $T > 0 \Rightarrow \omega^2 < \frac{3g}{2l\cos\alpha}$ (fig. IV.17, *a*).

b) $\Sigma M_A = 0$: $G\frac{l}{2}\sin\alpha - \frac{G}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega^2\frac{2}{3}l\cos\alpha + Tl\sin\alpha = 0$

$T = \frac{G}{2}\left(\frac{2\omega^2}{3g}l\cos\alpha + 1\right)$; $T = 0$ cînd $\omega^2 = \frac{3g}{2l\cos\alpha}$; $T > 0$ cînd

$\omega^2 > \frac{3g}{2l\cos\alpha}$ (fig. IV.17, *b*).

c) $\Sigma M_A = 0$: $G\frac{l}{2}\sin\alpha + \frac{G}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega^2\frac{2}{3}l\cos\alpha = Tl\sin 2\alpha$

$$T = \frac{G}{4\cos\alpha}\left(1 + \frac{2\omega^2 l}{3g}\cos\alpha\right).$$

Nu se poate ca $T = 0$ pentru $\alpha < 90°$ (fig. IV.17, *c*).

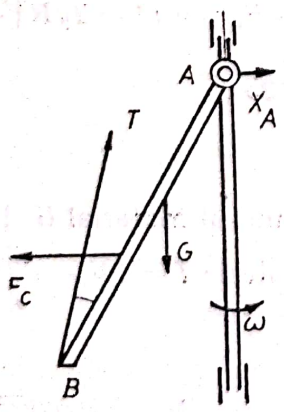


Fig. IV.17, *a*

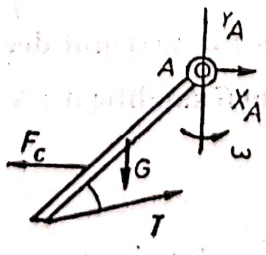


Fig. IV.17, *b*

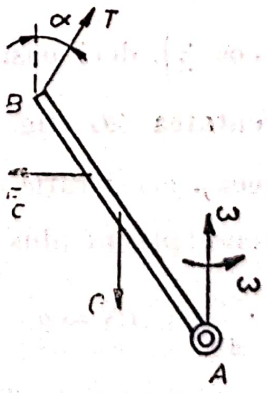


Fig. IV.17, *c*

Scanned with OKEN Scanner

18. a) *Pe AB :* $F_c = \mu N = \frac{G}{4}$; $F_c = \frac{G}{g}\frac{1}{4}\omega^2$ de unde $\omega^2 = g$; $\omega \approx 3$ rad/s.

Pe BC : Proiecții perpendicular pe bară $N' = G\cos 60 + F_c' \sin 60$;

Proiecții paralel cu bara $F_c' \cos 60 = G \sin 60 \mp \frac{1}{4}N'$;

$$F_c' = \frac{G}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)\omega^2,$$

de unde pentru cele două tendințe de lunecare (fig. IV.18, *a*) $x = \frac{7\sqrt{3}-6}{4+\sqrt{3}} = 1{,}07$ m și $x = \frac{9\sqrt{3}-2}{4-\sqrt{3}} = 6{,}8$ m.

b) Găsim pentru :

inelul situat la jumătatea lui AB : $\omega^2 = g\frac{4\sqrt{3}\mp 1}{4\pm\sqrt{3}}$ semnul de sus fiind pentru tendința de lunecare în jos.

Inelul situat pe BC : $N' = G$; $\mu G = \frac{G}{g}\left(x + \frac{l}{4}\right)\omega^2$ pentru ambele valori ale lui ω^2, x este negativ, problema imposibilă pentru acest μ, sau acest ω (fig. IV.18, *b*). La acest inel forțele orizontale sînt $\mu N'$ și F_c.

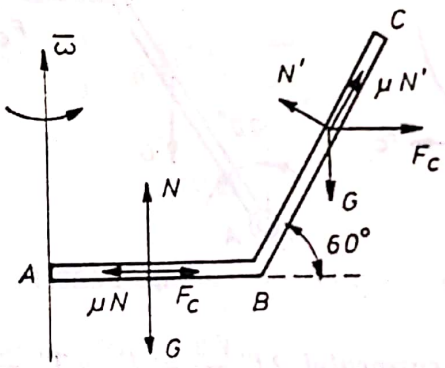


Fig. IV.18, *a*

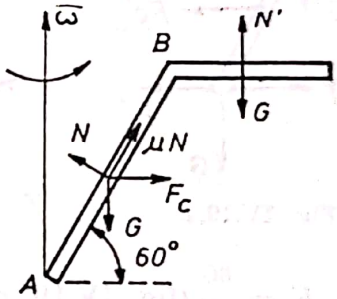


Fig. IV.18, *b*

19. a) $K = \frac{8G}{l}$ (fig. IV.19, *a*). Lungimea firului întins în stare de echilibru dinamic este $L = \frac{3l}{8}$; $\Delta l = \frac{3l}{8} - \frac{l}{4} = \frac{l}{8}$; $T = \frac{Kl}{8} = G$

$F_c' = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2$; $F_c'' = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega^2$; $\Sigma M_A = 0 : -G\frac{l}{4} - G\frac{l}{2} - T\frac{3l}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} +$

$+ \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2\frac{2}{3}l\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega^2\frac{l\sqrt{3}}{2} = 0$; $\omega^2 = \frac{g\sqrt{3}}{8l}(6 + 3\sqrt{3})$.

b) $K = \frac{2G}{l}$ (fig. IV.19, *b*); $F_c = \frac{G}{g}L\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2$; $\Sigma X_i = 0 : \frac{T}{2} = G$, dar $T = \frac{2G}{l}(L - l_0)$

deci $L = 2l$.

$\Sigma Y_i = 0 : \quad \frac{G}{g}2l\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 = 2G\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$.

Scanned with OKEN Scanner

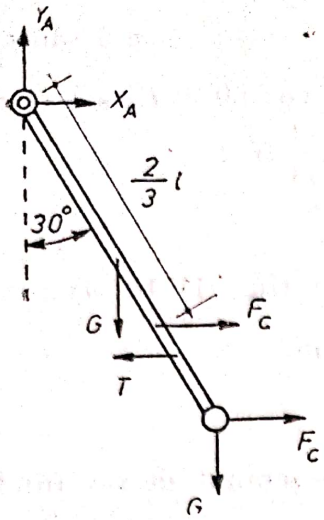


Fig. IV.19, *a*

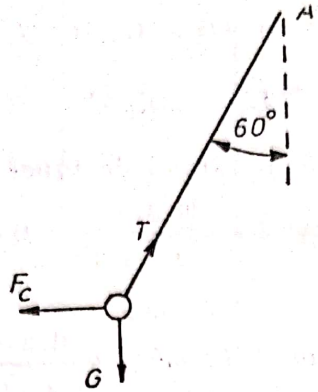


Fig. IV.19, *b*

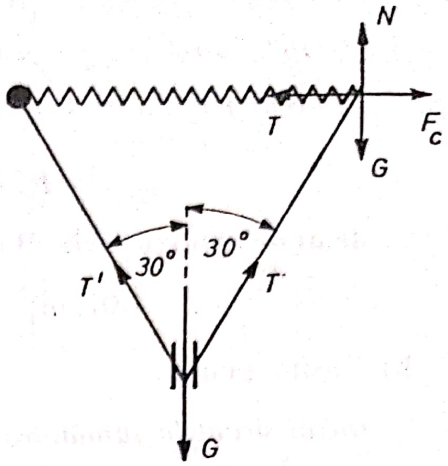


Fig. IV.19, *c*

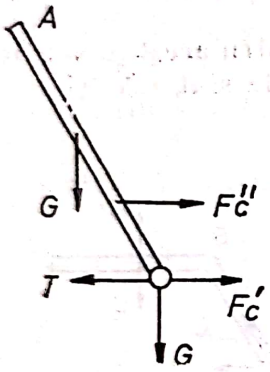


Fig. IV.19, *d*

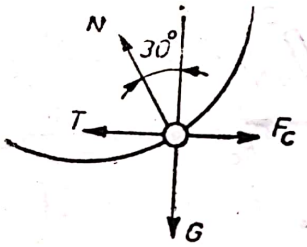


Fig. IV.19, *e*

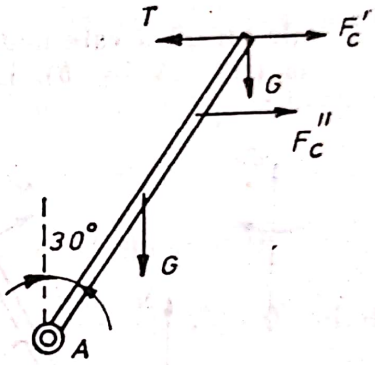


Fig. IV.19, *f*

c) $K = \frac{8G}{l}$ (fig. IV.19, *c*). *Echilibrul cursorului* $2T'\frac{\sqrt{3}}{2} = G \Rightarrow T' \frac{G\sqrt{3}}{3}$.

Echilibrul unui punct material G: $F_c = T + \frac{T'}{2}$; $L = l$; $\Delta l = \frac{3l}{4}$;

$T = K\Delta l = 6G \quad \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega^2 = \frac{G\sqrt{3}}{6} + 6G \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{3l}(36 + \sqrt{3})$.

d) $K = \frac{4G}{l}$ (fig. IV.19, *d*); $L = l\sqrt{2}$; $T = K(L - l) = 4G(\sqrt{2} - 1)$.

$\Sigma M_A = 0 : G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + G\frac{l\sqrt{2}}{2} + T\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{G}{g}\frac{l\sqrt{2}}{2}\omega^2\frac{l\sqrt{2}}{2} -$

$- \frac{G}{g}\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2\frac{2}{3}l\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g\sqrt{2}}{l}(8\sqrt{2} - 5)$.

e) $K = \frac{4G}{l}$ (fig. IV.19, *e*); $L = l$; $T = K\left(l - \frac{l}{2}\right) = 2G$.

Echilibrul unui inel : $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega^2$; $\Sigma X_i = 0 : F_c = \frac{N}{2} + T$;

$\Sigma Y_i = 0 : N\frac{\sqrt{3}}{2} = G$ de unde $\omega^2 = \frac{2g}{l}\frac{6 + \sqrt{3}}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

f) $K = \frac{8G}{l}$ (fig. IV.19, *f*); $L = \frac{4l}{8}$; $T = K(L - l_0) = 2G$.

Din $\Sigma M_A =$ avem $\omega^2 = \frac{3g}{4l}(4 - \sqrt{3})$.

20. *Bara* (fig. 20, *a'*). Din $\Sigma M_A = 0$ se găsește $T = \frac{G}{6}\left(\sqrt{3} - \omega^2 \frac{}{g}\right)$.

Corpul G (fig. IV.20, *a''*); $N = \frac{G}{12}\left(15 - \sqrt{3}\,\omega^2 \frac{l}{g}\right)$

$$\mu N = \pm \frac{T}{2} \mp F_c' = \pm \frac{G}{12}\left(\sqrt{3} - \frac{\omega^2 l}{g}\right) \mp \frac{G}{g} l\omega^2$$

$$\mu = \frac{\pm g\sqrt{3} \mp 13\omega^2 l}{15g - \sqrt{3}\,\omega^2 l}.$$

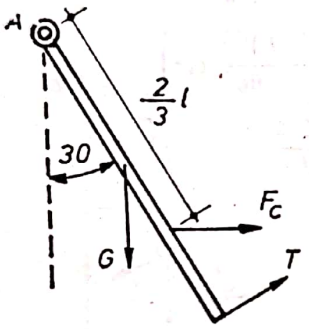


Fig. IV.20, *a'*

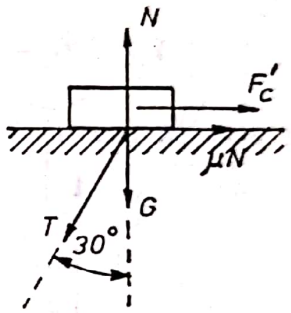


Fig. IV.20, *a''*

21. *Poziția I. Punctul material*: $T_1 = \frac{G}{2}$; *Bara*: $X_A = -\frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = \frac{5G}{4}$; $M_A = \frac{7}{2}Gl$.

Poziția II. Punctul material: $T_2 = G + F_c = 2G$; *Bara*: $X_A = 0$; $Y_A = 3G$; $M_A = 7Gl$.

Poziția III. Punctul material: $T_3 = \frac{G}{2}$; *Bara*: $X_A = +\frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = \frac{5G}{4}$; $M_A = \frac{7}{2}Gl$.

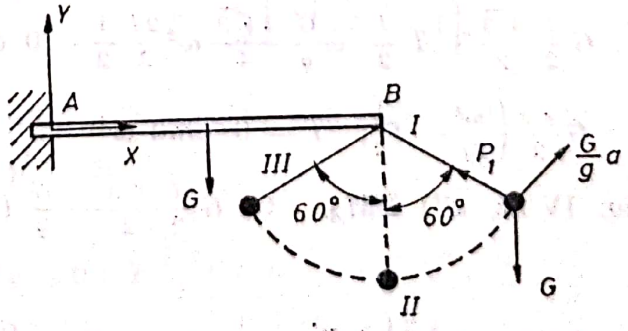


Fig. IV.21

22. a') *Poziția I* (fig. IV.22, *a'*). $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}G$; $\Sigma M_A = 0$:

$$G\frac{l}{4} + F_c\frac{2}{3}l\frac{1}{2} - T\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad T = \frac{G}{3}\left(\sqrt{3} + \frac{l\omega^2}{g}\right) = \frac{G}{3}(\sqrt{3}+6)$$

$$X_A = \frac{T}{2} = \frac{G}{6}\left(\sqrt{3} + \frac{l\omega^2}{g}\right) = \frac{G}{6}(\sqrt{3}+6)$$

$$Y_A = G + F_c - T\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{G}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}l\omega^2}{6g}\right) = \frac{G}{2}(1+\sqrt{3}).$$

a'') *Poziția II* (fig. IV.22, *a''*).

$$\Sigma M_A = 0: \; G\frac{l}{4} + T\frac{l}{4}\sqrt{3} - \frac{G}{g}\frac{l}{4}\sqrt{3}\frac{2}{3}l\frac{\omega^2}{2} = 0$$

de unde $T = \frac{G}{3}\left(\frac{l\omega^2}{g} - \sqrt{3}\right)$; $X_A = \frac{T}{2} = \frac{G}{6}\left(\frac{l\omega^2}{g} - \sqrt{3}\right)$;

$$Y_A = G + \frac{T\sqrt{3}}{2} - F_c = \frac{G}{2}\left(1 - \frac{l\sqrt{3}}{6g}\omega^2\right).$$

În această poziție $T = 0$ cînd $\omega^2 = \frac{g\sqrt{3}}{l}$.

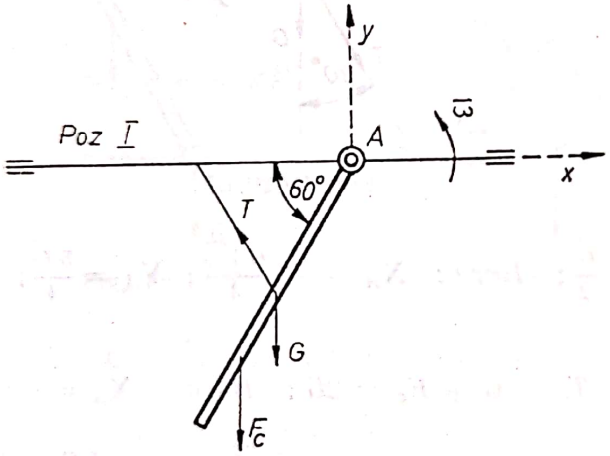


Fig. IV.22, *a'*

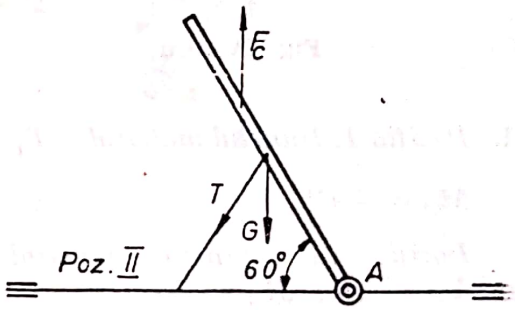


Fig. IV.22, *a''*

23. *AB vertical* (fig. IV.23, *a'*): $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2$

$$\Sigma M_A = 0: \; G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + T\frac{l}{2} - \frac{G}{g}\frac{l\sqrt{3}}{4}\omega^2\frac{2}{3}\frac{l}{2}\frac{1}{2} = 0 \text{ de unde:}$$

$$T = G\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l\omega^2}{3g} - 1\right); \quad T = 0 \text{ cînd } \omega^2 = \frac{3g}{l}$$

AC vertical (fig. IV.23, *a''*) $\Sigma M_A = 0$: $G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{G}{g}l\frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2\frac{2}{3}\frac{l}{2}\frac{1}{2} + T\frac{l}{2} = 0$

avem la fel $T = G\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{3}\frac{\omega^2}{g} - 1\right)$. Avem $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2$.

Scanned with OKEN Scanner

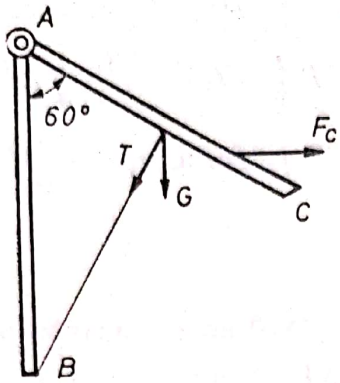


Fig. IV.23, *a'*

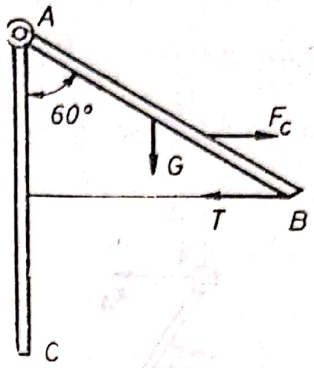


Fig. IV.23, *a''*

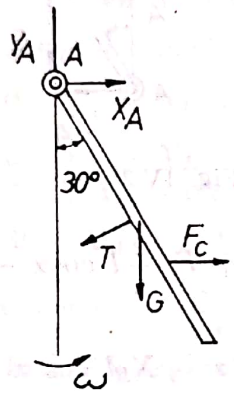


Fig. IV.24, *a*

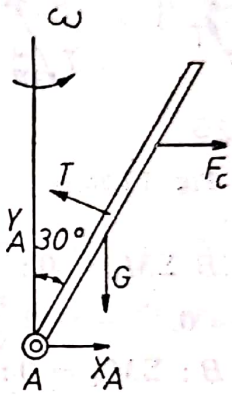


Fig. IV.24, *b*

24. a) *Bara* AC (fig. IV.24, *a*) : $\Sigma M_A = 0$: $G\frac{l}{4} + T\frac{l}{2} - \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2 \cdot \frac{2}{3}l\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 0 \Rightarrow T = \frac{G}{2}\left(\frac{l\sqrt{3}\omega^2}{3g} - 1\right)$ $T = 0$ cînd $\omega^2 = \frac{g\sqrt{3}}{l}$.

b) *Bara* AB (fig. IV.24, *b*) : $\Sigma M_A = 0$: $T\frac{l}{2} - G\frac{l}{4} - \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2 \cdot \frac{2}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = 0$;

$$T = \frac{G}{2}\left(\frac{l\sqrt{3}\omega^2}{3g} + 1\right).$$

25 a) *Corpul* $2G$ (fig. IV.25, *a*) : $\Sigma Y_i = 0$: $2T = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2G$; $T = \frac{2G\sqrt{3}}{3}$;

Bara AB : $F_c = \frac{G}{2}\frac{l}{4}\omega^2$.

$$\Sigma M_A = 0 : \; T\frac{\sqrt{3}}{2}l + G\frac{l}{4} - \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2\frac{2}{3}l\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$\omega^2 = \frac{5\sqrt{3}}{4}g \approx 21{,}4$; $\omega \approx 4{,}5$ rad/s ; $n \approx 45$ rot/min.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Corpul* $2G$ (fig. IV.25, *b*) : $2T\frac{1}{2} = 2G$; $T = 2G$.

Bara AB : $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2$; $\Sigma M_A = 0$: $T\frac{l}{2} - G\frac{l}{4} - \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2\frac{2l}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}g}{l} \approx 13{,}3$; $\omega^2 = 3{,}8$; $n \approx 38$ rot/min.

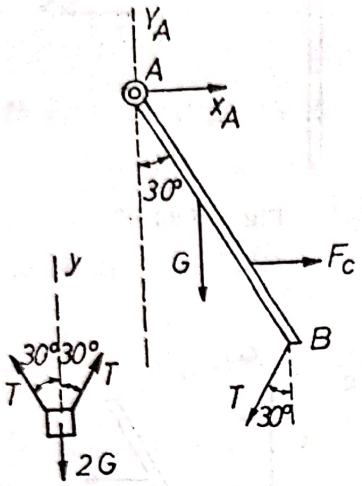


Fig. IV.25, *a*

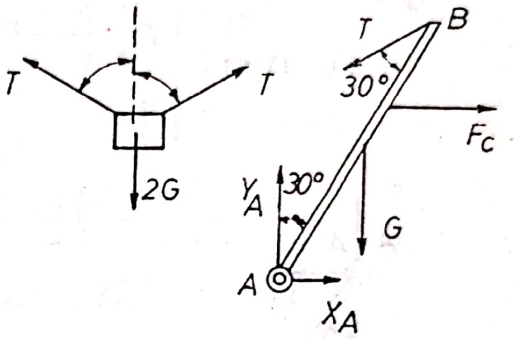


Fig. IV.25, *b*

26. *Bara* CB $\Sigma M_c = 0$: $Y_B l \sin\alpha = G\frac{l}{2}\sin\alpha + F_c\frac{2}{3}l\cos\alpha - X_B l\cos\alpha$ iar $Y_c = 0$.

Bara AB : $\Sigma M_A = 0$: $Y_B l \sin\alpha = F_c\frac{2}{3}l\cos\alpha + X_B l\cos\alpha - G\frac{l}{2}\sin\alpha$

unde $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega^2$.

De unde $X_B = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $Y_B = \frac{2}{3}F_c\operatorname{tg}\alpha$. Dar din :

$\Sigma Y_i = 0$ la bara CB : $Y_B = G$, deci $\cos\alpha = \frac{3g}{l\omega^2}$

$X_A = 2G\operatorname{tg}\alpha$; $X_c = G\operatorname{tg}\alpha$; Y_A (la o bară) $= 2G$. Din cauza simetriei $Y_c = 0$.

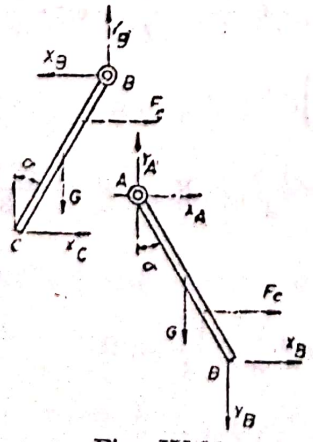


Fig. IV.26

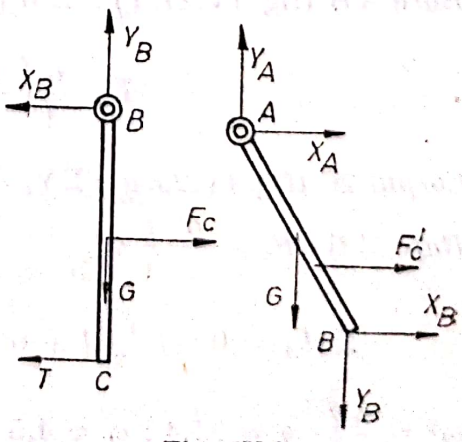


Fig. IV.27

Scanned with OKEN Scanner

27. *De la bara* BC: $X_B = \frac{F_c}{2} = T = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2$; $Y_B = G$.

De la bara AB: $F_c' = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2$, $\Sigma M_A = 0$: $3G\frac{l}{4} = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2 l\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{5}{3}$

$\omega^2 = \frac{6g\sqrt{3}}{5l}$; $T = \frac{3\sqrt{3}}{10}G$. Avem $F_1 = F_3 = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\cos\theta\omega^2$

$$F_2 = \frac{G}{g}l\cos\theta\omega^2.$$

28. *Pentru sistemul solidificat* $\Sigma M_A = 0$ este

$2G\frac{l}{2}\cos\theta + Gl\cos\theta - F_1\frac{2}{3}l\sin\theta - F_2\left(\frac{l}{2} + \frac{2}{3}l\sin\theta\right) - F_3\left(l + \frac{2}{3}l\sin\theta\right) - X_B l = 0.$ (1)

Pentru BC $\Sigma M_c = 0$

$X_B l\sin\theta + Y_B l\cos\theta - G\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{G}{g}\frac{l}{2}\cos\theta\omega^2\frac{l}{3}\sin\theta = 0.$ (2)

Pentru sistemul solidificat:

$\Sigma X_i = 0 \quad X_A + X_B + \frac{2G}{g}l\cos\theta\omega^2 = 0$ (3)

$\Sigma Y_i = 0 \quad Y_A + Y_B = 3G.$ (4)

Bara AD. $\Sigma M_D = 0$:

$X_A l\sin\theta + Y_A l\cos\theta - G\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{G}{g}\frac{l}{2}\cos\theta\,\omega^2\frac{l}{3}\sin\theta = 0.$

Obţinem $\sin\theta = \frac{6g}{5l\omega^2}$ şi $\cos\theta = 0$ deci $\theta = \frac{\pi}{2}$ poziţia de echilibru static.

Prin principiul deplasărilor virtuale:

$$y_1 = y_3 = \frac{l}{2}\sin\theta; \quad \delta y_1 = \delta y_3 = \frac{l}{2}\cos\theta\delta\theta;$$

$$y_2 = \frac{l}{2} + l\sin\theta; \quad \delta y_2 = l\cos\theta\delta\theta;$$

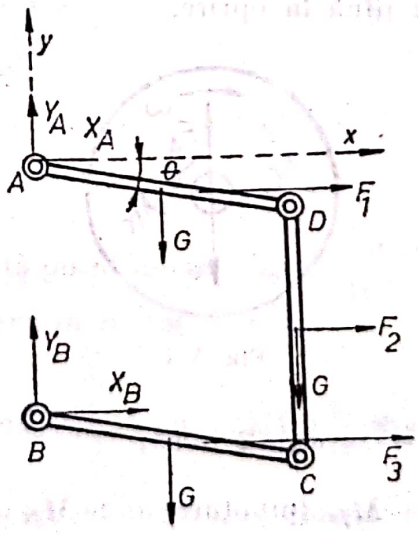


Fig. IV.28

Scanned with OKEN Scanner

$$x_1 = x_3 = \frac{2}{3} l \cos \theta ; \quad \delta x_1 = \delta x_3 = -\frac{2}{3} l \sin \theta \delta\theta ;$$

$$x_2 = l \cos \theta ; \qquad \delta x_2 = -l \sin \theta \delta\theta ;$$

$\delta L = 2G \frac{l}{2} \cos \theta \delta\theta + Gl \cos \theta \delta\theta - \frac{4}{3} F_1 l \sin \theta \delta\theta - F_2 l \sin \theta \delta\theta = 0$. Înlocuind F_1 și F_2 cu valorile lor și executînd calculele avem :

$$\cos \theta_1 = 0, \qquad \sin \theta_2 = \frac{6g}{5l\omega^2} .$$

Capitolul V

ROTAȚII, ROSTOGOLIRI

1. *Accelerarea.*

$\omega = \frac{\pi n}{30} = 8\pi$; $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ sau $8\pi = \varepsilon \cdot 120 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{15}$ rad/s².

În acest timp roata parcurge un unghi $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = 480\ \pi$ deci $\frac{\theta}{2\pi}$ rotații pînă ce atinge $n = 240$ rot/min.

$M_{ext} = M_{fr} + C_i$; $M_{fr} = \mu F_A r = 0{,}1 \times 700 \times 0{,}1 = 7$.

$C_i = I_A \varepsilon = \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \varepsilon = \frac{7}{3} \pi$; $M_{ext} = 7 + \frac{7}{3} \pi = 14$ J.

Întîrzierea. $M_{ext} = 0$; $\omega'_{final} = 0$; $\omega'_0 = 8\pi$; $M_{fr} + I_A \varepsilon' = 0$; $\varepsilon' = -0{,}2$ rad/s.

$\theta = \omega'_0 + \varepsilon t' \Rightarrow t' = 40\pi$ s ; $\theta = \theta_0 + \omega_0 t' + \frac{\varepsilon' t'^2}{2} = 160\pi^2 = 480\ \pi$/rad.

$n' = \frac{\theta}{2\pi} = 240$ rotații pînă la oprire.

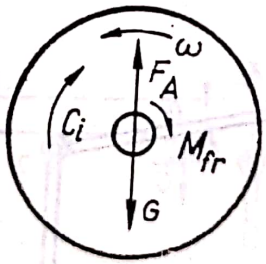


Fig. V.1

2. Avem $s = \frac{at^2}{2}$; $9 = \frac{a \cdot 9}{2} \Rightarrow a = 2$ m/s² ;

$\Sigma M_0 = 0$: $FR = I_0 \varepsilon + M_{fr}$ (pivotare) unde $M_{fr} = \mu N \frac{2}{3} R = 0{,}2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 = 1{,}6$ jouli.

Scanned with OKEN Scanner

$I_0 = \frac{G}{g}\frac{R^2}{2} \approx 0{,}36$; $F \cdot 0{,}6 = 0{,}36 \cdot \frac{2}{0{,}6} + 1{,}6 \Rightarrow F \approx 4{,}6$ N.

$\omega = \varepsilon t = \frac{a}{R} t = \frac{2}{0{,}6} \cdot 3 = 10$ rad/s.

b) Același $a = 2$ m/s^2, $\varepsilon = \frac{a}{R}$; $I_0 = 0{,}36$; $X_0 = F$; $Y_0 = G$; $F_0 = \sqrt{F^2 + 400}$.

$M_{fr} = \mu \cdot r\sqrt{F^2 + 400} = 0{,}2 \cdot 0{,}1\sqrt{F^2 + 400}$; $\Sigma M_0 = 0$: $FR = M_{fr} + I_0\varepsilon \Rightarrow F = 2$.

3. a) Momentul de inerție în raport cu A $I_A = \frac{3}{2} MR^2 + m(R\sqrt{2})^2 = R^2\left(\frac{3}{2}M + 2m\right)$.

$\Sigma M_A = 0$: $mgR = I_A\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{2mg}{(3M + 4m)R}$.

Forțele tangențiale de inerție:

F_1 (a discului) $= MR\varepsilon = \frac{2Mmg}{3M + 4m}$;

F_2 (a punctului) $= mR\sqrt{2}\varepsilon = \frac{2m^2g\sqrt{2}}{3M + 4m}$ (fig. V.3, *a*).

$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N = (M + m)g - F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{M(3M + 7m) + 2m^2}{3M + 4m} g$.

$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \mu N = F_1 + F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2mg(M + m)}{3M + 4m}$; $\mu = \frac{2m(M + m)}{M(3M + 7m) + 2m^2}$.

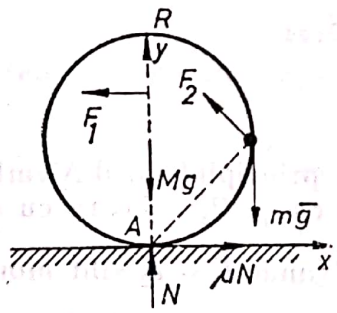


Fig. V.3, *a*

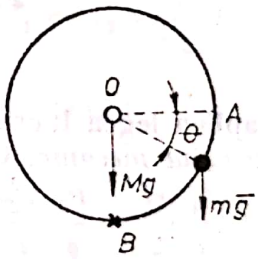


Fig. V.3, *b*

b) Ca sistemul să poată porni din A: $\mu_0 < \frac{10\,m}{M + m}$

Ca mg să se oprească în B (fig. V.3, *b*):

$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\cos\theta R\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu_0(m + M)\,g\frac{R}{10}\,d\theta = 0$ sau

$\mu_0 = \frac{20\,m}{\pi(m + M)}$, deoarece $\frac{20}{\pi} < 10$, μ_0 dinamic este mai mic decît cel static deci problema e posibilă.

Scanned with OKEN Scanner

4. a) *Determinarea lui μ static* (fig. V.4). Punctul fix este A. Din : $\Sigma M_A = 0$: $\mu_{st} G \cos\alpha \cdot 3r = G \sin\alpha \, 2r$ de unde $\mu_{st} = \frac{2}{3} \operatorname{tg}\alpha$, deci $\mu_{dinamic} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\alpha$.

În mișcare $F_{frecare} = \frac{G}{3} \sin\alpha$.

Mișcarea : $I_A = \frac{6G}{g} r^2$ (moment de inerție în raport cu A)

$\Sigma M_A = 0$: $G \sin\alpha 2r - \frac{G}{3} \sin\alpha 3r = \frac{6G}{g} r^2 \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{g \sin\alpha}{6r}$

$F_{tg} = \frac{G}{g} \frac{2r\, g \sin\alpha}{6r} = \frac{G \sin\alpha}{3}$; Din proiecții pe planul înclinat $T = G \sin\alpha - F_f - F_{tg} = \frac{G \sin\alpha}{3}$.

b) $\mu_{static} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\alpha$; $\mu_{dinamic} = \frac{1}{6} \operatorname{tg}\alpha$; $F_f = \frac{G}{6} \sin\alpha$ $I_A = \frac{3G}{g} r^2$.

Mișcarea : $\Sigma M_A = 0$ dă $\varepsilon = \frac{g \sin\alpha}{6r}$

$F_{tg} = \frac{G \sin\alpha}{6}$ deci $T = G \sin\alpha - \frac{G}{6} \sin\alpha - \frac{G}{6} \sin\alpha = \frac{2}{3} G \sin\alpha$.

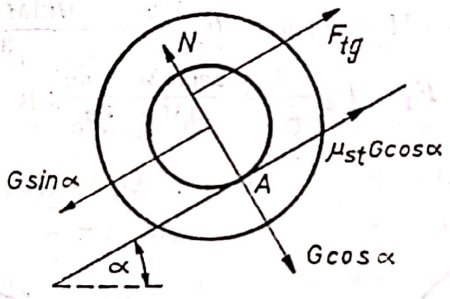


Fig. V.4

5. Putem aplica legea lucrului mecanic sau principiul lui d'Alembert.
Legea lucrului mecanic. Cînd P_1 coboară cu s_1, P_2 coboară cu s_2; $P_1 s_1 + P_2 s_2 = \frac{P_1}{g} \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_2}{g} \frac{v_2^2}{2} + \frac{I_1}{2} \omega_1^2 + \frac{I_2}{2} \omega_2^2$ (unde I_1 și I_2 sînt momentele de inerție ale roților (*1*) respectiv (*2*) în raport cu centrele lor).

iar $\omega_1 = \frac{v_1}{r_1}$; $R_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$; $\omega_2 = \frac{R_1 v_1}{r_1 r_2}$; $v_2 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} v_1$; $s_2 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} s_1$.

Deci legea lucrului mecanic devine :

$$\left(P_1 + P_2 \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}\right) s_1 = \frac{P_1}{2g} v_1^2 + \frac{P_2}{2g} \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} v_1^2 + \frac{I_1}{2} \frac{v_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2}{2} \frac{R_1^2}{r_1^2 r_2^2} v_1^2,$$

derivînd și avînd $\frac{ds_1}{dt} = v_1$; $\frac{dv_1}{dt} = a_1$, obținem :

$$\left(P_1 + P_2 \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}\right) = \frac{P_1}{g} a_1 + \frac{P_2}{g} \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} a_1 + \frac{I_1}{r_1^2} a_1 + \frac{I_2}{r_1^2 r_2^2} R_1^2 a_1$$

Scanned with OKEN Scanner

iar $T_1 = P_1 - \frac{P_1}{g} a_1$; $T_2 = P_2 - \frac{P_2}{g} a_2 = P_2 - \frac{P_2}{g} \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} a_1$

înlocuind cu datele din enunț avem : $I_1 = I_2 = \frac{2G}{g} r_1^2$;

$$v_1^2 = \frac{3}{7} g s_1 \; ; \quad a_1 = \frac{3}{14} g \; ; \quad T_1 = \frac{11}{7} G \; ; \quad T_2 = \frac{G}{7} .$$

Cu ajutorul principiului lui d'Alembert

$P_1 - \frac{P_1}{g} a_1 = T_1$. Notînd cu F_f = forța de frecare între roți, avem

Troliul I. $\Sigma M_{0_1} = 0$:

$$T_1 r_1 = F_f R_1 + I_1 \frac{a_1}{r_1} ; \text{ dar } R_1 \varepsilon_1 = r_2 \varepsilon_2 ; \; \varepsilon_2 = \frac{R_1}{r_2} \frac{a_1}{r_1} .$$

Troliul II. $\Sigma M_{0_2} = 0$:

$$F_f r_2 + T_2 R_2 = \frac{I_2 R_1}{r_1 r_2} a_1 .$$

Eliminînd pe F_f găsim același rezultat ca prin metoda precedentă.

6. Avînd $r_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$ și $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$ obținem

$$\omega_2 = \frac{r_1 v_1}{R_1 R_2} ; \; v_2 = \frac{r_1 r_2 v_1}{R_1 R_2} ; \; s_2 = \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2} s_1 .$$

Legea lucrului mecanic :

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 = \frac{P_1}{2g} v_1^2 + \frac{P_2}{2g} v_2^2 + \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} ;$$

cu datele din enunț : $s_2 = \frac{s_1}{4}$; $v_2 = \frac{v_1}{4}$; $I_1 = I_2 = \frac{2G}{g} r_1^2$, avem

$$9 s_1 = \frac{43}{8g} v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = \frac{72g}{43} s_1 . \text{ Derivînd :}$$

$$a_1 = \frac{36}{43} g \; ; \; T_1 = P_1 - \frac{P}{g} a_1 ;$$

$$T_1 = \frac{14}{43} G \; ; \; T_2 = P_2 - \frac{P_2}{g} a_2 \text{ unde } a_2 = \frac{a_1}{4} ; \; T_2 = \frac{34}{43} G .$$

7. Avem $a = r\varepsilon$; $T = P - \frac{P}{g} a$; $I_A = \frac{G}{g} 2r^2$ după t s troliul are $\omega = \frac{g}{2r} t$.

Mișcarea cu frînă. Bară : Din ecuația de momente față de punctul de articulație pentru bară avem $N = 2Q$.

Troliul. $\Sigma M_0 = 0$:

$$\mu \cdot 2Q \cdot 2r + \frac{G}{g} 2r^2 \varepsilon' = \left(2G - \frac{2G}{g} r\varepsilon' \right) r ,$$

de unde $\varepsilon' = \frac{-g}{2r} \frac{Q - G}{G}$. După t' [s], $\omega' = 0$; $t' = -\frac{\omega}{\varepsilon'} = \frac{Gt}{Q - G} (Q > G)$.

Pentru datele $t' = 2t$, se obține $Q = \frac{3G}{2}$ (fig. V.7).

Scanned with OKEN Scanner

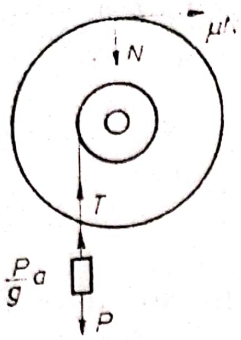


Fig. V.7

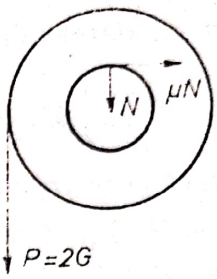


Fig. V.8

8. *Fără frînă :* $T = 2G - \frac{2G}{g} \cdot 2r\varepsilon$, $I_A = \frac{G}{g} 2r^2$;

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{2g}{5r}; \quad \omega = \frac{2g}{5r} t.$$

Mișcarea cu frînă : $\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow \varepsilon' = -\frac{Q - 4G}{10G} \frac{g}{r}$

$$\omega_{final} = 0 = \frac{2g}{5r} t - \frac{Q - 4G}{10G} \frac{g}{r} t' \Rightarrow t' = -\frac{4Gt}{Q - 4G};$$

($Q > 4G$). Pentru $t' = 2t$, avem $Q = 6G$.

9. *Roata* (fig. V.9, *a'*). $\Sigma M_A = 0$: $G \sin \alpha R - TR = I_A \varepsilon$ unde $I_A = \frac{3}{2} \frac{G}{g} R^2$;

$T = G \sin \alpha - \mu G \cos \alpha - \frac{G}{g} R\varepsilon$

de unde $\varepsilon = \frac{2g\mu \cos \alpha}{R}$ ($\frac{G}{g} R\varepsilon$ este paralel cu T avînd sensul în sus),

$T = G (\sin \alpha - 3\mu \cos \alpha)$.

Cubul (fig. V.9, *a''*). $T = \frac{G}{g} a - G \sin \alpha$ unde $a = R\varepsilon$ de unde $\mu = \frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha$;

iar $T = \frac{-G}{5} \sin \alpha$.

În bară este compresiune.

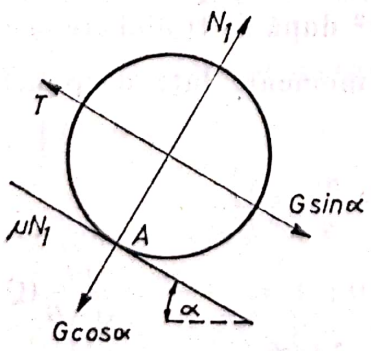


Fig. V.9. *a'*

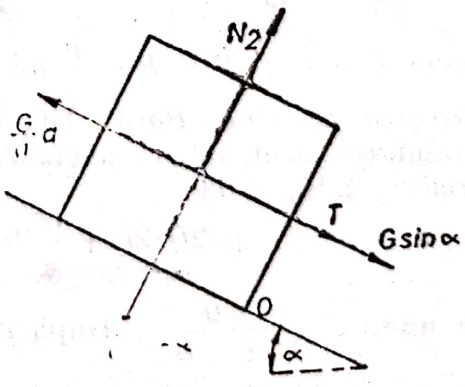


Fig. V.9, *a''*

10. *Cubul* (fig. V.10, *a'*) : $T = G \sin \alpha - \frac{G}{g} a$; $a = R\varepsilon$.

Roata (fig. V.10, *a''*) : $\Sigma M_A = 0$: $T = \frac{3G}{2g} R\varepsilon - G \sin \alpha$; $\varepsilon = \frac{4}{5} \frac{g}{R} \sin \alpha$;

$T = + \frac{G}{5} \sin \alpha$ (tracțiune) ; $\mu G \cos \alpha = T + G \sin \alpha - \frac{G}{g} R\varepsilon = \frac{2}{3} G \sin \alpha$

$\mu = \frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha$ [A este punctul de tangență cu planul înclinat ; în A acționează forțele μN_1 (de-a lungul planului înclinat) și N_1 (perpendicular pe planul înclinat, în sus)].

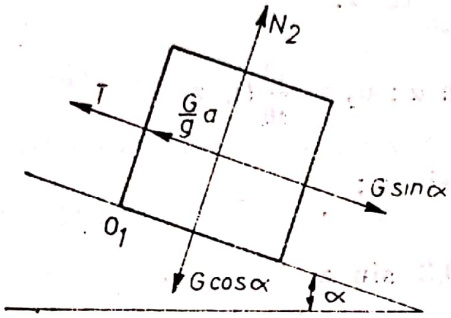


Fig. V.10, *a'*

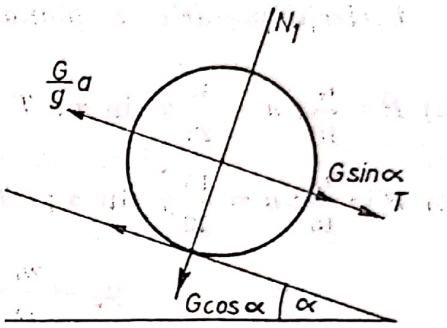


Fig. V.10, *a''*

11. *Sistemul solidificat* (*Ox* paralel cu planul) :

$$\Sigma X_i = 0 \text{ dă } a = \frac{g}{2} [2 \sin \alpha - (\mu_1 + \mu_2) \cos \alpha]$$

Cubul. $\Sigma X_i = 0$: $N = \frac{G}{2} \cos \alpha (\mu_1 - \mu_2)$

pentru a avea contact $N > 0$ deci $\mu_1 > \mu_2$.

Cilindrul. $\Sigma M_0 = 0$: $G \sin \alpha R - NR = I_0 \varepsilon$ de unde :

$N = \frac{3G}{4} \cos \alpha (\mu_1 + \mu_2) - \frac{G}{2} \sin \alpha$. Se obține : $\mu_2 = \frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\mu_1}{5} < \mu_1$

deci pentru contact $\mu_1 > \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$ și $\mu_2 < \mu_1$; $\mu_2 < \frac{1}{15} \operatorname{tg} \alpha$.

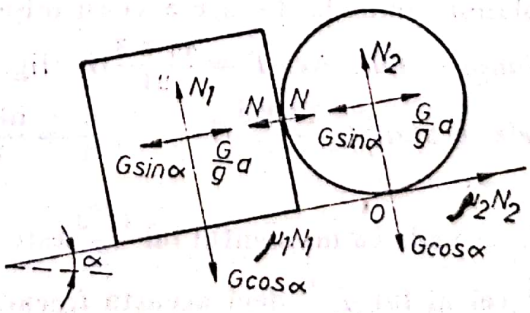


Fig. V.11

12. a) *Corpul G* (fig. V.12, *a'*). $T = G\sin\alpha + \frac{G}{g}a + \mu_1 \cdot G\cos\alpha = \frac{5}{4}G\sin\alpha + \frac{G}{g}a.$

Roata (fig. V. 12, *a''*). $I_A = \frac{3}{2g}\cdot 10GR^2$; $\Sigma M_A = 0$: $10G\sin\alpha\, R - TR - I_A\varepsilon = 0$.

F_{tg} forța de inerție are mărimea ca și cum ar fi aplicată în centrul roții :

$F_{tg} = \frac{10G}{g}R\varepsilon$; $\varepsilon = \frac{a}{R}$ de unde $T = \frac{115}{64}G\sin\alpha$; $a = \frac{35}{64}g\sin\alpha$.

Proiecții paralele cu planul, $\mu_2 = \frac{35}{128}\operatorname{tg}\alpha$.

b) $P = \frac{G}{10}$; $a = \frac{13}{23}g\sin\alpha$; $T = \frac{17}{92}G\sin\alpha$; $\mu_2 = \frac{13}{46}\operatorname{tg}\alpha$.

c) $P = \frac{G}{10}$; $a = \frac{15}{23}g\sin\alpha$; $T = \frac{9}{92}G\sin\alpha$;

$$\mu_2 = \frac{30}{92}\sin\alpha = 0{,}3\sin\alpha.$$

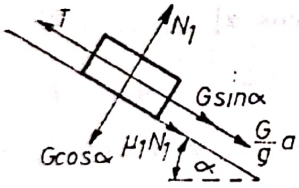


Fig. V.12, *a'*

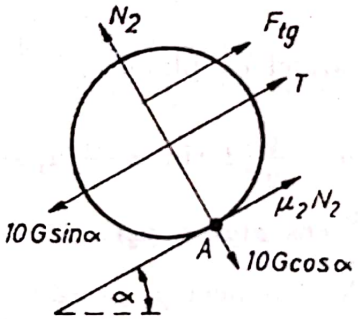


Fig. V.12, *a''*

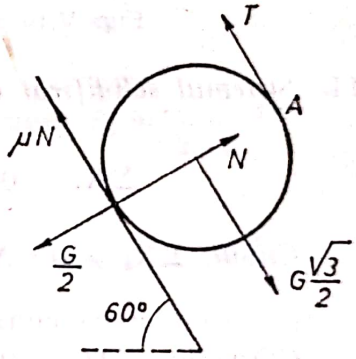


Fig. V.13, *b*

13. a) Ambele roți au aceeași mișcare, punctul fix la fiecare fiind A. Avem $\Sigma M_A = 0 : \frac{G}{2}R - \frac{1}{4}G\frac{\sqrt{3}}{2}2R = I_A\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{2-\sqrt{3}}{6}\frac{g}{R}$.

Din proiecții paralele cu planul înclinat $T = \frac{G}{2} - \mu N - GR\varepsilon = \frac{4+\sqrt{3}}{24}G$.

b) Roata de pe planul rămas la 30° are aceeași mișcare.

Roata de pe planul la 60°. Aci $T = \frac{4+\sqrt{3}}{24}G$ (fig. V.13, *b*).

Proiecții paralele cu planul : $\frac{4+\sqrt{3}}{24}G + \mu_1\frac{G}{2} = \frac{G\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu_1 = \frac{11\sqrt{3}-4}{12} \approx$ $\approx 1{,}23$.

Din $\Sigma M_A = 0$ se vede că momentul lui $\frac{G\sqrt{3}}{2}$ este mai mic în valoare absolută decît cel al lui $\mu_1\frac{G}{2}$ deci această frecare împiedică rostogolirea.

Scanned with OKEN Scanner

14. *Corpul* G $(G > P)$. Firul se deplasează cu accelerația $\bar{a}$ în sensul săgeții (fig. V.14, a').

Proiecții paralele cu planul. $G \sin \alpha = T + \frac{G}{g}(a + R\varepsilon)$

$$\Sigma M_A = 0: \; G \sin \alpha R = \frac{3}{2}\frac{G}{g} R^2 \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{2g \sin \alpha}{3R}.$$

Corpul P (fig. V. 14, a''). *Proiecții paralele cu planul.* $P \sin \theta = T - \frac{P}{g}(a - r\varepsilon_1)$.

$$\Sigma M_B = 0: \; P \sin\theta \; r = \frac{3}{2}\frac{P}{g} r^2 \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{2g \sin \theta}{3r}$$

de unde: $T = \frac{GP\,(\sin \alpha + \sin \theta)}{3\,(G + P)}$; $\quad a = \frac{g}{3}\frac{G \sin \alpha - P \sin \theta}{G + P}$

Într-un timp t de la pornire G parcurge un spațiu $s_G = \frac{a + R\varepsilon}{2} t^2$ iar P un spațiu $s_P = \frac{a - r\varepsilon_1}{2} t^2$. În cazul particular $a = 0$, $T = \frac{G}{3} \sin \alpha$.

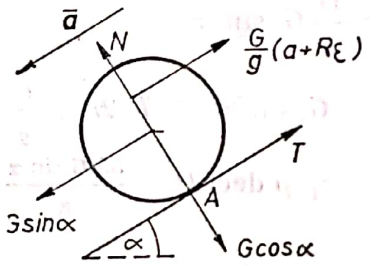


Fig. V.14, a'

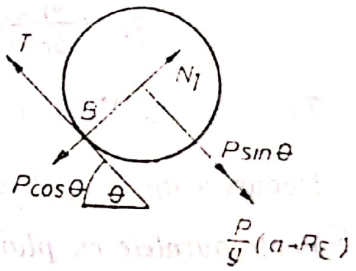


Fig. V.14, a''

15. *Troliul* (fig. V.15, a'). $\Sigma M_A = 0: \; G \sin \alpha r - \mu_1 G \cos \alpha \, 3r = \frac{3G}{g} r^2 \varepsilon$, deci

$$\varepsilon = \frac{g \sin \alpha}{12r}.$$

Proiecții paralele cu planul

$$T = G \sin \alpha - \frac{G}{4} \sin \alpha - \frac{G}{g} a - \frac{G}{12} \sin \alpha = \frac{2}{3} G \sin \alpha - \frac{G}{g} a. \qquad (1)$$

Corpul (fig. V.15, a''). *Proiecții paralele cu planul*

$$T = \frac{G}{g} a + \frac{3G}{4} \sin \alpha - G \sin \alpha. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) avem

$$a = \frac{11}{24} g \sin \alpha \qquad \text{și} \qquad T = \frac{5G}{24} \sin \alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

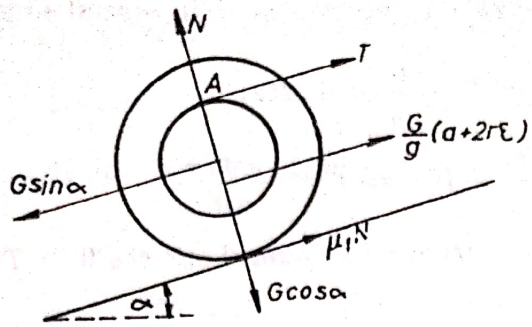


Fig. V.15, *a'*

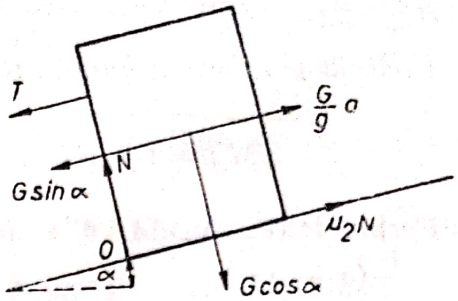


Fig. V.15, *a''*

Răsturnarea. $\Sigma M_0 = 0 : T\ 3r + G\ \sin\alpha\ 2r = G\ \cos\alpha b + \frac{G}{g} a\ 2r$

de unde $b = \frac{41}{24} r\ \text{tg}\ \alpha$

16. a) *Roata* (fig. V.16, *a'*). $\Sigma M_D = 0 : T\ 2r = 2G\ \sin\alpha\ 2r + \frac{2G}{g}\ \frac{3}{2}\ 4r^2\varepsilon_1$ unde

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{2r} = \frac{g\ \sin\alpha}{8r} \quad \text{deci} \quad T = \frac{11}{4} G\ \sin\alpha.$$

Troliul (fig. V.16, *a''*). $\Sigma M_A = 0 : Pr = G\ \sin\alpha r + T\ 2r + \frac{G}{g} 3r^2\varepsilon_2$

Deoarece $a_B = a_C$, $2r\varepsilon_2 = 2r\varepsilon_1$ avem $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ și deci $P = \frac{55\ G\ \sin\alpha}{8}$.

Forțe paralele cu planul înclinat :

Roata : $\mu_1\ 2G\ \cos\alpha = T - 2G\ \sin\alpha - \frac{2G}{g}\ \frac{g\ \sin\alpha}{4} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{8}\ \text{tg}\ \alpha.$

Troliul : $\mu_2 G\ \cos\alpha = T + G\ \sin\alpha + P + \frac{G}{g}\ \frac{g\ \sin\alpha}{8} \Rightarrow \mu_2 = 13\ \text{tg}\ \alpha.$

b) Pentru sensul contrar căpătăm :

$T = \frac{5}{4} G\ \sin\alpha\ ;\ P = \frac{25}{16} G \sin\alpha\ \mu_1 = \frac{7}{8}\ \text{tg}\,\alpha\ ;\ \mu_2 = \frac{59}{16}\ \text{tg}\ \alpha \cong 3{,}7\ \text{tg}\ \alpha.$

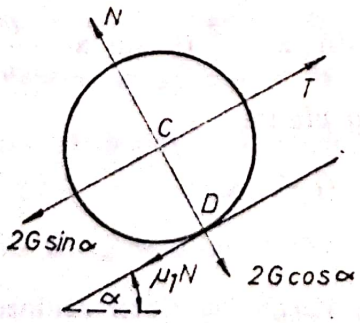


Fig. V.16, *a'*

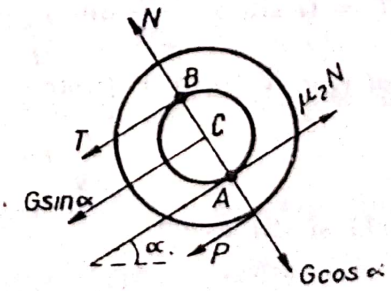


Fig. V.16, *a''*

Scanned with OKEN Scanner

17. $I_A = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}$ (momentul de inerție al barei cotite în raport cu A).

Poziția inițială (fig. V.17, *a'*). $M_{ext} = I_A\varepsilon_1$ sau $G\frac{l}{2} = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{3}{4}\frac{g}{l}$

$\omega_1 = 0$; F centrifugă $= 0$; $F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon = \frac{3G}{8}$;

$$X_A = -\frac{3G}{8};\quad Y_A = 2G - \frac{3G}{8} = \frac{13G}{8}$$

Poziția II (fig. V.17, *a''*). Legea lucrului mecanic de la poziția *I* la *II*

$$G\frac{l}{2} + G\frac{l}{2} = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_2^2}{2} \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{3g}{l};\quad F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega_2^2 = \frac{3G}{2}$$

$$M_{ext} = I_A\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{3}{4}\frac{g}{l};\quad F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon_2 = \frac{3G}{8}$$

$$X_A + F_C + F_{tg} = 0 \Rightarrow X_A = \frac{-15G}{8};\quad Y_A = 2G + F_c - F_{tg} = \frac{25G}{8}.$$

Poziția III (fig.V. 17, *a'''*). Legea lucrului mecanic de la poziția *I* la *III*

$$Gl = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_3^2}{2} \Rightarrow \omega_3^2 = \frac{3g}{l};\quad \varepsilon_3 = \frac{-3}{4}\frac{g}{l};$$

$$F_c = \frac{3G}{2};\quad F_{tg} = \frac{-3G}{8};\quad X_A = +\frac{15G}{8};\quad Y_A = \frac{25G}{8}.$$

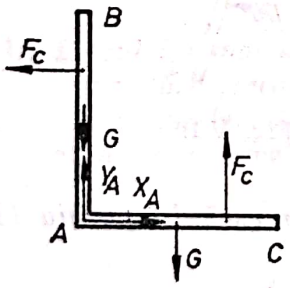


Fig. V.17, *a'*

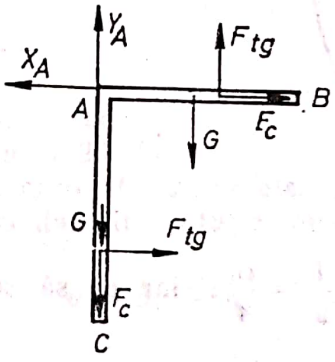


Fig. V.17, *a''*

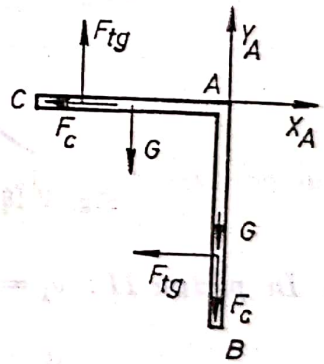


Fig. V.17, *a'''*

18. La limita de lunecare $F_f = \frac{1}{4}N$. Fie θ unghiul limită de la care punctul și roata fac încă corp comun. Avem $M_{ext} = I_0\varepsilon$ unde $I_0 = \frac{MR^2}{2} + mR^2$ iar $M_{ext} = mg \sin \theta R$ deci $\varepsilon = \frac{2mg \sin \theta}{(M + 2m)R}$

Asupra mobilului lucrează forțele ca în figura V.18 unde $F_c = mR\omega^2$; $F_{tg} = mR\varepsilon$. Din lucrul mecanic obținem pe ω^2:

$$mgR(1 - \cos\theta) = \frac{I_0\omega^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4mg(1 - \cos\theta)}{(M + 2m)R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Proiectînd pe tangentă și rază avem :

$$\mu N = mg \sin\theta - mR\varepsilon = \frac{M\, mg \sin\theta}{M + 2m};$$

$$N = mg \cos\theta - mR\omega^2 = \frac{mg}{M + 2m}[(M + 6m) \cos\theta - 4m]$$

de unde :

$$M \sin\theta = \mu(M + 6m) \cos\theta - 4\mu m.$$

Introducînd $M = 2m$; $\mu = \frac{1}{4}$ obținem $3 \operatorname{tg}^2\theta - 8 \operatorname{tg}\theta + 3 = 0$ de unde $\theta \approx 23°45'$.

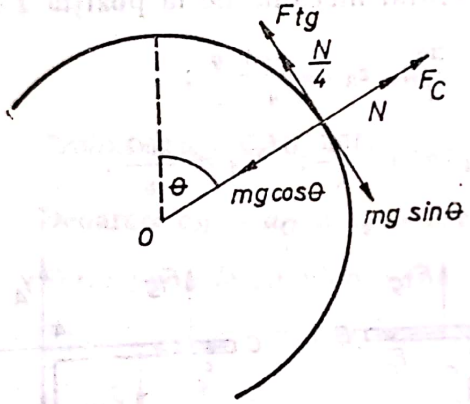


Fig. V.18

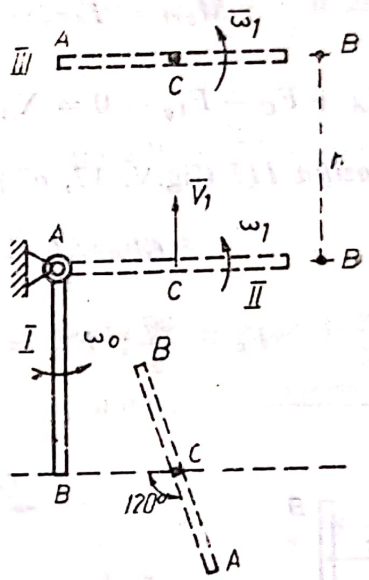


Fig. V.19

19. *În poziția II :* $v_1 = \omega_1 \frac{l}{2} = \frac{\omega_1}{4}$; iar ca să se oprească *în poziția III*

$$v_1 = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{\omega_1^2}{32g}.$$

Timpul de urcare este dat de $v_1 = gt_1$,

$t_1 = \frac{\omega_1}{4g}$, iar unghiul $\theta = \pi = \omega_1 t_1 \Rightarrow \omega_1 = 11{,}1$ rad/s.

Determinarea lui ω_0. Legea lucrului mecanic din *I* în *II*

$$-G\frac{l}{2} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_0^2}{2} \Rightarrow \omega_0 = 13{,}5 \text{ rad/s}.$$

Căderea pe verticală pe distanța $h + l = h_1$:

$h = \frac{\omega_1^2}{32g} = 0{,}39$; $l = 0{,}5$; $h_1 = 0{,}89$ m

$h_1 = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t \approx 1{,}3$ s. Unghiul de rotire $0 = \omega_1 t = 14{,}55$

$n = \frac{14{,}55}{2\pi} \approx 2{,}32$ rot, adică două rotaţii complete, plus aproximativ $0{,}32 \cdot 360° \approx 120°$.

20. a) *Fără frecare:* $I_0 = \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}$; $T = 3G - \frac{3G}{g}a$; $TR = I_0\frac{a}{R}$

obţinem $a = \frac{6}{7}g$; $T = \frac{3}{7}G$.

Cu frecare: Frecarea este de pivotare: $M_P = \frac{2}{3}\mu GR$ (fig. V.20, *a*).

Analog $T = 3G - \frac{3G}{g}a$; $TR - \frac{2}{3}\frac{1}{2}GR = \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{a}{R}$ de unde

$a = \frac{16}{21}g$; $T = \frac{5}{7}G$.

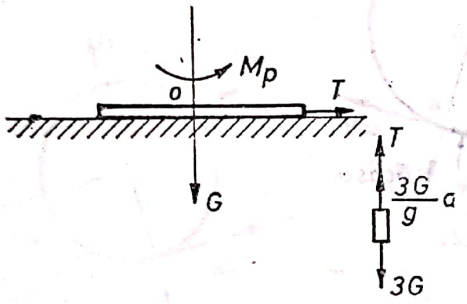


Fig. V.20, *a*

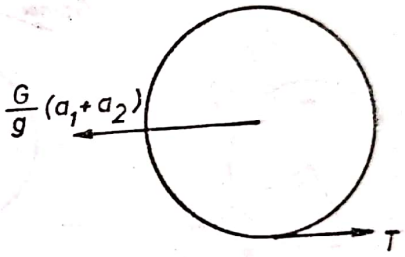


Fig. V.20, *b*

b) *Discul nu mai are punct fix:*
Cazul fără frecare (fig. V.20, *b*).
Fie $\bar{a}$ acceleraţia corpului $3G$, $\bar{a}_1$ acceleraţia datorită translaţiei discului şi $\bar{a}_2$ acceleraţia datorită rotaţiei discului:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2.$$

Avem: $T = \frac{G}{g}a_1$ şi $TR = I_0\frac{a_2}{R}$ iar la corpul $3G$:

$T = 3G - \frac{3G}{g}(a_1 + a_2)$ de unde $a_1 = \frac{3}{10}g$; $a_2 = \frac{3}{5}g$; $a = \frac{9}{10}g$; $T = \frac{3G}{10}$

Cu frecare:

Analog $T = 3G - \frac{3G}{g}(a_1 + a_2)$

$$T = \frac{G}{g}a_1 + \mu G \text{ şi } TR - \frac{2}{3}\frac{1}{2}GR = \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{a_2}{R^2}$$

de unde: $a_1 = \frac{3g}{20}$; $a_2 = \frac{19g}{30}$; $a = \frac{47}{60}g$; $T = \frac{13G}{20}$.

Scanned with OKEN Scanner

21. Fie $I_A = \frac{3G}{g}\frac{R^2}{2}$ (momentul de inerție în raport cu punctul de tangență A) (fig. V.21).

Determinarea lui μ necesar ca să nu lunece

$$\Sigma M_A = 0\,;\quad G\sin\alpha R = \frac{3}{2}\frac{G}{g}R^2\varepsilon \text{ de unde } \varepsilon = \frac{2g\sin\alpha}{3R}.$$

Forța tangențială de inerție $F_{tg} = \frac{G}{g}R\varepsilon = \frac{2}{3}G\sin\alpha\,;\ \mu N = \frac{1}{3}G\sin\alpha.$

Dar $N = G\cos\alpha$, deci $\mu = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; acesta este μ necesar ca roata să nu lunece.

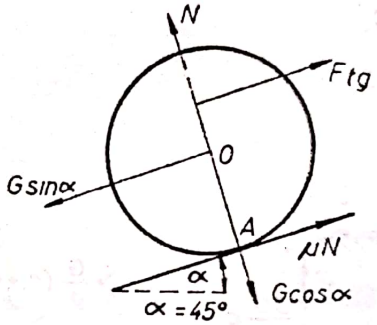


Fig. V.21

În problemă $\mu = \frac{1}{4}$, mai mic decît cel necesar, deci roata va luneca.

(1) *Mișcarea de lunecare cu rostogolire*

La lunecare se studiază forțele paralele cu planul de lunecare:

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha - \frac{1}{4}mg\cos\alpha$$

de unde: $\ddot{x}_1 = g\left(\sin\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha\right) = \frac{3}{4}g\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$x_1 = \frac{gt_1^2}{2}\left(\sin\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha\right) = \frac{3gt_1^2\sqrt{2}}{16};\quad \dot{x}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{8}t_1.$$

La rostogolire se studiază cuplurile în jurul punctului fix de rotație: $\Sigma M_0 = 0$ (căci punctul A nu e fix): $\mu mg\cos\alpha R = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}_1$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{2\mu g\cos\alpha}{R} = \frac{g\sqrt{2}}{4R};\quad \dot{\theta}_1 = \frac{g\sqrt{2}}{4R}t_1;\quad \theta_1 = \frac{g\sqrt{2}}{4R}\frac{t_1^2}{2};\quad R\dot{\theta}_1 = \frac{g\sqrt{2}}{4}t_1.$$

Viteza punctului A:

$v_A = \dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{8}t_1 - \frac{g\sqrt{2}}{4}t_1 = \frac{g\sqrt{2}}{8}t_1$ nu se anulează, crește cu t_1; nu va fi niciodată rostogolire simplă.

22. $-G \sin \alpha R = \frac{3}{2} \frac{G}{g} R^2 \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = -\frac{2g \sin \alpha}{3R}$

$F_f = \frac{2G}{3} \sin \alpha$; $\mu G \cos \alpha = \frac{G}{3} \sin \alpha$; $\mu = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$; ca să se rostogolească fără lunecare. Fie $\mu = \frac{1}{4}$. La început avem mișcare de lunecare cu rostogolire, apoi mișcare numai de rostogolire.

(1) **Mișcarea lunecare cu rostogolire.** Se dau $\dot{x}_0 = v_0$; $\dot{\theta}_0 = \omega_0 = 0$. *Lunecarea* (fig. V.22, *a*), (frecarea are sens în jos căci corpul lunecă);

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -mg \sin \alpha - \frac{1}{4} mg \cos \alpha \Rightarrow \ddot{x}_1 = -g \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{4} \\ x_1 &= v_0 t_1 - \frac{5g\sqrt{2}}{8} \frac{t_1^2}{2}, \quad \dot{x}_1 = v_0 - \frac{5g\sqrt{2}}{8} t_1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

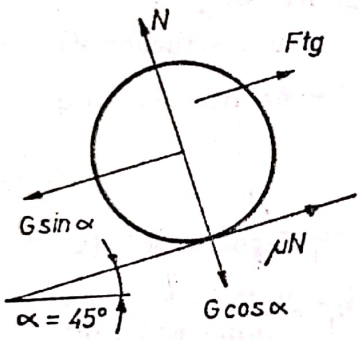


Fig. V.22

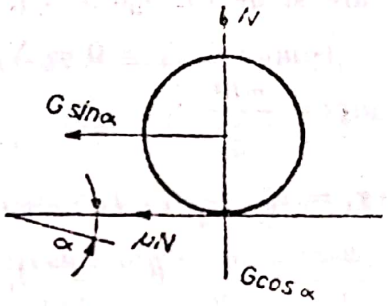


Fig. V.22, *a*

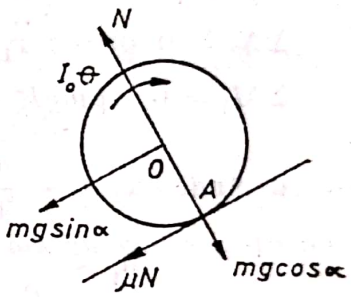


Fig. V.22, *b*

Rostogolirea (fig. V.22, *b*): $\Sigma M_0 = 0$ (față de centrul de greutate căci A nu e fix).

$\mu mg \cos \alpha R = I_0 \ddot{\theta}_1$, deci $\ddot{\theta}_1 = \frac{g\sqrt{2}}{4R}$; $\dot{\theta}_1 = \frac{g\sqrt{2}}{4R} t_1$.

Viteza de lunecare a lui A este

$$v_A = \dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 = v_0 - \frac{5g\sqrt{2}}{8} t_1 - \frac{g\sqrt{2}}{4} t_1 = v_0 - \frac{7}{8} g\sqrt{2} t_1.$$

Roata se oprește să lunece cînd $t_1 = \frac{4v_1\sqrt{2}}{7g}$.

De aci înainte roata se rostogolește fără lunecare cu o viteză inițială (pentru această mișcare de rostogolire) a centrului de greutate $v_G = v_0 - \frac{5g\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{8v_0}{7g\sqrt{2}} = \frac{2}{7} v_0$ și $\dot{\theta}_1 = \frac{2v_0}{R}$.

(2) **Mișcarea numai de rostogolire.** Aci punctul fix este A:

$$\left.\begin{aligned} -mg \sin \alpha R &= I_A \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R}; \quad \ddot{x}_2 = -\frac{2}{3} g \sin \alpha = \\ &= \frac{-g\sqrt{2}}{3}; \dot{x}_2 = v_G - \frac{\sqrt{2}}{3} g t_2. \text{ Se oprește cînd } t_2 = \frac{3 v_G}{g\sqrt{2}} = \frac{3v_0\sqrt{2}}{7g}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Deci timpul total de mers al roții este $t = \frac{4v_0\sqrt{2}}{7g} + \frac{3v_0\sqrt{2}}{7g} = \frac{v_0\sqrt{2}}{g}$.

În timpul mișcării (1) de *lunecare cu rostogolire* roata parcurge

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{5g\sqrt{2}}{8}\frac{t_1^2}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{49}\frac{v_0^2}{g}.$$

În timpul mișcării (2) de *rostogolire simplă* parcurge

$$x_2 = v_G t_2 - \frac{\sqrt{2}}{3} g \frac{t_2^2}{2} = \frac{2}{7} v_0 \frac{3v_0\sqrt{2}}{7g} - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{g}{2}\frac{9v_0^2 \cdot 2}{49g^2} = \frac{3v_0^2\sqrt{2}}{49g}.$$

Spațiul total parcurs pînă la oprire este deci

$$x_1 + x_2 = \frac{21v_0^2\sqrt{2}}{49g}.$$

23. La început este o mișcare de translație cu $\bar{v}_0$ inițial plus una de rotație cu $\omega_0 = 0$ (fig. V.23). Rotația se face în jurul centrului de greutate, punctul A nefiind fix. Apoi urmează mișcare de rostogolire simplă.

(1) **Mișcarea de lunecare și de rostogolire :**

$\Sigma X_i = 0$ dă : $m\ddot{x}_1 = -\mu mg$; $\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_1 = mg$;

$\Sigma M_0 = 0$: $\mu mgR - mgs = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}_1$;

de unde : $\ddot{x}_1 = -\frac{g}{4}$; $\dot{x}_1 = v_0 - \frac{g}{4}t_1$; $x_1 = v_0 t_1 - \frac{g}{4}\frac{t_1^2}{2}$;

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{2\mu g}{R} - \frac{2gs}{R^2} = \frac{3g}{10R} ; \quad \dot{\theta}_1 = \frac{3g}{10R}t_1 ; \quad \theta_1 = \frac{3g}{10R}\frac{t_1^2}{2}.$$

Se observă că x_1 (viteza de translație) scade cu t_1 în timp ce cea de rotație crește cu t_1.

Viteza lui A este $v_A = \dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 = v_0 - \frac{g}{4}t_1 - \frac{3g}{10}t_1 = v_0 - \frac{11}{20}gt_1$.

$v_A = 0$ la sfîrșitul lunecării și deci la începutul rostogolirii simple. $v_A = 0$ dă $t_1 = \frac{20v_0}{11g}$. De unde $x_1 = \frac{170}{121}\frac{v_0^2}{g} \approx 1{,}4\frac{v_0^2}{g}$.

În acest timp $\theta_1 = \frac{60}{121}\frac{v_0^2}{gR} \approx \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{gR}$, iar vitezele în acel moment sînt :

$\dot{x}_1 = \frac{6v_0}{11}$; $\dot{\theta}_1 = \frac{6}{11}\frac{v_0}{R}$.

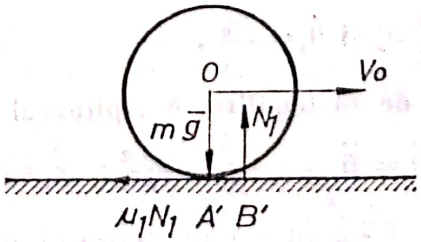


Fig. V.23

(2) **Mişcarea de rostogolire simplă.** Se face în jurul lui A cu ω_1, iniţial $= \frac{6v_0}{11R}$ · Determinăm θ_2 unghiul parcurs pînă la oprire, din legea lucrului mecanic :

$$-(Gs)\theta_2 = -\frac{3}{2}\frac{G}{g}R^2\left(\frac{6v_0}{11R}\right)^2\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{270}{121}\frac{v_0^2}{gR}.$$

Timpul t_2 pînă la oprire e dat de $-Gs = \frac{3}{2}\frac{G}{g}R^2\varepsilon$.

$$\varepsilon = \frac{-g}{15R};\quad \omega_f = 0 = \frac{6v_0}{11R} - \frac{g}{15R}t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{90v_0}{11g}.$$

Timpul total al mişcării $t = t_1 + t_2 = \frac{20v_0}{11g} + \frac{90v_0}{11g} = \frac{10v_0}{g}$.

24. (1) **Mişcarea de lunecare cu rostogolire :**

Lunecarea : $m\ddot{x}_1 = mg\left(\sin\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha\right) \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{3}{8}g\sqrt{2}$

$$\dot{x}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{8}t_1;\ x_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{16}t_1.$$

Rostogolirea : $\Sigma M_0 = 0$:

$$\mu mg\cos\alpha R = mg\cos\alpha s = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}_1 \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{20R};\quad \dot{\theta}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{20R}t_1;$$

$$v_A = \dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 = \frac{15g\sqrt{2}}{40}t_1 - \frac{6g\sqrt{2}}{40}t_1.$$

(2) **La rostogolire simplă :** $v_A = 0 = \frac{9}{40}g\sqrt{2}t_1$ nu se poate anula, creşte cu t_1. Pentru această frecare mică, roata nu va avea niciodată rostogolire fără lunecare.

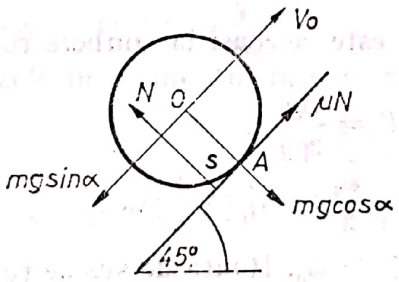


Fig. V.24

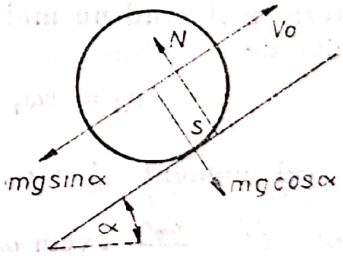


Fig. V.25

25. (1) **Lunecarea cu rostogolire :**

Lunecarea : $m\ddot{x}_1 = -mg\sin\alpha - \frac{1}{4}mg\cos\alpha$; $\ddot{x}_1 = -\frac{5g\sqrt{2}}{8}$; $\dot{x}_1 = v_0 - \frac{5g\sqrt{2}}{8}t_1$ $x_1 = v_0t_1 - \frac{5g\sqrt{2}}{16}t_1^2$. (Forţa de frecare de-a lungul planului este $\mu mg\cos\alpha$ şi are sensul în jos).

Rostogolirea : $\Sigma M_0 = 0$: $\mu mg\cos\alpha R - mg\cos\alpha s = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}_1$ deci :

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{20R};\quad \dot{\theta}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{20R}t_1;\ v_A = \dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 = v_0 - \frac{31g\sqrt{2}}{40}t_1 \Rightarrow t_1 \text{ pentru}$$

Scanned with OKEN Scanner

$v_A = 0$ este $t_1 = \frac{20 v_0 \sqrt{2}}{31 g}$. La sfîrșitul lunecării cu rostogolire avem $\dot{x}_1 = v_0 - \frac{5g\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{20 v_0 \sqrt{2}}{31 g} = \frac{6}{31} v_0 = v_G$ care este viteza centrului de greutate cînd începe rotația simplă.

$$\dot{\theta}_1 = \frac{3g\sqrt{2}}{20 R} \frac{20 v_0 \sqrt{2}}{31 g} = \frac{6 v_0}{31 R}.$$

(2) **Mișcarea de rostogolire simplă :**

$\Sigma M_A = 0 : -mg \sin \alpha R - mg \cos \alpha s = \frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta}_2$ de unde $\ddot{\theta}_2 = -\frac{11g\sqrt{2}}{30 R}$

$\ddot{x}_2 = \frac{11g\sqrt{2}}{30}$; $\dot{x}_2 = v_G - \frac{11g\sqrt{2}}{30} t_2 = \frac{6v_0}{31} - \frac{11g\sqrt{2}}{30} t_2$.

Corpul se oprește cînd $\dot{x}_2 = 0$ sau $t_2 = \frac{45 v_0 \sqrt{2}}{341 g}$.

Timpul total pînă la oprire este $t = t_1 + t_2 = \frac{20 v_0 \sqrt{2}}{31 g} + \frac{45 v_0 \sqrt{2}}{341 g}$ deci

$$t = \frac{265}{341} \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \text{ [s]}.$$

26. a) La început viteza în A este diferită pentru fiecare roată deci ele vor patina un timp t (fig. V.26, *a*) :

Roata mare : $-\mu PR = \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \varepsilon_2$ de unde $\varepsilon_2 = -\frac{2\mu g}{R} \frac{P}{G} = -\frac{2\mu g}{r}$,

$$\omega_2 = \omega_0 + \varepsilon_2 t = \omega_0 - \frac{2\mu g}{r} t. \qquad (1)$$

Roata mică : $\mu Pr = \frac{P}{g} \frac{r^2}{2} \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{2\mu g}{r}$,

$$\omega_1 = \frac{2\mu g t}{r}. \qquad (2)$$

Viteza în A cînd nu mai patinează este aceeași la ambele roți după t' dat de

$$v_A = r\omega_1 = R\omega_2 \Rightarrow t' = \frac{\omega_0 r}{3\mu g} \qquad (3)$$

În acel moment $\omega_2' = \omega_0 - \frac{2\mu g}{r} t' = \frac{\omega_0}{3}$; $\omega_1' = \frac{2}{3} \omega_0$.

Pentru $t'' = \frac{\omega_0 r}{2\mu g'}$, avem $\omega_2'' = 0$ și $\omega_1'' = \omega_0$. Roata de sus se rotește în același sens în mișcare încetinită, antrenînd pe cea de jos (căci μP își schimbă sensul) în același sens pe care l-a avut, dar în mișcare accelerată.

b) *Mișcarea după oprirea discului mare* (fig. V.26, *b*), (ω inițial la discul mare este nul, iar la cel mic este ω_0) :

Discul mic : $-\mu Pr = \frac{P}{g} \frac{r^2}{2} \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = -\frac{2\mu g}{r}$; $\omega_1 = \omega_0 - \frac{2\mu g}{r} t_1$.

Discul mare : $\mu PR = \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{2\mu g}{r}$; $\omega_2 = \frac{2\mu g}{r} t_1$.

Nu mai patinează cînd $r\omega_1 = R\omega_2 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 r}{6\mu g}$.

Scanned with OKEN Scanner

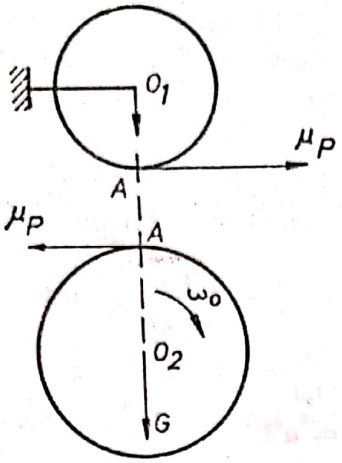


Fig. V.26, *a*

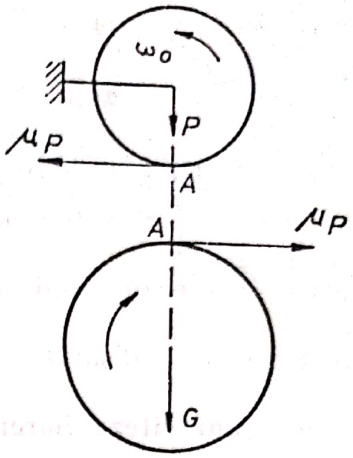


Fig. V.26, *b*

De aci înainte roata mi... patinează în celălalt sens pînă ce $\omega_1 = 0$ sau $t_1' = \frac{\omega_0 r}{2\mu g}$ cînd $\omega_1 = 0$ și $\omega_2 = \omega_0$; fenomenul apoi se repetă.

27. a) *Corpurile la început patinează* ($\mu = 4\mu_0$).

Bara : $-6\mu_0 G = \frac{G}{g} a = 0 \Rightarrow a = -6\mu_0 g$ (la sol $2\mu_0 G$ spre stînga).

După un timp t : $V = v_0 - 6\mu_0 g t$.

Discul : $\Sigma M_0 = 0$; $r\, 4\mu_0 G = \frac{G}{g} \frac{r^2}{2} \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{8\mu_0 g}{r}$ · După timpul t :

$$\omega = \frac{8\mu_0 g}{r} t.$$

Corpurile nu mai patinează cînd $v_A = V - r\omega = 0$ sau $v_0 - 6\mu_0 g t = 8\mu_0 g t$ deci $t = \frac{v_0}{14\mu_0 g}$ ·

Vitezele în momentul în care nu mai patinează sînt :

$$V_1 = \frac{4v_0}{7} ; \quad \omega_1 = \frac{4v_0}{7r} .$$

Bara se oprește cînd $V = v_0 - 6\mu_0 g t_1 = 0$ sau $t_1 = \frac{v_0}{6\mu_0 g}$ ·

În acest timp, ω a devenit $\omega_2 = \frac{4}{3} \frac{v_0}{r}$ ·

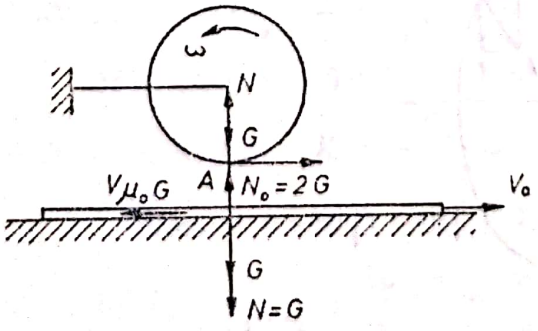


Fig. V.27, *a*

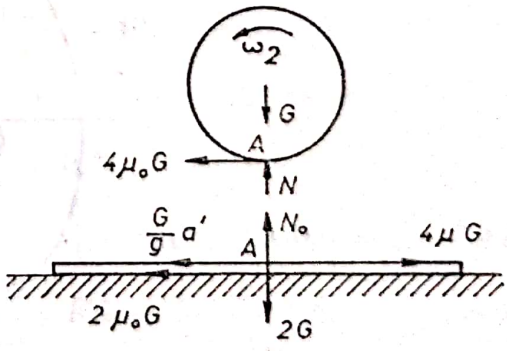


Fig. V.27, *b*

b) Roata va începe o mișcare încetinită, în același sens, iar bara o mișcare accelerată în același sens, la început patinează.

Discul : $-4\mu_0 Gr = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}\varepsilon' \Rightarrow \varepsilon' = \frac{-8\mu_0 g}{r}$

$$\omega_2' = \omega_2 + \varepsilon' t'.$$

Bara în acest timp t' înaintează. După t' are viteză $v' = a't'$.

$4\mu_0 G - 2\mu_0 G - \frac{G}{g}a' = 0 \Rightarrow a' = 2\mu_0 g$. Deci $v' = 2\mu_0 g t'$.

Patinarea încetează cînd $r\omega' = v' \Rightarrow t' = \frac{2v_0}{15\mu_0 g}$, iar discul se oprește cînd $\omega_2' = 0$ sau $t'' = \frac{\omega_2}{\varepsilon'} = \frac{v_0}{6\mu_0 g}$.

În acel moment viteza barei este $V' = a't'' = \frac{v_0}{3\mu_0 g}$.

Fenomenul reîncepe.

Capitolul VI

MOMENT CINETIC. GIROSCOP

1. Avem elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (fig. VI.1) :

$\dot{x} = -6 \sin 2t$; $\dot{y} = 8 \cos 2t$;

$\ddot{x} = -12 \cos 2t = -4x$; $\ddot{y} = -16 \sin 2t = -4y$;

$X = m\ddot{x} = -4mx$; $Y = -4my$;

$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = 4m\sqrt{x^2 + y^2} = 4mr$ forță centrală.

Momentul cinetic $\bar{K} = m(\dot{y}x - \dot{x}y) = m(24 \cos^2 2t + 24 \sin^2 2t) = 24\, m =$ = const.

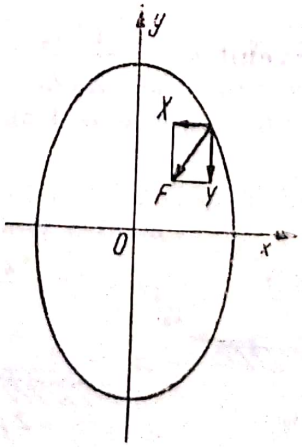


Fig. VI.1

Scanned with OKEN Scanner

2. Din firul atîrnat vertical $K = \frac{mg}{l} = mg$.

Deci : $m\ddot{x} = -mgx$; $m\ddot{y} = -mgy$

$x = A_1 \cos\sqrt{g}\,t + A_2 \sin\sqrt{g}\,t$; $y = B_1 \cos\sqrt{g}\,t + B_2 \sin\sqrt{g}t$ cu $\sqrt{g} \approx 3$ și condițiile inițiale date :

$x = 2\cos 3t$; $y = \frac{1}{3}\sin 3t$, elipsă de semiaxe 2 și $\frac{1}{3}$

$\dot{x} = -6 \sin 3t$; $\dot{y} = \cos 3t$; $\bar{K} = m(\dot{y}x - \dot{x}y) = 2m = \text{const.}$

3. a) $P = \frac{G}{g}\frac{v_0^2}{r} = \frac{1}{2g}\frac{16}{0{,}2} = 4$ N.

b) $\frac{G}{g}v_0 r = \frac{G}{g}v_1 x \Rightarrow 0{,}8 = v_1 x$.

$2P = 8 = \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{x} \Rightarrow 160 = \frac{v_1^2}{x}$ de unde $x^3 = \frac{1}{250} \Rightarrow x \approx 0{,}16$; $v_1 = 5$ m/s.

4. $I_1 = \frac{2}{7}\frac{G}{g}R^2$; unde $G = \gamma\frac{4}{3}\pi R^3$; $\bar{K} = \frac{8}{21}\frac{\gamma}{g}\pi R^5 \omega_1$

După detașarea stratului : $I_2 = \frac{2}{7}\frac{\gamma}{g}\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{I_1}{32}$;

$I_1\omega_1 = \frac{I_1}{32}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 32\ \omega_1$.

5. $I_1 = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}$; $\bar{K} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\omega_1$; $N_c = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega_1^2$. După ruperea lui C

$I_2 = \frac{G}{g}\frac{l^2}{12} + \frac{G}{g}\left(\frac{3l}{2}\right)^2 = \frac{7}{3}\frac{G}{g}l^2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{7}$;

$N_B = \frac{G}{g}\frac{3}{2}l\omega_2^2 = \frac{3N_c}{49}$.

6. $I_1 = \frac{3}{10}\frac{G}{g}R_1^2$; $V = \pi R_1^2\frac{h_1}{3} = \pi R_2^2\frac{h_2}{3}$ dar $h_2 = h_1 - v_0 t$

deci $R_2^2 = R_1^2\frac{h_1}{h_1 - v_0 t}$ deci $I_2 = \frac{3G}{10g}R_1^2\frac{h_1}{h_1 - v_0 t}$ de unde $\omega_2 = \frac{h_1 - v_0 t}{h_1}\omega_1$.

7. Înainte de dilatare $I_1 = \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}$; după timpul t, $I_2 = \frac{G}{2g}\frac{R^2 h}{h + v_0 t}$

deci $\omega_2 = \frac{h + v_0 t}{h}\omega_1$.

8. $I_A = \frac{20}{g}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $\omega = \frac{\pi\cdot 1200}{30} = 40\pi$; $\bar{K} = I_A\bar{\omega} = 10\pi$

$M = 20\cdot 0{,}5 - 5\cdot 0{,}5 = 10\pi\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{7{,}5}{31{,}4} \approx 0{,}24$ rad/s.

9. a) $\omega = 12\pi$; $\bar{K} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{12}\omega = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}8$.

$\Sigma M_c = 0 : 10\left(1 - x\right) + 4\left(\frac{1}{2} - x\right) - 12x = 0{,}8\cdot 0{,}5 \Rightarrow x = 0{,}446$.

b) $I_A = \frac{G}{g}\frac{l^2}{12} + \frac{2G}{g}\frac{l^2}{4} = \frac{7G}{g}\frac{l^2}{12}$; $\bar{K}\bar{\omega} = \frac{7G}{g}\frac{l^2}{12}\cdot 12\pi = \frac{7}{4}\pi \approx 5{,}5$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Determinarea poziției centrului de greutate al corpului:

$$G\cdot 2R+\frac{G}{2}\,\frac{R}{2}=\frac{3G}{2}\,y_G\Rightarrow y_G=\frac{3R}{2};\quad I_z=\frac{2}{7}\,\frac{3G}{2g}\,R^2=\frac{3}{7}\,\frac{G}{g}\,R^2.$$

$$\Omega=5=\frac{\frac{3G}{2}\cdot\frac{3R}{2}}{\frac{3}{7}\,\frac{G}{g}\,R^2\omega}\Rightarrow\omega=\frac{21}{20}\,\frac{g}{R}=105\ \text{rad/s};\quad n=\frac{30\omega}{\pi}\approx 1\,050$$

rot/min.

Capitolul VII

CIOCNIRI

1. a) *Ciocnirea;* $mv_1=mv_1'+mv_2';\ K=\dfrac{v_2'-v_1'}{v_1}$.

Dar din legea lucrului mecanic $-\mu Gs=-\dfrac{G}{g}\,\dfrac{v_2'}{2}\Rightarrow v_2'=\sqrt{2g\mu s}$ deci $v_1=\dfrac{2\sqrt{2g\mu s}}{1+K}$. Dacă $\mu=0$ bila ciocnită nu se mai oprește. Cu cît ciocnirea e mai aproape de cea plastică ($K=0$), v_1 necesar e mai mare.

b) $\mu\geqslant \operatorname{tg}\alpha$ pentru repausul bilei ciocnite pe planul înclinat. Ciocnirea se calculează ca la (a), dar legea lucrului mecanic este $-G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)s=-\dfrac{G}{g}\,\dfrac{v_2'^2}{2}\Rightarrow v_2'=\sqrt{2gs(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$ deci $v_1=\dfrac{2v_2'}{1+K}=\dfrac{2\sqrt{2gs(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}}{1+K}$. Aci dacă $\mu=0$, bila se va opri totuși.

c) Se găsește pentru $v_2'=0$, $v_1=v_1'$ imposibil. Bila ciocnită nu se mai oprește.

2 Pînă la ciocnire mobilul din A parcurge $AC=s=\dfrac{gt^2}{2}$ și ajunge în C cu $v_1=gt$. Sensul pozitiv pentru s este în jos. În același timp mobilul din B (sens pozitiv în sus) parcurge $10-s=v_Bt-\dfrac{gt^2}{2}$ ajunge în C cu $v_2=v_B-gt\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}\,\text{s};\ s\approx\dfrac{5}{4}\,\text{m}$.

Obținem $v_1=5$ m/s; $v_2=15$ m/s.

Ciocnirea plastică:

$$\frac{G}{g}\,v_2-\frac{G}{g}\,v_1=\frac{2G}{g}\,v_1'$$

de unde $v_1'=5$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

Mobilele se vor urca cu h dat de $v_1' = \sqrt{2gh}$; $h = \frac{5}{4}$ m deci în A. Corpul compus din cele două bile sosește la sol în B cu

$v = \sqrt{2g \cdot 10} \approx 14$ m/s.

3. Cînd pendulul I ajunge la ciocnire cu II are v_1 dat de legea lucrului mecanic (fig. VII.3),

$$Gl(1 - \cos\alpha) = \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} \approx 2.$$

Ciocnirea :

$\frac{G}{g} \cdot 2 = \frac{G}{g}v_1' + \frac{G}{g}v_2'$ și $K = \frac{v_2' - v_1'}{v_1} \Rightarrow v_1' = 1 - K$; $v_2' = 1 + K$.

Imediat după ciocnire avem deci :

$T_1 = G + F_c'$; $T_2 = G + F_c''$

unde :

$$F_c' = \frac{G}{g}\frac{(1-K)^2}{l} \cong \frac{G}{4}\left(1 - K\right)^2 ; \quad F_c'' = \frac{G}{g}\frac{(1+K)^2}{l} \approx \frac{G}{4}\left(1 + K\right)^2.$$

Deci pentru diferite valori ale lui K, avem :

pentru $K = 0$: $T_1 = \frac{5G}{4}$; $T_2 = \frac{5G}{4}$.

pentru $K = 1$: $T_1 = G$; $T_2 = 2G$.

În mișcare, chiar înainte de ciocnire

$T_1 = G + \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{l} = 2G$ deci în urma ciocnirii scade imediat pînă la valori între G și $\frac{5G}{4}$.

T_2 înainte de ciocnire avea valoarea statică G, după ciocnire are valoarea crescută între $\frac{5G}{4}$ și $2G$. Deci ciocnirea produce o bruscă creștere de tensiune în firul II.

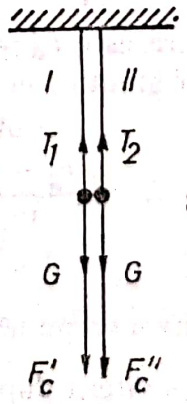


Fig. VII.3

Scanned with OKEN Scanner

4. Cînd $2G$ coboară cu s_1, G se urcă cu s_1, și capătă viteza v_1 din :

$$L = 2G\,s_1 - G\,s_1 = \frac{3G}{g}\,\frac{v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{g}{3}} \cong \sqrt{3}\ \text{m/s}$$

După oprirea lui $2G$, G mai urcă o distanță s_2 pînă la oprire

$$-Gs_2 = -\frac{G}{g}\,\frac{v_1^2}{2};\quad s_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{6}\ \text{m}.$$

De aici cade înapoi pe distanța $\frac{1}{6}$ m, și la întinderea firului are iarăși

$v_1 = \sqrt{\frac{g}{3}}$ m/s.

Acum antrenează pe $2G$ (ciocnire plastică) :

$$\frac{G}{g}\,v_1 + \frac{2G}{g}\cdot 0 = \frac{3G}{g}\,v_1' \Rightarrow v_1' = \frac{1}{3}\,v_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{g}{3}},$$

sistemul mai coboară apoi în direcția coborîrii lui G, un spațiu s_3 pînă la oprire

$$Gs_3 - 2Gs_3 = -\frac{3G}{g}\,\frac{v_1'^2}{2} \Rightarrow s_3 = \frac{1}{18}\ \text{m}.$$

După aceasta parcurge din nou (în sensul $2G$ coborînd) acești $\frac{1}{18}$ m cînd $2G$ iarăși rămîne plastic pe sol. În acel moment viteza sistemului este $v_2 = v_1'$. G urcă iarăși singur $s_4 = \frac{1}{54}$ m, apoi cade și capătă iarăși v_1' cu care-l antrenează pe $2G$ ș.a.m.d. Se vede că vitezele de antrenare ale lui $2G$ au valorile :

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{3}};\quad v_1' = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{g}{3}};\quad v_1'' = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{g}{3}}\ldots v_1^{(n)} = \frac{1}{3^n}\sqrt{\frac{g}{3}},$$

iar spațiile urcate de G

$$s_1 = \frac{1}{2};\quad s_2 = \frac{1}{6};\quad s_3 = \frac{1}{18};\quad s_4 = \frac{1}{54}\ldots s_n = \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}.$$

5. v_1 a corpului G pînă la ciocnire este $v_1 = \sqrt{2gh} = 10$ m/s. În momentul ciocnirii sistemul troliu, fire și greutăți era în repaus.

Ciocnirea

$$\frac{G}{g}\,v_1 = \frac{G}{g}\,v_1' + \frac{G}{g}\,v_2' + \frac{2G}{g}\,\frac{v_2'}{2};\quad K = \frac{v_2' - v_1'}{10} \Rightarrow v_1' = \frac{10\,(1-2K)}{3}$$

$$v_2' = \frac{10\,(1+K)}{3}.$$

Aci : v_1' este viteza după ciocnire a corpului liber v_2' — viteza după ciocnire a corpului G prins de fir ; $\frac{v_2'}{2}$ — viteza după ciocnire a corpului $2G$ prins de fir.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul $K \neq 0$. Sistemul se va mișca cu v_2' (greutatea G) și cu $\frac{v_2'}{2}$ corpul $2G$, mișcare uniformă. Tensiunile $\bar{T}_1$ și $\bar{T}_2$ vor fi în mișcare cele din statică $T_1 = G$; $T_2 = 2G$.

Cazul $K = 0$. Mișcarea este accelerată:

— firul din stînga: $T_2 = 2G + \frac{2G}{g}\frac{a}{2}$;

— firul din dreapta: $T_1 = 2G - \frac{2G}{g}a$ (corpul căzut e lipit de G).

Din ecuația momentelor în raport cu centrul roții: $T_1 = \frac{T_2}{2}$ deci $a = \frac{2g}{5}$;

$T_1 = \frac{6G}{5}$; $T_2 = \frac{12G}{5}$.

6. Cînd $3G$ se deplasează cu s, $2G$ se deplasează cu $\frac{s}{2}$ și are viteză $\frac{v}{2}$ față de v a lui $3G$. Legea lucrului mecanic:

$$3Gs - 2G\frac{s}{2} = \frac{3G}{g}\frac{v_2^2}{2} + \frac{2G}{2g}\frac{v_2^2}{4} \Rightarrow v_2 = \sqrt{23} \approx 5 \text{ m/s}.$$

Ciocnirea:

$$\frac{G}{g}6 + \frac{3G}{g}5 + \frac{2G}{g}\frac{5}{2} = \frac{G}{g}v_1' + \frac{3G}{g}v_2' + \frac{2G}{g}\frac{v_2'}{2}$$

$$K = \frac{v_2' - v_1'}{6-5} \Rightarrow v_1' = \frac{26 - 4K}{5};\ v_2'\frac{26 + K}{5}.$$

Tensiunile în fire sînt: $\bar{T}_1$ este tensiunea în firul care prinde pe $3G$; $\bar{T}_2$ — tensiunea în firul care prinde pe $2G$.

Înainte de ciocnire: $T_1 = 3G - \frac{3G}{g}a$; $T_2 = 2T_1 = 2G + \frac{2G}{g}\frac{a}{2}$

de unde $a = \frac{4}{7}g$; $T_1 = \frac{9}{7}G$; $T_2 = \frac{18}{7}G$.

După ciocnire: Pentru $K \neq 0$ vor fi aceleași tensiuni, iar pentru $K = 0$ găsim: $a = \frac{2}{3}g$; $T_1 = \frac{4}{3}G$; $T_2 = \frac{8}{3}G$.

7. a) $\frac{G}{g}\cdot 10 = \frac{G}{g}v_1' + 7\frac{G}{g}v_2'$; $K = \frac{v_2' - v_1'}{10} \Rightarrow v_2' = \frac{5}{4}(1 + K)$ deci $\frac{5}{4} \leqslant v_2' \leqslant \frac{5}{2}$ după cum $0 \leqslant K \leqslant 1$.

Din legea lucrului mecanic:

$3Gx - 4Gx = -\frac{7G}{g}\frac{v_2'^2}{2}$; $x = \frac{7}{2g}v_2'^2 = \frac{175}{32g}\left(1 + K\right)^2$. Dacă $K = 0$, viteza sistemului este constantă v_2', $(a = 0)$, presiunile pe fundul cutiilor: $N_1 = N_2 = G$.

Accelerația. Pentru $K \neq 0$. $T = 3G - \frac{3G}{g}a = 4G + \frac{4G}{g}a \Rightarrow = -\frac{g}{7}$.

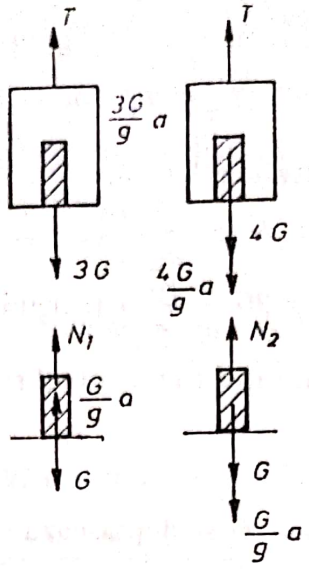


Fig. VII.7, *a*

Pentru corpul din :

Cutia I : $N_1 = G + \frac{G}{7} = \frac{8G}{7}$;

cutia II : $N_2 = G - \frac{G}{7} = \frac{6G}{7}$.

b) $\mu = \frac{3}{4}$. *Ciocnirea* : $\frac{G}{g} 10 = \frac{G}{g} v_1' + \frac{7G}{g} v_2'$; $K = \frac{v_2' - v_1'}{10}$

$v_2' = \frac{5}{4}\left(1 + K\right)$.

Mişcarea după ciocnire. Dacă $K \neq 0$: mişcare uniformă spre dreapta cu $v_2' = \frac{5}{4}\left(1 + K\right)$; presiune egală cu G numai pe fundul cutiilor. Dacă $K = 0$ mişcare întîrziată. Legea lucrului mecanic pînă la oprire (x = distanţa cu care se urcă cutia $2G$) :

$-\frac{3}{4} 5Gx - 3Gx = -\frac{8G}{2g} v_2'^2 \Rightarrow x = \frac{16}{27g} v_2'^2 = \frac{25}{27g} \approx 0{,}1$ m.

$T = 3G + \frac{3G}{g} a = -\frac{5G}{g} a - \frac{3}{4} 5G \Rightarrow a = \frac{27}{32} g$. În cutia $2G$; $N_1 = G -$

$- \frac{27}{32} G = \frac{5}{32} G$. În cutia $3G$ presiunea pe peretele din dreapta $N_2 =$

$= \frac{27}{32} G$ (pe fundul cutiei este evident $\bar{G}$).

c) $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ · După ciocnire avem : $v_2' = \frac{5}{4}(1 + K)$, iar din legea lucrului mecanic :

$$-3Gx - 4G \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2\sqrt{3}} x + \frac{4G}{2} x = -\frac{7G}{2g} \frac{25}{16} (1 + K)^2$$

de unde $x = \frac{7 \cdot 25}{64}(1 + K)^2$, ($x$ parcurs de cutia $2G$ în sus pînă la oprire);

$a = \frac{-2g}{7}$. În cutia $2G$: $N_1 = \frac{5}{7}G$; $N_2 = \frac{11}{14}G$ pe peretele din față al cutiei $3G$.

8. a) *Static:* $\mu = 5\ \text{tg}\alpha = 5\frac{\sqrt{3}}{3}$; T (forța din bară, static) = 40 N (compresiune). Ciocnirea se calculează ca și cum corpurile P_1, P_2 și bara ar forma un singur corp ciocnit de corpul G.

Ciocnirea: $\frac{G}{g}v_1 = \frac{P_1 + P_2 + G}{g}V \Rightarrow V = 5$ m/s.

După ciocnire, accelerația sistemului se calculează din proiecțiile forțelor pe direcția planului:

$$(P_1 + P_2 + G)\ \sin\alpha - \mu P_1\ \cos\alpha - \frac{P_1 + P_2 + G}{g}a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}g$$

$$T = P_2\ \sin\alpha + G\ \sin\alpha - \frac{P_2 + G}{g}a \Rightarrow T_{dinamic} = 45\text{ N (compresiune)}.$$

b) μ_{static} în cazurile:

(1), (3), (6), (8) $\mu = 5\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(2), (4), (5), (7) $\mu = \frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

T static: (1) (3) $T_{st} = 40$ N (compresiune) $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = 5\ \text{tg}\ \alpha$;

(2) (4) $T_{st} = 10$ N (compresiune) $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = 5\ \text{tg}\ \alpha$;

(5) (7) $T_{st} = 10$ N (tracțiune) $\mu_2 = \mu_4 = \mu_6 = \mu_8 = \frac{5}{4}\ \text{tg}\ \alpha$;

(6) (8) $T_{st} = 40$ N (tracțiune) $\mu_2 = \mu_4 = \mu_6 = \mu_8 = \frac{5}{4}\ \text{tg}\ \alpha$.

$V = 5$ m/s la toate figurile.

Accelerația $\bar{a}$: (1) (2) $a = \frac{g}{4}$;

(3) $a = -2g$;

(4) $a = -\frac{17}{16}g$;

(5) $a = -\frac{1}{16}g$;

(6) $a = -g$;

(7) (8) $a = -\frac{3}{4}g$.

T în mișcare: (1) (8) $T = 45$ N (compresiune);

(2) (7) $T = 30$ N (compresiune);

(3) (6) $T = 120$ N (tracțiune);

(4) $T = 11{,}25$ N (tracțiune);

(5) $T = 8{,}75$ N (tracțiune).

Scanned with OKEN Scanner

9. Mișcarea sistemului format din $3G$ și G:
(1) *cu firul între corpurile G neîntins.* Legea lucrului mecanic:

$$3Gl - \mu Gl = \frac{3G}{g}\frac{v_1^2}{2} + \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{2}.$$

deci: $v_1 = \sqrt{\frac{5gl}{4}} \approx 5$ m/s.

Antrenarea celui de-al doilea G este o ciocnire plastică.

$\frac{3G+G}{g} v_1 = \frac{3G+G+G}{g} v_1' \Rightarrow v_1' = 4$ m/s este viteza întregului sistem după ciocnire.

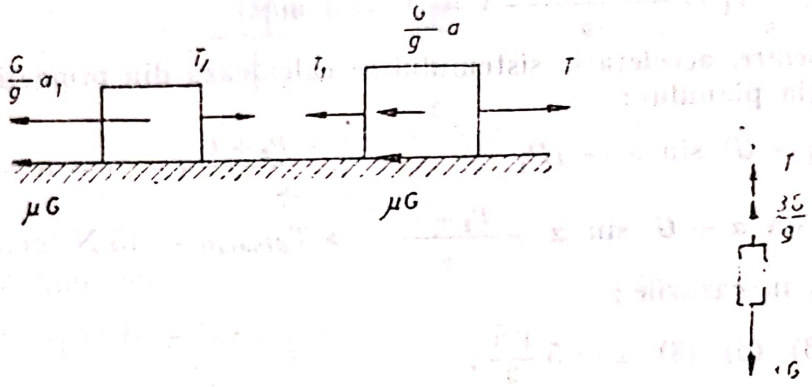


Fig. VII.9

Tensiunile în fire (fig. VII.9). Firul de care atîrnă $3G$ (înainte de întinderea firului între cele două corpuri G): $T = 3G = -\frac{3G}{g}a = \mu G + \frac{G}{g}a$, căci nu a apărut încă tensiunea T_1 între cele două corpuri din planul orizontal. Rezultă:

$$a = \frac{5g}{8};\ T_1 = \frac{9G}{8}.$$

(2) *După întinderea firului* apare T (în figură de la corpul G din stînga): $T_1 = \mu G + \frac{G}{g}a_1$, iar (de la corpul din dreapta) $T_1 = T - \frac{G}{g}a_1$.

Apoi din corpul $3G$ unde $T = 3G - \frac{3G}{g}a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{5}g$;

$$T_1 = \frac{9}{10}G;\ T = \frac{9}{5}G \text{ (mărime bruscă).}$$

10. Frecările sînt suficiente ca corpurile să fie în repaus pe plan, deci $\mu \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Mișcarea lui $3G$. Legea lucrului mecanic:

$$-3G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{1}{4} = \frac{3G}{g}\frac{v_1^2}{2} - \frac{3G}{8}\frac{49}{2},$$

deci: $-\frac{1}{4} = \frac{v_1^2}{20} - \frac{49}{20};\ v_1 = \sqrt{44} \approx 6{,}7.$

Scanned with OKEN Scanner

Întinderea firului între $3G$ *și* $2G$ (ciocnire plastică)

$$\frac{3G}{g} \cdot 6{,}7 = \frac{5G}{g} v_1' \Rightarrow v_1' \approx 4 \text{ m/s}.$$

Deplasarea corpurilor $3G$ *și* $2G$

$$-3G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{1}{4} - 2G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{1}{4} = \frac{5g}{g}\frac{V_1^2}{2} - \frac{5G}{g}\frac{16}{2} -$$

$$-\frac{5}{4} = \frac{5}{20}V_1^2 - \frac{5}{20}\cdot 16 \Rightarrow V_1^2 = 11\ ;\ V_1 \approx 3{,}3 \text{ m/s}.$$

Întinderea firului care leagă ultimul corp

$$\frac{5G}{g}\cdot 3{,}3 = \frac{6G}{g}v_2'\ ;\ v_2' = \frac{5}{6}\cdot 3{,}3 = 2{,}75 \text{ m/s}.$$

Deplasarea pînă la oprire a celor trei corpuri

$$-3G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)x - 2G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)x - G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)x =$$

$$= -\frac{6G}{g}\cdot\frac{2{,}75^2}{2} \Rightarrow x = 0{,}378 \text{ m}.$$

11. Înainte de ciocnire în încastrare este numai $Y_A = G$.

Ciocnirea :

$$\frac{2G}{g}\cdot 10 = \frac{2G}{g}v_1' + \frac{3G}{g}v_2'\ ;\ K = \frac{v_2' - v_1'}{10} \Rightarrow v_2' = 4(1+K).$$

Mișcarea corpului după ciocnire este întîrziată din cauza frecării.

Sistemul solidificat (fig. VII.11, *a'*) : $K \neq 0$:

$$-\mu\, 3G - \frac{3G}{g}a = 0 \Rightarrow a = -\mu g = -\frac{g}{2}.$$

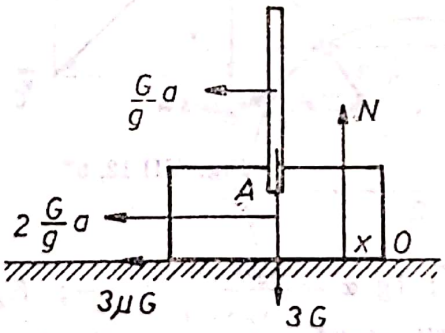


Fig. VII.11, *a'*

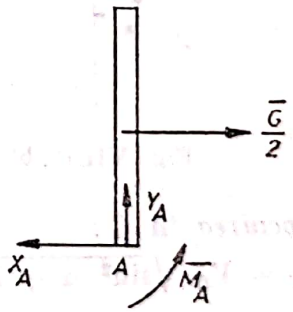


Fig. VII.11, *a''*

Bara (fig. VII.11, *a''*) : $X_A = \left|\frac{G}{g}a\right| = \frac{G}{2}$; $Y_A = G$; $M_A = \frac{G}{2}\frac{l}{2} = G\frac{l}{4}$.

Poziția lui $\bar{N}$ (reacțiunea solului) : $N = 3G$; $\Sigma M_0 = 0$:

$\frac{G}{2}\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) + G\frac{l}{4} - 3G\frac{l}{2} + Nx = 0$, unde x este distanța de la N la O, de unde $x = \frac{l}{4}$. Corpul are tendința de aplecare spre O.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $K = 0$. Avem aceeași $a = -\frac{g}{2}$, aceleași forțe la bară, dar pentru corpul solidificat $N = 4G$; $x = \frac{3l}{8}$. Corpul se apleacă mai puțin spre O.

12. a) *Ciocnirea în B*: $v_B = v_1\sqrt{\sin^2\alpha + K_1^2\cos^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{K_1 v_1 \cos\alpha}{v_1 \sin\alpha} = \frac{1}{3}$

$K_1 = \frac{1}{9}$.

Figurile VII.12, *a'* și VII.12, *a''* sînt pentru cazurile înainte de ciocnire și respectiv după ciocnire.

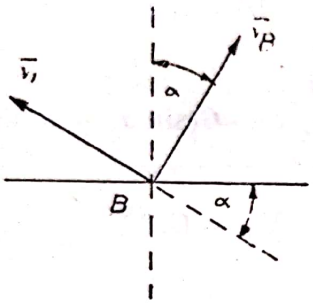


Fig. VII.12, *a'*

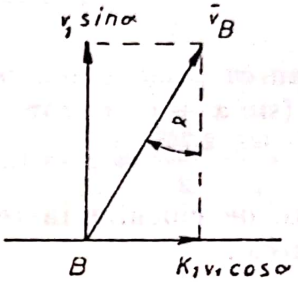


Fig. VII.12, *a''*

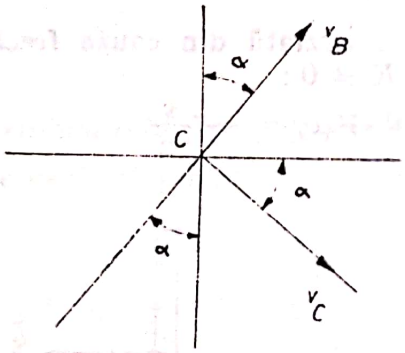


Fig. VII.12, *b'*

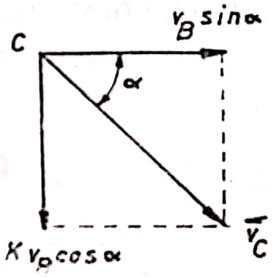


Fig. VII.12, *b''*

b) *Ciocnirea în C*:

$V_C = V_B\sqrt{\sin^2\alpha + K_2^2\cos^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{K_2 v_B \cos\alpha}{v_B \sin\alpha} = \frac{1}{3}$; $K_2 = \frac{1}{9}$.

Figurile VII.12, *b'* și VII.12, *b''* sînt pentru cazurile înainte de ciocnire și respectiv după ciocnire

Analog în D: $v_D = v_C\sqrt{\sin^2\alpha + K_3\cos^2\alpha}$; $K_3 = \frac{1}{9}$.

În A va sosi cu viteza v_D cu care pleacă din D.

Avem deci: $v_B = v_1\left(\sin^2\alpha + \frac{1}{81}\cos^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} = v_1\sqrt{\frac{1}{9}} = v_1 \cdot \frac{1}{3}$;

$v_C = v_1\left(\sin^2\alpha + \frac{1}{81}\cos^2\alpha\right)^{\frac{2}{2}} = v_1 \cdot \frac{1}{9} = v_1 \cdot \frac{1}{9}$;

$v_D = v_1\left(\sin^2\alpha + \frac{1}{81}\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}} = v_1\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = v_1 \cdot \frac{1}{27}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fenomenul continuă.

Generalizare. Problema este posibilă pentru $0 < x \leqslant \frac{l}{2}$ unde $x = PA$.

În acest caz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{l - x}$; $0 < \operatorname{tg} \alpha \leqslant 1$; $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ și $0 < K \leqslant 1$.

Pătratul $ABCD$ își schimbă poziția de la x puțin diferit de zero cînd $ABCD$ e puțin diferit de $PMNO$, la poziția unde A, B, C, D sînt la mijloacele laturilor $PMNO$ (v. figura din enunț).

13. $\bar{v}_B$ se descompune în $\bar{v}_r = \bar{v}_B \frac{\sqrt{3}}{2}$ pe rază și $\bar{v}_{tg} = \frac{v_B}{2}$ pe tangentă (fig. VII.13).

După ciocnire, pe rază este $K\bar{v}_r$. Pentru ca $\bar{v}_C$ să fie orizontal trebuie ca $\frac{v_{tg}}{Kv_r} = \operatorname{tg} 60 \Rightarrow K = \frac{1}{3}$, iar $v_C = 2\ K\bar{v}_r = \frac{v_B \sqrt{3}}{3}$.

Procedînd analog în C, avem $v'_r = \frac{v_B \sqrt{3}}{6}$; $v'_{tg} = \frac{v_B}{2}$, deci $Kv'_r = \frac{v_B \sqrt{3}}{18}$.

Unghiul α sub care va porni din C este dat de $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v'_{tg}}{Kv'_r} = \frac{\frac{v_B}{2}}{\frac{v_B \sqrt{3}}{18}} =$

$= 3 \cdot \sqrt{3}$; $\alpha \approx 79°5'$.

Pentru ca mobilul să treacă prin D ar trebui ca ciocnirea să fie perfect elastică $K = 1$.

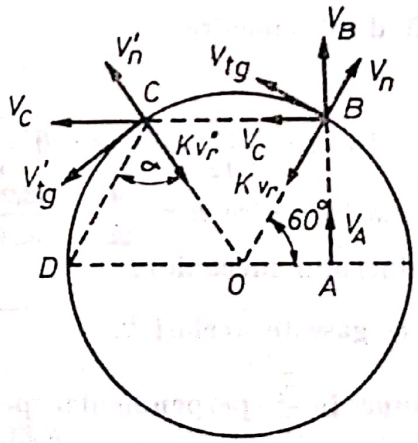


Fig. VII.13

14. Avem: $mv_1 b = mv'_1 b + M \frac{l^2}{3} \omega'$ și $K = \frac{b\omega' - v_1}{v_1}$,

unde ω' și v'_1 sînt vitezele barei respectiv punctului după ciocnire.

Din legea lucrului mecanic aplicată imediat după ciocnire

$-Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = -\frac{M l^2}{3} \frac{\omega'^2}{2} \Rightarrow \omega'^2 = \frac{0{,}15\ g}{2}$ deci $\omega' = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8$.

Scanned with OKEN Scanner

De aci $0{,}8\ b^2 - 6b + 3{,}2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3 + 2{,}2}{0{,}8}$, cum $l = 2$, trebuie ca $b = \frac{3 - 2{,}2}{0{,}8} = 1$ pentru ca problema să fie posibilă.

$v_1' = -0{,}8$ m/s. $\omega' = 1{,}2$ rad/s.

15. Înainte de ciocnire $T_1 = \frac{G}{2}$. Viteza unghiulară a barei în momentul ciocnirii este dată de legea lucrului mecanic

$$G\frac{l}{4} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}.$$

Ciocnirea : $\frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\omega' + \frac{G}{2g}v'\frac{l}{2}$, $K = \frac{v' - \frac{l}{2}\omega'}{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{l}{2}}} =$

$= \frac{1}{2}$; se obține $v' = \frac{3\sqrt{6\,gl}}{11}$, iar $T_2 = \frac{G}{2} + F_c = \frac{G}{2} + \frac{G}{2g}\frac{54g}{121}\frac{l}{l} \approx 0{,}22\,G$.

16. Legea conservării momentului cinetic :

$\frac{l}{4}\frac{G}{2g}\cdot 2 = \frac{G}{2g}v_1'\frac{l}{4} + I_A\,\omega_2'$; $K = \frac{\frac{l}{4}\omega_2' - v_1'}{2} = \frac{1}{2}$, de unde $\omega_2' = \frac{36}{11} \approx$

$\approx 3{,}22$ rad/s.

$M_{fr} = \mu_A\,F_A\,r_A = 0{,}1\cdot 50\cdot\frac{1}{100} = 0{,}05$; $M_{fr} + I_A\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = -0.12$ rad/s^2.

În mișcarea întîrziată după ciocnire

$\omega_{final} = 0$;

$\omega_{inițial} = \omega_2' = 3{,}22$.

Deci : $0 = 3{,}22 - 0{,}12\,t \Rightarrow t = \frac{3{,}22}{0{,}12} \approx 27$ s ; $0 = \omega_2'\,t + \frac{\varepsilon\,t^2}{2} = 43.20$.

Numărul de rotații pînă la oprire $n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{43{,}20}{6{,}28} \approx 7$ rot.

Verificare (prin legea lucrului mecanic) :

$-M_{fr}\,\theta = -I_A\frac{\omega_2'^2}{2}$ se găsește același θ.

17. Viteza $\bar{v}_1$ se descompune în $\frac{\bar{v}_1}{2}$ perpendicular pe bară și $\bar{v}_1\frac{\sqrt{3}}{2}$ paralel cu bara. Numai $\frac{\bar{v}_1}{2} = 2$ m/s este influențat de ciocnire.

Legea conservării momentului cinetic :

$l\frac{M}{3}\cdot 2 = l\frac{M}{3}v_1' + \frac{M}{3}l^2\,\omega_2'$; $K = 1 = \frac{l\omega_2' - v_1'}{2} \Rightarrow v_1' = 0$; $\omega_2' = 4$ rad/s.

După ciocnire. Mobilul m are viteza $\frac{v_1\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ m/s (verticală în jos). Căderea pe verticală pe distanța $l = \frac{1}{2}$ m. La sol are viteza v_2.

$v_2^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2gl \approx 22 \Rightarrow v_2 = \sqrt{22} \approx 4{,}7$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

Bara. Din legea lucrului mecanic aplicată la rotație:

$$-Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=-\frac{M l^2}{3}\frac{\omega_2'^2}{2}\Rightarrow\cos\theta=\frac{11}{15};\quad\theta=42°50'.$$

18. a) $I_A=\frac{G}{g}\frac{l^2}{12}+\frac{G}{g}\frac{l^2}{3}+\frac{G}{g}l^2=\frac{17}{12}\frac{G}{g}l^2$ (fig. VII.18, *a*).

Conservarea momentului cinetic:

$$\frac{G}{g}v_1\frac{l}{2}=\frac{G}{g}v_1'\frac{l}{2}+\frac{17}{12}\frac{G}{g}l^2\omega_2'.$$

Dar $K=0:\frac{l}{2}\omega_2'=v_1'$, deci: $v_1'=\frac{3}{20}v_1=\frac{3}{2}$ m/s $=\frac{l}{2}\omega_2'=\frac{3}{2}\omega_2'$;

deci $\omega_2'=1$ rad/s.

Legea lucrului mecanic, unde: $I_A=\frac{17}{12}\frac{G}{g}l^2+\frac{G}{g}\frac{l^2}{4}=\frac{5}{3}\frac{G}{g}l^2$,

I_A fiind momentul de inerție al corpului compus din cele două bare în raport cu A,

$$-2G\frac{l}{2}(1-\cos\theta)-Gl(1-\cos\theta)=-\frac{5}{3}\frac{G}{g}l^2\cdot\frac{1}{2}$$

de unde:

$$\cos\theta=1-\frac{5}{12}\frac{l}{g}=\frac{7}{8}=0{,}875;\quad\theta\approx29°.$$

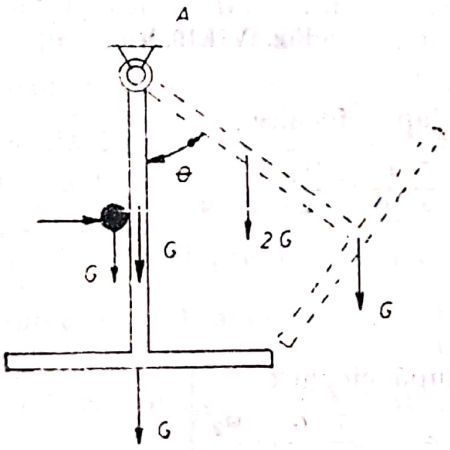


Fig. VII.18, *a*

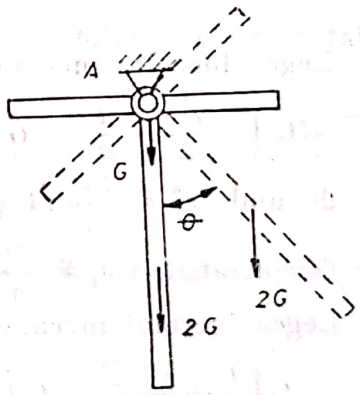


Fig. VII.18, *b*

b) Aici $I_A=\frac{5}{12}\frac{G}{g}l^2$ (fig. VII.18, *b*). Conservarea momentului cinetic dă: $v_1'=\frac{15}{4}$, iar legea lucrului mecanic: $-2G\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=$

$$=-\frac{2}{3}\frac{G}{g}l^2\frac{\omega_2'^2}{2};$$

de unde: $\omega_2'=\frac{5}{2}$ rad/s. Deci $\cos\theta\approx\frac{3}{8}=0{,}375;\ \theta\approx67°$.

Scanned with OKEN Scanner

19. a) Înainte de ciocnire: $I_A = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}$. După ciocnire: $I'_A = \frac{7}{9}\frac{G}{g}l^2$.

Conservarea momentului cinetic:

$$\frac{G}{g}\frac{l}{3}v_1 = \frac{G}{g}\frac{l}{3}v'_1 + \frac{2G}{3}\frac{l^2}{3}\omega'_2,$$

unde $v'_1 = \frac{l}{3}\omega'_2 \Rightarrow \omega'_2 = \frac{3}{7l}v_1$.

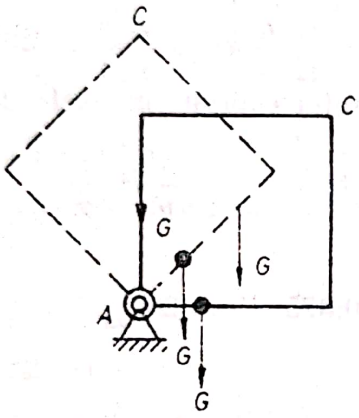


Fig. VII.19, *a*

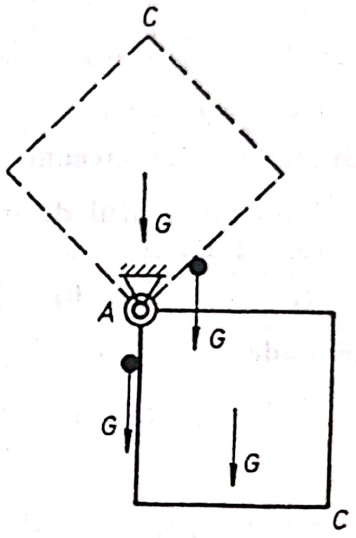


Fig. VII.19, *b*

Legea lucrului mecanic aplicată după ciocnire:

$$-G\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{l}{2}\right) - G\frac{l}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{7}{9}\frac{G}{g}l^2\frac{\omega'^2_2}{2},$$

de unde $v_1^2 = \frac{7gl}{3}(4\sqrt{2} - 3)$.

b) Găsim analog $v_1 = \frac{7l}{3}\omega'_2$.

Legea lucrului mecanic imediat după ciocnire

$$-G\left(\frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) - G\left(\frac{l}{3} + \frac{l}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{7}{9}\frac{G}{g}l^2\frac{\omega'^2_2}{2};$$

$$v_1^2 = \frac{7gl}{3}(5 + 4\sqrt{2}).$$

20. Viteza bilei în B: $v_B = \sqrt{2gR}$. Conservarea momentului cinetic

$$R\frac{G}{2g}\sqrt{2gR} = R\frac{G}{2g}v'_1 + I_A\omega' \text{ unde } I_A = \frac{3}{2}\frac{G}{g}R^2;\ K = \frac{R\omega' - v'_1}{\sqrt{2gR}}$$

$$\omega' = \frac{\sqrt{2gR}}{4R}(1 + K);\ v'_1 = \sqrt{2gR}\,\frac{1 - 3K}{4}.$$

a) Ciocnire perfect elastică

$$\omega' = \frac{\sqrt{2gR}}{2R};\ v'_1 = -\frac{\sqrt{2gR}}{2};$$

bila se întoarce înapoi.

b) $K = \frac{1}{3}$; $\omega' = \frac{\sqrt{2gR}}{3R}$; $v_1' = 0$; bila se oprește momentan.

Concluzie. Pentru $K > \frac{1}{3}$ bila se întoarce înapoi după ciocnire.

Discul. Din legea lucrului mecanic: $-GR\,(1 - \cos\theta) =$

$= -\frac{3}{2}\frac{G}{g} = R^2\frac{\omega'^2}{2}$.

a) $K = 1$; $\cos\theta = \frac{5}{8}$; $\theta \approx 51°20'$.

b) $K = \frac{1}{3}$; $\cos\theta = \frac{5}{6}$; $\theta \approx 33°35'$.

Bila: a) *Ciocnire perfect elastică.* Bila se ridică la înălțimea h dată de $v_1' = \sqrt{2gh}$; $h = \frac{v_1'}{2g} = \frac{R}{2}$.

b) $K = \frac{1}{3}$ bila stă momentan pe loc apoi cade pe verticală cu viteza inițială zero și accelerația $\bar{g}$.

21. *Conservarea momentului cinetic* (proiecții pe rază)

$$\begin{cases} \frac{G}{g} v_1 \cos\alpha\, R \sin\alpha = \frac{G}{g} v_1'\, R \sin\alpha + 2\frac{G}{g} R^2 \omega' \\ K = \frac{\omega' R \sin\alpha - v_1'}{v_1 \cos\alpha} \end{cases}$$

unde $\bar{v}_1'$ este viteza după ciocnire pe rază presupusă în sens pozitiv; cea pe tangentă rămîne $v_1 \sin\alpha$.

Găsim $v_1' = v_1 \cos\alpha \frac{\sin^2\alpha - 2K}{\sin^2\alpha + 2}$. Pentru v_1' negativ și viteza totală orizontală trebuie ca $2K > \sin^2\alpha$, deci

$\frac{2K - \sin^2\alpha}{2 + \sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$, de unde $(3 + 2K)\sin^2\alpha = 2K \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{2K}{3 + 2K}}$,

Pentru $K = 0$ problema nu e posibilă.

Pentru $K = 1$ avem $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ și condiția $2K > \sin^2\alpha$ e îndeplinită.

Avem $v_1' = v_1\sqrt{\frac{3}{5}\frac{2}{3}}$. Viteza orizontală este

$v_0 = \sqrt{v_1^2 \sin^2\alpha + v_1'^2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ m/s.

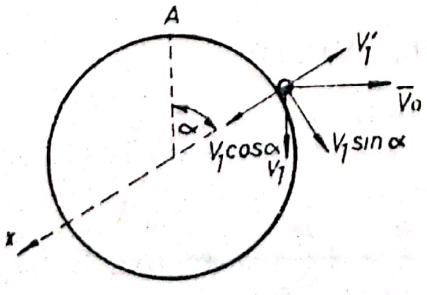


Fig. VII.21

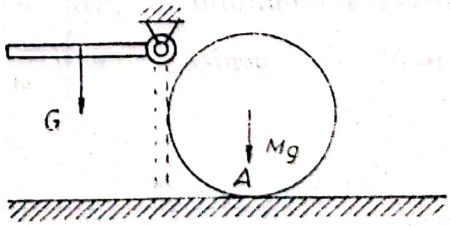


Fig. VII.22

22. Forța de frecare fiind neglijabilă în timpul ciocnirii, putem presupune sfera ca un corp în translație deci se poate aplica legea conservării momentului cinetic (fig. VII.22).

Bara în poziție verticală $\overline{\omega}$ dat de legea lucrului mecanic $G\frac{l}{2} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \approx 4$ rad/s.

Conservarea momentului cinetic:

$$\frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\omega = \frac{G}{g}\frac{l^2}{2}\omega' + \frac{G}{g}v_1'\frac{l}{2} \text{ și } K = \frac{\frac{l}{2}\omega' - v_1'}{-\frac{l}{2}\omega} \text{ cu } K = \frac{3}{4}, l = 2, \text{ avem}$$

$v_1' = 4$; $\omega' = 1$ (viteza unghiulară a barei după ciocnire).

Mișcarea sferei după ciocnire. La început lunecă, $F_f = \mu N$ deci $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g = -2{,}5$. Din $F_f \cdot R - Ns = I_0\varepsilon$ unde $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$, $N = Mg$ avem $\varepsilon = \frac{15}{4} \cong 4$ rad/s^2. După un timp t:

$v_G = v_1' - \mu g t = 4 - 2{,}5\ t$; $x = 4t - 1{,}25\ t^2$; $v^2 = 16 - 5x$

$\omega = \varepsilon t = 4t$; $\theta = 2t^2$; $\omega^2 = 8\theta$.

Cînd t crește, viteza v_G a centrului de greutate scade, iar ω crește. Cînd $v_G - R\omega = 0$ nu mai este alunecare, deci:

$$v_G = 4 - 2{,}5\ t = \omega R = 4 \cdot Rt \Rightarrow t = \frac{4}{6{,}5} = 0{,}6 \text{ s};$$

deci: $x = 4 \cdot 0{,}6 - 1{,}25 \cdot 0{,}6^2 = 1{,}95$ m și $v_G = 2{,}5$ m/s;

$$\theta = 2t^2 = 0{,}72 \text{ rad și } \omega = 2{,}5 \text{ rad/s},$$

$v_G = 2{,}5$ și $\omega = 2{,}5$ fiind vitezele la sfîrșitul patinării.

De aici înainte este rostogolire simplă în jurul punctului A de contact cu solul. Avem: $I_A = \frac{7}{5}\frac{G}{g}R^2$.

Din legea lucrului mecanic pînă la oprire $-Gs\ \theta_1 = -\frac{7}{5}\frac{G}{g}R^2 \cdot \frac{\omega^2}{2}$ sau $\theta_1 = \frac{7}{5g}\frac{R^2}{s}\frac{\omega^2}{2}$ unde $s = \frac{R}{10}$;

$\omega = 2{,}5$; $\theta_1 \approx 4{,}4$ rad și $x_1 = R\theta_1 = 4{,}4$ m. În total roata a înaintat $x + x_1 = 1{,}95 + 4{,}4 = 6{,}35$ m.

23. Mișcarea mobilului P_1 prins de resort (fig. VII.23):

Înainte de ciocnire: $\omega = \sqrt{\frac{Kc}{m}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$.

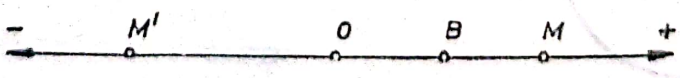


Fig. VII.23

Ecuația mișcării : $x = 6 \cos t$.

În timpul $t = \frac{5\pi}{3}$ s mobilul P_1 a parcurs $MOM'OB$

$x = OB = 6 \cos \frac{5\pi}{3} = 3$, iar $v_1 = -6 \sin t = +3\sqrt{3}$.

Ciocnirea : în B unde $v_2 = 6\sqrt{3}$; $v_1 = 3\sqrt{3}$.

Conservarea impulsului $2m \cdot 6\sqrt{3} + m3\sqrt{3} = 2mv_2' + mv_1'$

$K_r = \frac{1}{2} = \frac{v_2' - v_1'}{-6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}} \Rightarrow v_2' = \frac{9}{2}\sqrt{3}$; $v_1' = 6\sqrt{3}$.

După ciocnire : $x = 3$, $v = 6\sqrt{3}$.

Ecuația mișcării : $x = A' \cos (t + \varphi)$; la $t = \frac{5\pi}{3}$ avem $x = 3$, $v = 6\sqrt{3}$,

sau $3 = A' \cos \left(\frac{5\pi}{3} + \varphi\right)$; $6\sqrt{3} = -A' \sin \left(\frac{5\pi}{3} + \varphi\right)$;

de unde : $A' = \sqrt{117} \approx 10{,}8$; $\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{3} + \varphi\right) = -2\sqrt{3}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{7}$; $\varphi \approx$

$\approx 13^\circ = \frac{13}{180}$ rad ; deci ecuația mișcării după ciocnire este $x =$

$= 10{,}8 \cos \left(t + \frac{13}{180}\right)$.

24. Pînă la prima ciocnire bila stă nemișcată $s_b = 0$, $v_b = 0$, iar cutia se deplasează cu $v_b = v_0$ pe spațiul $s_c = 2l = v_0 t_1$ în timpul $t_1 = \frac{2l}{v_0}$ (fig. VII.24).

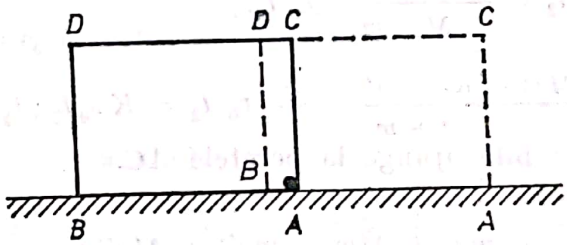


Fig. VII.24

Prima ciocnire : peretele BD ajunge la bilă.

Ciocnirea : $Mv_0 = mv_b' + Mv_c'$, (1)

unde v_b' și v_c' sînt respectiv viteza bilei și a cutiei după ciocnire ;

$$K = 1 = \frac{v_c' - v_b'}{-v_0}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) avem :

$v_b' = \frac{2M}{M+m} v_0$; $v_c' = v_b' - v_0 = \frac{M-m}{M+m} v_0$; $v_c' < v_b'$.

Spațiul parcurs după prima ciocnire :

Bila : $s_b' = v_b' t_2 = \frac{2M}{M+m} v_0 t_2$.

Cutia : $s'_c = v'_c\ t_2 = \frac{M-m}{M+m}\ v_0\ t_2\ ;\ s'_b > s'_c$.

Deci : $s'_b - s'_c = 2l = \frac{2Mv_0}{M+m}\ t_2 - \frac{M-m}{M+m}\ v_0\ t_2 = v_0\ t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{2l}{v_0} = t_1$.

A doua ciocnire : bila ajunge la peretele AC.
Ciocnirea : $mv'_b + Mv'_c = mv''_b + Mv''_c$

(unde v''_b, v''_c sînt vitezele după a 2-a ciocnire). $K = 1 = \frac{v''_c - v''_b}{v'_b - v'_c}$.

De unde $v''_c = v_0$; $v''_b = 0$ (cazul de la $t = 0$) deci *mișcarea se repetă*.

25. *Cazul unei ciocniri cu K dat.* Pînă la prima ciocnire bila este nemișcată : $s_b = 0$, $v_b = 0$, iar cutia se deplasează cu $v_c = v_0$ pe spațiul $s_c = 2l = v_0 t_1$ deci $t_1 = \frac{2l}{v_0}$.

Prima ciocnire : peretele BD ajunge la bilă.
Ciocnirea : $Mv_0 = mv'_b + Mv'_c$;

$$K = -\frac{v'_c - v'_b}{-v_0}.$$

De aci :

$v'_b = \frac{M(1+K)}{M+m}\ v_0$; $v'_c = \frac{(M-mK)}{M+m}\ v_0$; $v'_b > v'_c$.

Spațiul parcurs după prima ciocnire :

Bila : $s'_b = v'_b t_2 = \frac{M(1+K)}{M+m}\ v_0\ t_2$.

Cutia : $s'_c = v'_c\ t_2 = \frac{(M+mK)}{M+m}\ v_0\ t_2$.

Deci

$s'_b - s'_c = 2l = \frac{M(1+K) - (M-mK)}{M+m}\ v_0\ t_2 = K v_0 t_2\ ;\ t_2 = \frac{2l}{Kv_0} = \frac{t_1}{K}$.

A doua ciocnire : bila ajunge la peretele AC.
Ciocnirea :

$$mv'_b + Mv'_c = mv''_b + Mv''_c\ ;$$

$$K = \frac{v''_c - v''_b}{v'_b - v'_c}.$$

De unde :

$$v''_b = \frac{M\ (1-K^2)}{M+m}\ v_0\ ;\ v''_c = \frac{M+K^2\ m}{M+m}\ v_0\ ;\ v''_b < v''_c.$$

Spațiul parcurs după a II-a ciocnire (peretele BD ajunge la bilă) :

$$s''_b = \frac{M\ (1-K^2)}{M+m}\ v_0\ t_3\ ;\ s''_c = \frac{M+K^2\ m}{M+m}\ v_0\ t_3.$$

Deci :

$$2l = s''_c - s''_b = K^2\ v_0\ t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{2l}{K^2\ v_0} = \frac{t_1}{K^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

A treia ciocnire :

$$mv_b'' + Mv_c'' = mv_b^{III} + Mv_c^{III};$$

$$K = \frac{v_b^{III} - v_c^{III}}{v_c'' - v_b''}.$$

De unde :

$$v_b^{III} = \frac{M\,(1 + K^3)}{M + m}\,v_0\,;\; v_c^{III} = \frac{M - mK^3}{M + m}\,v_0\,;\; v_b^{III} > v_c^{III}.$$

Spaţiul după a III-a ciocnire :

$$s_b^{III} - s_c^{III} = 2l = v_b^{III}\,t_4 - v_c^{III}\,t_4 = K^3\,v_0\,t_4 \Rightarrow t_4 = \frac{t_1}{K^3}.$$

În general : $v_b^{(2n)} = \frac{M\,(1 - K^{2n})}{M + m}\,v_0\,;\; v_b^{(2n+1)} = \frac{M\,(1 + K^{2n+1})}{M + m}\,v_0\,;$

$$v_c^{(2n)} = \frac{M + mK^{2n}}{M + m}\,v_0\,;\; v_c^{(2n+1)} = \frac{M - mK^{2n+1}}{M + m}\,v_0\,;$$

$$t_n = \frac{t_1}{K^{n-1}} = \frac{2l}{v_0 K^{n-1}}\,;\; s_b^{(n)} - s_c^{(n)} = K^n\,v_0\,t_4 = 2l.$$

26. Înainte de prima ciocnire cutia parcurge un spaţiu

$$s_c = v_0\,t_1 + \frac{gt_1^2}{2},$$

iar bila $s_b = \frac{gt_1^2}{2}$ în timpul t_1 ;

$s_c - s_b = 2l = v_0\,t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2l}{v_0}$; $v_c = v_0 + gt_1 = v_0 + \frac{2gl}{v_0}$; $v_b = gt_1 = \frac{2gl}{v_0}$.

Prima ciocnire : cu tavanul.

$$Mv_c + mv_b = Mv_c' + mv_b' \text{ şi } K = \frac{v_b' - v_c'}{v_c - v_b}.$$

De unde : $v_b' = \frac{Mv_0}{M + m}\,(1 + K) + \frac{2gl}{v_0}$; $v_c' = \frac{M - Km}{M + m}\,v_0 + \frac{2gl}{v_0}$; $v_c' < v_b'$.

După prima ciocnire pînă la cea de-a 2-a, spaţiile sînt :

$$s_b' = v_b'\,t_2 + \frac{gt_2^2}{2}\,;\; s_c' = v_c'\,t_2 + \frac{gt_2^2}{2}.$$

Deci $s_b' - s_c' = 2l = (v_b' - v_c')\,t_2 = Kv_0\,t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{2l}{Kv_0} = \frac{t_1}{K}$.

A doua ciocnire : cu podeaua.
Vitezele în momentul ciocnirii sînt :

$$V_b' = v_b' + gt_2 = \frac{Mv_0}{M + m}\,(1 + K) + \frac{2gl}{v_0}\,\frac{1 + K}{K}\,;$$

$$V_c' = v_c' + gt_2 = \frac{M - Km}{M + m}\,v_0 + \frac{2gl}{v_0}\,\frac{1 + K}{K}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ciocnirea :

$$mV_b' + MV_c' = mv_b'' + Mv_c'' \text{ și } K\,(V_b' - V_c') = v_c'' - v_b''.$$

$$v_b'' = \frac{M\,(1-K^2)}{M+m}\,v_0 + \frac{2gl}{v_0}\frac{(1+K)}{K};\quad v_c'' = \frac{M+mK^2}{M+m}\,v_0 + \frac{2gl}{v_0}\frac{(1+K)}{K};\quad v_c'' > v_b''.$$

De aci spațiile parcurse după a doua ciocnire :

$$s_c'' = v_c''\,t_3 + \frac{gt_3^2}{2};\quad s_b'' = v_b''\,t_3 + \frac{gt_3^2}{2};\quad \text{și } s_c'' - s_b'' = (v_c'' - v_b'')\,t_3 = K^2\,t_3.$$

Deci : $t_3 = \frac{2l}{K^2 v_0} = \frac{t_1}{K^2}$ · Se continuă în același mod.

27. *Bila* (fig. VII.27, *a'*). Fie v viteza cu care sosește în O la acoperiș $-F = m\frac{dv}{dt}$.

$$\text{sau } -\int_0^t F\,dt = \int_{v\cos\alpha}^{v'} m\,dv,$$

unde v' este viteza după ciocnire pe direcția Ox presupusă $v' > 0$; deci :

$$-\int_0^t F\,dt = mv' - mv\cos\alpha. \qquad (1)$$

Vagonul (fig. VII.27, *a''*) (fie $\bar{F}_1$ forța dată de pământ din cauza ciocnirii).

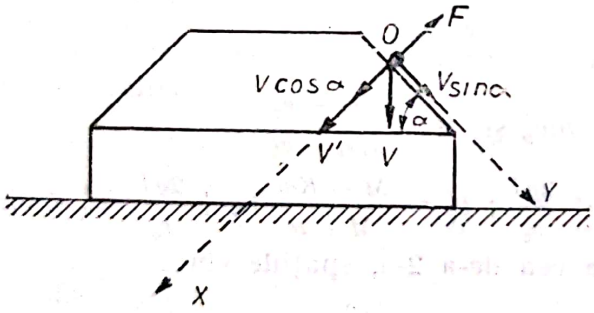


Fig. VII.27, *a'*

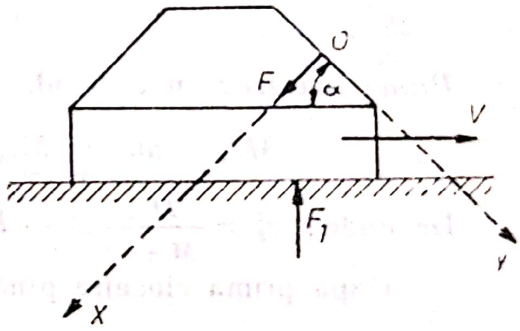


Fig. VII.27, *a''*

Pe Ox :

$$F - F_1\cos\alpha = M\frac{dv}{dt} \text{ deci } \int_0^t F\,dt - \int_0^t F_1\cos\alpha\,dt = \int_{+V\sin\alpha}^{0} M\,dv =$$

$$= -MV\sin\alpha.$$

Pe Ov :

$$-\int_0^t F_1\sin\alpha\,dt = \int_{V\cos\alpha}^{0} M\,dv = -MV\cos\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă deci:

$$\int_0^t F\,dt = MV\sin\alpha + \cos\alpha \int_0^t F_1\,dt = MV\sin\alpha + \frac{MV\cos^2\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

și ecuația (1).
Din ecuațiile (1) și (2) se obține:

$$v' = v\cos\alpha - \frac{MV}{m\sin\alpha};\quad K = \frac{0 - v'}{v\cos\alpha + V\sin\alpha},$$

de unde:

$$v' = \frac{2V(M - Km\sin^2\alpha)}{m(1+K)\sin 2\alpha} = \sqrt{2gh} \text{ sau } h = \frac{2V^2(M - Km\sin^2\alpha)^2}{m^2g(1+K)^2\sin^2 2\alpha};$$

$$v' = \frac{-KV(M + m\sin^2\alpha)}{m(1+K)\sin\alpha}.$$

Caz particular (I): $M = 2m,\ K = 0;\ h = \frac{8V^2}{g\sin^2 2\alpha}$;

h este minim cînd $\alpha = \frac{\pi}{4}$; atunci $v = 4V$ și $v' = 0$. După ciocnire bila lunecă cu $v\sin\alpha$ pe acoperișul vagonului.

Caz particular (II): $M = 2\,m;\ K = 1;\ v = \frac{V(2 - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}$;

$$v' = \frac{-V(2 + \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha};$$

pentru $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = 3V;\ v' = -5V.$

$$v'_{total} = \sqrt{v'^2 + v^2\sin^2\alpha} = \frac{V}{\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^6\alpha - 3\sin^4\alpha + 8\sin^2\alpha + 4}$$

pentru $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v'_{total} = V\sqrt{34}$ care face $\hat{\theta}$ cu acoperișul

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{5}{3};\ \theta \approx 59°5',$$

deci 14°5′ cu orizontala.
Bila după ciocnire va începe o mișcare parabolică.

Capitolul VIII

PARABOLA

1. Mobilul are ca viteză inițială viteza orizontală $\vec{v}_b$ a balonului (fig. VIII.1). La sol viteza pe orizontală e aceeași, iar cea pe verticală $v_y = gt \approx$ ≈ 40 m/s. Rezultanta lor face $\sphericalangle 30°$ cu orizontala, deci $\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} 30° \Rightarrow$

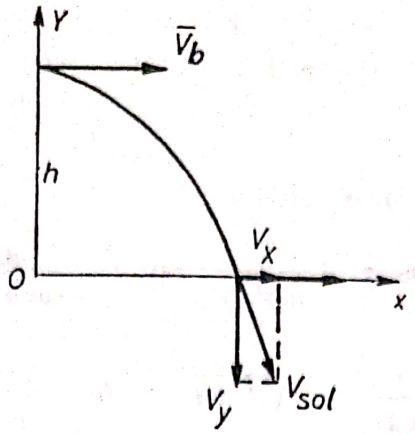


Fig. VIII.1

$\Rightarrow v_x = v_b = 40\sqrt{3}$ m/s. Din legea spațiului $h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow h = 80$ m, iar $x = v_b t = 160\sqrt{3}$ m.

2. Aci $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{17} \approx 3$ s.

La sol componenta vitezei pe Oy este $v_y = v_0 + gt = 40$ m/s deci $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_b}{v_y} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$; iar $x = v_b t = 20 \cdot 3 = 60$ m.

3. După timpul t mobilul A a parcurs spațiul parabolic (fig. VIII.3): $x = 10\ t = 10 = AB$; $y = \frac{gt^2}{2} = BC$, iar mobilul B a parcurs $y = \frac{gt^2}{2} = BC$; deci ambele mobile sînt după același t în C, deci se ciocnesc. Din ecuațiile de mai sus avem $t = 1\ s$, $y = BC = 5$ m.
Viteza lui A în momentul ciocnirii: $v_x = v_0 = 10$ m/s;

$$v_y = gt = 10 \text{ m/s},$$

deci $v_A = v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\sqrt{2}$ m/s făcînd 45° cu orizontala.

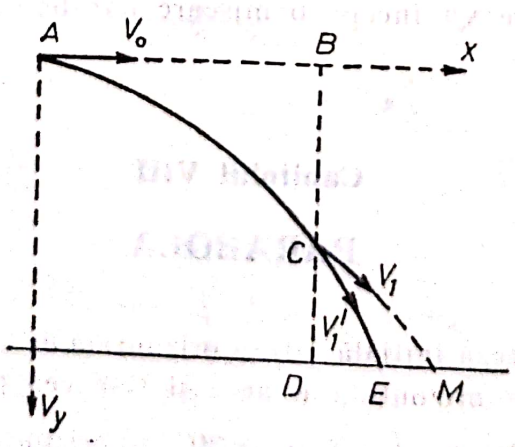


Fig. VIII.3

Viteza lui B în momentul ciocnirii: $v_2 = gt = 10$ m/s pe verticală. Ciocnirea numai pe Ox căci pe Oy ambele viteze ale punctelor A și B sînt egale.

(I) *Ciocnire plastică:*

$\frac{G}{g} \cdot 10 = \frac{G}{g} v_1' + \frac{G}{g} v_1' \Rightarrow v_1' = 5$ m/s = viteza corpurilor după ciocnire pe orizontală.

Mobilul format din cele două mobile are $v_x = 5$ m/s, $v_y = 10$ m/s deci traectoria sa va fi dată de:

Avem $x = 5t$; $y = 10t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = (\sqrt{2} - 1)$ s iar

$x = 5(\sqrt{2} - 1) = 2$ m $= DE$. Dacă nu era ciocnire, mobilul A sosea în M; $DM = 10(\sqrt{2} - 1) \approx 4$ m.

(II) *Pentru ciocnirea perfect elastică.* Conservarea impulsului:

$$\frac{G}{g} \cdot 10 = \frac{G}{g} v_1' + \frac{G}{g} v_2' \text{ și } K = 1 = \frac{v_2' - v_1'}{10}.$$

Deci $v_1' = 0$; $v_2' = 10$.

După ciocnire mobilul A cade pe verticală căpătînd la sol $v_o = gt = 10$, iar mobilul B are mișcare parabolică cu viteze inițiale în C;

$$v_x = 10; \quad v_y = 10.$$

Mobilul A cade în D, iar mobilul B cade la $DE = 10(\sqrt{2} - 1)$ m. La ciocnirea perfect elastică mobilul B continuă parabola începută de A, iar mobilul A continuă verticala începută de B.

(III) *Pentru* $0 < K < 1$. Găsim: $v_1' = 5(1 - K)$ (mobil A) și $v_2' = 5(1 - K)$ (mobil B) (v_1' și v_2' pe O_x), iar pe O_y ambele mobile au $v_y = 10$ m/s.

$$\begin{cases} x = 5(1 - K)t \\ 5 = 10t + \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} - 1; \quad t = \sqrt{2} - 1 \\ x_A = 5(1 - K)(\sqrt{2} - 1); \quad x_B = 5(1 + K)(\sqrt{2} - 1). \end{cases}$$

Mobilele ajung amîndouă în același timp la sol la distanță $10K(\sqrt{2} - 1)$ unul de altul.

4 Mișcare parabolică BD a corpului $3G$: $x = 6 = v_0 \cos 60\, t$; $y = 20 = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{gt^2}{2}$, de unde $t = 1{,}4$ s, $v_0 = 8{,}5$ m/s. Acest v_0 este viteza lui $3G$ după ciocnire.

Ciocnirea: $\frac{3G}{g} v_1 = \frac{3G}{g} \cdot 8{,}5 + \frac{G}{g} v_2'$ (legea conservării impulsului pe o axă paralelă cu planul înclinat):

$$K = \frac{1}{2} = \frac{v_2' - 8{,}5}{v_1}.$$

De unde $v_1 \approx 14$ m/s; $v_2' = 15{,}3$ m/s.

5 α și θ se determină din legea lucrului mecanic:

$$\cos \alpha = \frac{1}{5}; \quad \cos \theta = \frac{3}{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ciocnirea :

$$\frac{G}{g} \cdot 4 - \frac{2G_4}{g} = \frac{G}{g} v_1' + \frac{2G}{g} v_2' ;$$

$$K = \frac{v_2' - v_1'}{8} .$$

De unde : $v_1' = -\frac{8}{3}$; $v_2' = -\frac{2}{3}$. Ambele pendule se vor deplasa spre stînga.

Calculul tensiunilor în fire :

$$T_1 = \frac{G}{g}\frac{v_1'^2}{l} + G = \frac{64}{90}G + G ; \quad T_2 = \frac{2G}{g}\frac{v_2'^2}{2l} + 2G = \frac{4}{90}G + 2G.$$

Unghiurile de deplasare α_1 și θ_1 după ciocnire pînă la repaus se deduc din legea lucrului mecanic.

Pendulul *I*

$$-Gl(1 - \cos\alpha_1) = -\frac{G}{g}\frac{v_1'^2}{2} \Rightarrow \cos\alpha_1 = \frac{29}{45} .$$

Pendulul *II*

$$-2G \cdot 2l(1 - \cos\theta_1) = -\frac{2G}{g}\frac{v_2'^2}{2} \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{89}{90} .$$

De unde căpătăm : $\alpha_1 \approx 50°$: $\theta_1 \approx 8°40'$.

6. Ecuațiile parametrice ale mișcării cu lansare în *O*, pînă în *A* (fig. VIII.6) :

$$x = v_0 \cos\alpha t ; \quad y = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

devin : $10 = v_0 \cos\alpha t$; $4 = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$ iar viteza în *A* fiind orizontală $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 0$. De unde :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5} ; \quad \alpha = 38°40' ; \quad v_0 = 14{,}3 \text{ m/s} ; \quad t = 8{,}1 \text{ s}.$$

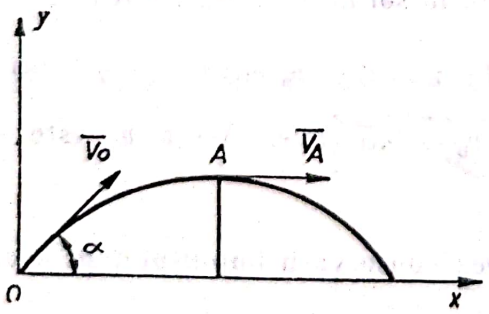


Fig. VIII.6

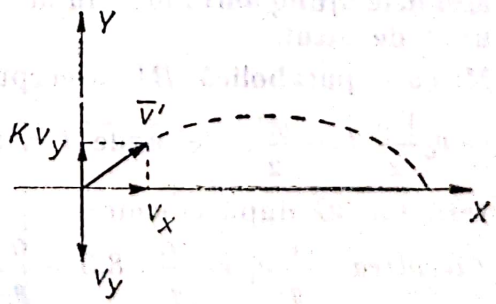


Fig. VIII.7

7. Legea lucrului mecanic în mișcarea pe sol

$$-\mu G \cdot 100 = -\frac{G}{g}\frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v_0^2 = 2g\mu \cdot 100.$$

Mișcare parabolică : $x = 200 = v_0 t$; $y = 100 = \frac{gt^2}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

$t = \sqrt{20} = 4{,}5$; $v_0 = \dfrac{200}{\sqrt{20}} \approx 44{,}5$; $\mu = 1$.

La baza turnului : $v_x = v_0$; $v_y = gt \approx 45$ m/s vertical în jos, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 63$ m/s.

Ciocnirea (fig. VIII.7). După ciocnire v_x este același, iar v'_y este $-Kv_y = -9$.

Mișcarea parabolică după ciocnire :

$x = 44{,}5\,t$; $y = 9\,t - \dfrac{gt^2}{2} = 0$; $t = \dfrac{9}{5}$; $x = 44{,}5 \cdot \dfrac{9}{5} \approx 80{,}1$ m.

8. a) *Mișcarea pe plan înclinat* (fig. VIII.8, *a*). Se aplică legea lucrului mecanic : .

$$-G(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)\cdot 5 = -\frac{G}{g}\frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s}.$$

b) *Mișcarea pe parabolă* (fig. VIII.8, *b*) în A, $v_y = 0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{1}{2}$

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{2}\,t = OB \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{2}\,; \quad y = \frac{10}{2}\cdot t - \frac{gt^2}{2} = BA \Rightarrow \frac{5}{4}$$

După ciocnire : $v_x = Kv_0 \cos\alpha = Kv_0\dfrac{\sqrt{3}}{2} = K\,5\sqrt{3}$.

Mișcarea parabolică de întoarcere : $\dfrac{x}{2} = BC = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} = K\,5\,\sqrt{3}\,t_1$;

$$y_1 = AB = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{5}{4}\,; \quad t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{deci} \quad K = \frac{1}{2}\cdot$$

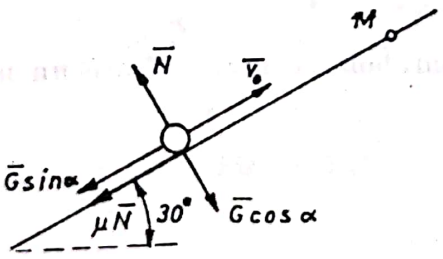


Fig. VIII.8, *a*

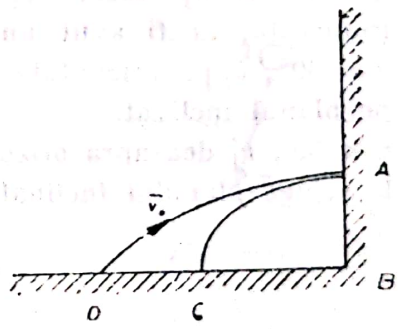


Fig. VIII.8, *b*

9. $x = v_0\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$; $y = \dfrac{v_0}{2}\,t - \dfrac{gt^2}{2}$ $\quad \dfrac{l}{2} \Rightarrow t = 2$; $MP = l = 20$ m

(fig. VIII.9).

Ciocnirea în P. În P mobilul are viteza de componente :

$$v_x = v_0\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}, \quad v_y = \frac{v_0}{2} - gt = -15.$$

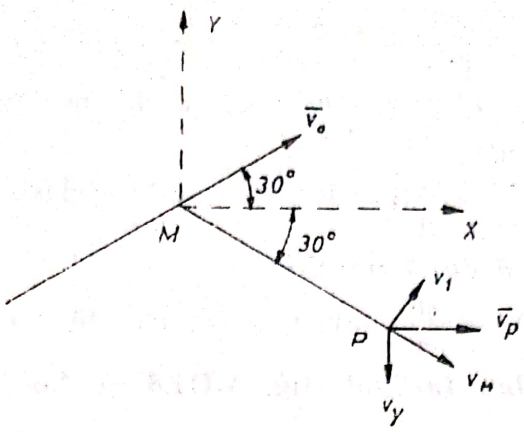


Fig. VIII.9

Proiectînd perpendicular pe plan avem : $v_\perp = 5\sqrt{3}$.
Proiectînd paralel cu planul $v_{||} = 15$.

După ciocnire : $v_\perp = 5\sqrt{3}\frac{1}{5} = \sqrt{3}$. Deci pe Ox și Oy avem :

$$v_x = 8\sqrt{3}\,;\ v_y = -6.$$

Parabola PQ : $x' = 8\sqrt{3}\,t' = \frac{t'\sqrt{3}}{2}\,;\ y' = 6\,t = +\frac{gt'^2}{2} = \frac{t'}{2}$,

de unde : $t' = 0{,}4$ s ; $l' = 6{,}4$ m.

10. *Poziția I* (fig. VIII.10, *a'*). Fie α = unghiul lui $\bar{v}_1$ de sosire al mobilului cu perpendiculara pe plan.

a) $\alpha > 30°$. După ciocnire $\bar{v}_1'$ este sub orizontală, parabola care urmează (punctată) ar fi avut un maxim la dreapta planului înclinat.

b) $\alpha = 30°$; $\bar{v}_1'$ pe orizontală, maximul parabolei ce urmează este chiar pe planul înclinat.

c) $\alpha < 30°$, $\bar{v}_1'$ deasupra orizontalei, parabola ce urmează are un maxim la stînga planului înclinat.

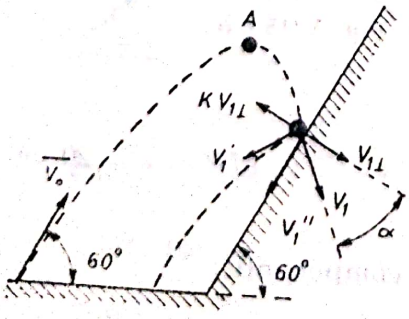


Fig. VIII.10, *a'*

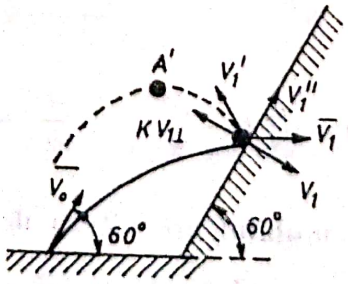


Fig. VIII.10, *a''*

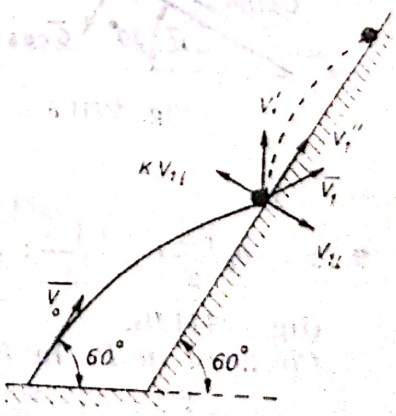


Fig. VIII.10, *a'''*

d) $\alpha = 0$, $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_1'$ perpendiculare pe planul înclinat, parabola de întoarcere e chiar cea de venire.

Poziția II (fig. VIII.10, *a''*). Mobilul după ciocnire are $\bar{v}_1'$ deasupra orizontalei. Parabola de întoarcere (punctată) are maximul la stînga planului înclinat.

Poziția III (fig. VIII.10, *a'''*). După ciocnire mobilul sare și ciocnește iar planul.

Caz particular : $\bar{v}_1$ face 30° cu planul înclinat. Mobilul sare vertical în sus.

11. $x = AB = l \cos 30° = 5t$; $y = BC = l \sin 30° = 5\sqrt{3}\,t - 5t^2$;

$v_x = 5$; $v_y = 5\sqrt{3} - 10t$; $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow t = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

De aci $x = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$; $y = \dfrac{10}{3}$; $v_x = 5$; $v_y = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ · Proiectînd pe plan :

$v_{\parallel} = v_x \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{v_y}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, Perpendicular pe plan $v_{\perp} = 5$. Pentru ca să sară pe verticală trebuie să avem $\dfrac{Kv_1}{v_{\parallel}} = \sqrt{3}$ sau $K = 1$.

Ciocnirea trebuie să fie perfect elastică.

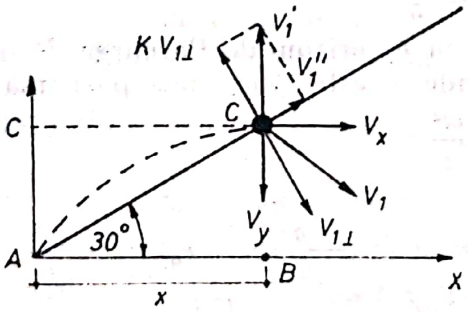


Fig. VIII.11

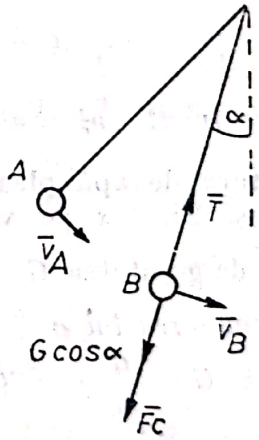


Fig. VIII.12

12. În B avem de-a lungul firului (fig. VIII.12) $T = G\cos\alpha + \dfrac{G}{g}\dfrac{v_B^2}{l} = \dfrac{3G\sqrt{3}}{3}$,

dar $v_B^2 = v_A^2 + 2gl(\cos\alpha - \cos 60°)$.

Din aceste ecuații avem : $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = 30°$ și $v_B^2 = gl\sqrt{3}$.

Mișcarea parabolică : $x = v_B \cos\alpha\, t$; $y = v_B \sin\alpha\, t + \dfrac{gt^2}{2} = 2l$ prin eliminarea lui t se deduce x.

Scanned with OKEN Scanner

13. Pentru ca fenomenul să se repete din treaptă în treaptă trebuie ca vitezele v_x şi v_y după ciocnire în A_2 să fie aceleaşi cu cele din A_1. Se poate scrie :

$$v_0 \cos \alpha\, t = l ; \tag{1}$$

$$v_0 \sin \alpha\, t - \frac{gt^2}{2} = -\frac{l}{2} . \tag{2}$$

În A_1 : $v_x = v_0 \cos \alpha$; $v_y = v_0 \sin \alpha$.

În A_2 : înainte de ciocnire

$$v_x = v_0 \cos \alpha ; \; v_y = v_0 \sin \alpha - gt \tag{3}$$

După ciocnire $v_y' = -Kv_y = v_0 \sin \alpha \Rightarrow t = \frac{3v_0 \sin \alpha}{g}$.

Din ecuaţia (2) : $v_0 \sin \alpha = \sqrt{\frac{gl}{3}}$ deci $t = \sqrt{\frac{3l}{g}}$. Din (1) $v_0 \cos \alpha = \sqrt{\frac{gl}{3}}$ deci $\operatorname{tg} \alpha = 1$; $\alpha = 45°$; $v_0 = \sqrt{\frac{2gl}{3}}$.

14. Din legea lucrului mecanic ; $2G\frac{h}{4} = \frac{2G}{g}\frac{v^2}{2} + \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{\omega^2}{2}$ unde $\omega = \frac{v}{R}$;

$$v^2 = \frac{2gh}{5} .$$

Mişcarea picăturii : $x = vt$; $h = \frac{gt^2}{2}$ de unde

$$x = \frac{2h}{\sqrt{5}} ; \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Viteza în C : $v_c^2 = v^2 + 2gh = \frac{12gh}{5}$.

15. Picătura de apă pleacă din A cu $\bar{v}_0$ orizontal. Parcurge R pe orizontală şi $2R + s$ pe verticală unde s este porţiunea parcursă în acest timp de greutatea G : $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Determinarea lui a :

$$T = G - \frac{G}{g}a = 2G + \frac{2G}{g}a \Rightarrow a = -\frac{g}{3} ; \; s = v_0 t = -\frac{gt^2}{6} .$$

Deci $R = v_0 t$; $2R + v_0 t - \frac{gt^2}{6} = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = 3\sqrt{\frac{R}{2g}}$; $v_0 = \frac{1}{3}\sqrt{2gR}$

În momentul ciocnirii : viteza picăturii are componentele :

$$v_x = v_0 = \frac{1}{3}\sqrt{2gR} ; \; v_y = gt = 3\sqrt{\frac{gR}{2}} .$$

Viteza lui $\bar{G}$ este numai verticală $v_G = v_0 - \frac{g}{3}t = -\frac{1}{6}\sqrt{2gR}$, picătura de apă ajunge la corp, cînd acesta se urcă din nou. Spaţiul parcurs de G este în acel moment $s = v_0 t - \frac{gt^2}{6} = \frac{R}{4}$ (spaţiul maxim parcurs fiind $s = \frac{1}{3}R$).

Scanned with OKEN Scanner

16. *Deplasarea lui 3G singur de la A la B.* Legea lucrului mecanic:

$$-\mu\, 3G\, l = \frac{3G}{g}\frac{v_B^2}{2} - \frac{3G}{g}\frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v_B^2 \cong 16\,;\ v_B = 4 \text{ m/s}.$$

Ciocnirea plastică între 3G și 2G la întinderea firului

$$\frac{3G}{g}\cdot 4 = \frac{5G}{g}v'_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ m/s}.$$

Mișcarea parabolică a lui 3G: $x = 2{,}4\,t$, $y = \frac{gt^2}{2} = 5 \Rightarrow x = 2{,}4$ m.

Mișcarea corpului 2G: $-\mu\, 2Gs = -\frac{2G}{g}\frac{v_1'^2}{2} \Rightarrow s = 0{,}57$ m.

17. Mișcarea corpurilor legate pe distanța l:

$$3G\ l - \mu 2G\ l = \frac{5G}{2g}\, v^2 \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{g\,l}{5}}\,.$$

Cu acest v ajunge $3G$ la sol și $2G$ în B. Corpul $2G$ continuă o mișcare parabolică.

Firul care are lungimea $2l$, rămîne mereu neîntins în această mișcare parabolică.

$$x = 2\sqrt{\frac{gl}{5}}\ t\,;\ y = 2l = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow x = 4\frac{l}{\sqrt{5}}\,.$$

18. Mișcarea parabolică de la O la C:

$x = 25\sqrt{3}\,t$, $y = 25\,t - 5\,t^2$, La $t = 1$ sec, $x = 25\sqrt{3} = OA$.

$v_x = 25\sqrt{3}$, $y = 25 - 5 = 20$ m; $v_y = 25 - 10 = 15$ m/s.

Viteza înainte de ciocnire $v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cong 46$ m/s.

Ciocnirea plastică: 46 m = 2 m $v_1' \Rightarrow v_1' = 23$ m/s. $\bar{v}_1'$ face cu axele aceleași unghiuri ca $\bar{v}_1$, adică $\operatorname{tg}\alpha' = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha' = \frac{5}{\sqrt{28}}$; $\sin\alpha' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$.

După ciocnire (Mișcarea parabolică): $x = 23\cdot\frac{5}{\sqrt{28}}\ t$;

$y = -20 = \frac{23\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\,t - 5\,t^2 \Rightarrow t \approx 2{,}86$ s; $x \approx 62$ m $= AB$. În total mobilul a parcurs $25\sqrt{3} + 62 = 104{,}5$ m. Dacă parabola era neîntreruptă $x = 212{,}5$ m.

19. În A, $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{36 - 20} = 4$ m/s. Descompunem pe $\bar{v}_1$ paralel și perpendicular cu planul: $v_{1\parallel} = \frac{v_1}{2} = 2$ m/s; $v_{1\perp} = 2\sqrt{3}$.

După ciocnire: $v_{1\parallel}$ rămîne același, $v_{1\perp}$ își schimbă semnul și devine

$$\left| Kv_1\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 3.$$

Mișcarea parabolică (O_y vertical în jos):

$v_x = 2\cos 30° + 3\cos 60° = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$; $v_y = 3\sin 60° - 2\cos 60° =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1.$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile parametrice sînt :

$$x = (2\sqrt{3} + 3)\frac{t}{2}\,;\; y = (3\sqrt{3} - 2)\frac{t}{2} + \frac{gt^2}{2} = 1.$$

Rezultă : $t \approx 0{,}25$ s ; $x \approx 0{,}8$ m unde $x = OB$.

20. *Ciocnirea :* $\frac{G}{2g} v_1 = \frac{G}{g} 10$; $v_1 = 20$ m/s (pentru toate figurile).

Determinarea lui v_0: $v_0^2 = v_1^2 + 2g\,\mu\,4 \Rightarrow v_0^2 = 440$ (toate figurile) ; $v_A = 10$ m/s.

$N_B = G\cos\alpha \mp F_c$; $x = v_B \cos\alpha\, t$; $y = v_B \sin\alpha\, t \pm \frac{gt^2}{2} = 2R$

Rezultate:

Fig.	v_B^2	$v_B \approx$	F_c	Presiunea N_B	Mişcarea parabolică	
					t[s]	x[m]
VIII.20, *a*	$v_A^2 + 2gR(1 - 0{,}5)$	11	$6G$	$5{,}5\,G$	0,8	4,4
VIII.20, *b*	$v_A^2 - 2gR(1 - 0{,}5)$	9	$4\,G$	$4{,}5\,G$	0,4	1,8
VIII.20, *c*	$v_A^2 - 2gR(1 + 0{,}5)$	6,5	$2\,G$	$1{,}5\,G$	0,5	1,62

21. a) După ciocnire componenta lui $\bar{v}_1$ pe rază devine $Kv_0\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$v_x = \frac{v_1\sqrt{3}}{4}(1 + K)\,;\; v_y = \frac{v_1}{4}(3K - 1).$$

Ecuaţiile mişcării : $R = \frac{v_1\sqrt{3}}{4}(1 + K)t$; $0 = \frac{v_1}{4}(3K - 1)\,t - \frac{gt^2}{2}$.

Deci $t = v_1\frac{(3K - 1)}{2g}$ şi $v_1^2 = \frac{8gR}{\sqrt{3}(1 + K)(3K - 1)}$

Trebuie ca $3K > 1$ deci $K > \frac{1}{3}$. Pentru $K = \frac{1}{2}$.

$v_1^2 = 2gh = \frac{32\,gR}{3\sqrt{3}}$; $h = \frac{16\,R}{3\sqrt{3}} \approx 3{,}14R.$

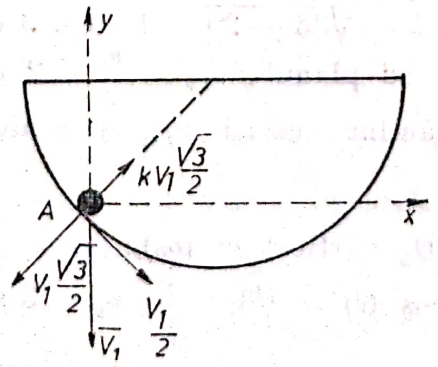


Fig. VIII.21, *a*

Scanned with OKEN Scanner

b) După ciocnire v_1' este orizontal și $v_1' = v_1$:

$$x = \frac{R\sqrt{2}}{2} = v_1 t\,;\quad y = R\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{gt^2}{2}\,;$$

$$\text{din } v_1^2 = \frac{gR}{2(2-\sqrt{2})}\,;\quad h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{R}{4(2-\sqrt{2})} \approx \frac{R}{2{,}4}\,.$$

22. Analog ca la problema 21 : $x = \frac{R}{2}$; $y = \frac{R\sqrt{3}}{2}$,

$$v_x = \frac{v_1\sqrt{3}}{4}(1+K)\,;\quad v_y = \frac{v_1}{4}(3K-1)\,;\quad \text{deci } t = \frac{2R\sqrt{3}}{3\,v_1(1+K)}$$

și $v_1^2 = \frac{2gR\sqrt{3}}{3(1+K)(1+2K)}$; $h = \frac{\sqrt{3}R}{3(1+K)(1+3K)}$.

pentru $K = \frac{1}{2}$; $h = \frac{4R\sqrt{3}}{45} \approx 0{,}15\ R$.

23. Bătaia maximă are loc la $\hat{\alpha}$ de lansare de 45°.

Deci : $18\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,t = 135$ (pe Ox) ; $\frac{18\sqrt{2}}{2}\,t - \frac{gt^2}{2} = 0$ (pe Oy)

$t \approx 10{,}7$ s ; $g = \frac{18\sqrt{2}}{t} = 2{,}35$ m/s².

24. În momentul deprinderii centrul de greutate C are viteza $v_1 = \frac{l}{2}\omega_1 =$ $= 2$ m/s. Centrul C are apoi mișcare parabolică : $x = v_1 \cos 30°\ t$; $y = O = v_1 \sin 30\ t - \frac{gt^2}{2}$, de unde $t = \frac{1}{5}$ s, $x = \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}34$ m ; $\theta = \omega_1 t = \frac{8}{5} = 1{,}6$; $n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1{,}6}{6{,}28} \approx 0{,}255$ rot sau $0{,}255 \cdot 360 = 91°48'$.

Acesta este unghiul cu care s-a rotit bara în timp ce centrul său de greutate a descris parabola de la C la C' (fig. VIII.24).

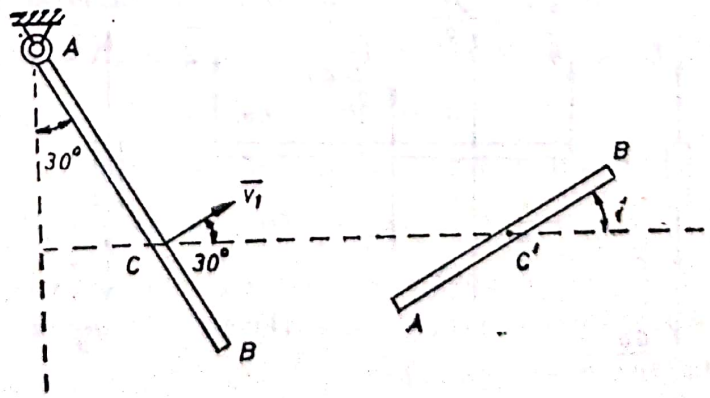


Fig. VIII.24

25. *Lansarea de la poziția I la II.* Legea lucrului mecanic la rotație:

$$-G\frac{l}{2}=\frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_1^2}{2}-\frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega_0^2}{2}.$$

Se desprinde bara, centrul de greutate descrie o parabolă. Ecuațiile parametrice ale parabolei centrului de greutate:

$$x=v_1t\,;\ y=l=\frac{gt^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Rotirea în jurul centrului de greutate în mișcarea parabolică.

Avem: $t=\sqrt{\frac{2l}{g}}$, $0=2\pi=\omega_1 t$ deci $\omega_1^2=\frac{\pi^2 g}{2l}\approx\frac{20g}{l}$;

deci: $\omega_0^2=\omega_1^2+\frac{6g}{l}$,

$$\omega_0=\sqrt{\frac{26g}{l}}\,;\ \omega_1=\sqrt{\frac{20g}{l}}\,;\ v_1=\sqrt{5gl}\,;\ x=l\sqrt{10}.$$

Capitolul IX

PRESIUNI

1. *Bara:*

$$\Sigma M_0=0:T_1l+\frac{2G}{g}a\frac{3l}{4}-\frac{G}{g}a\frac{l}{2}-2G\frac{3l}{4}-G\frac{l}{2}=0\,;$$

$$\Sigma Y_i=0:T_2=3G-T_1-3\frac{G}{g}a.$$

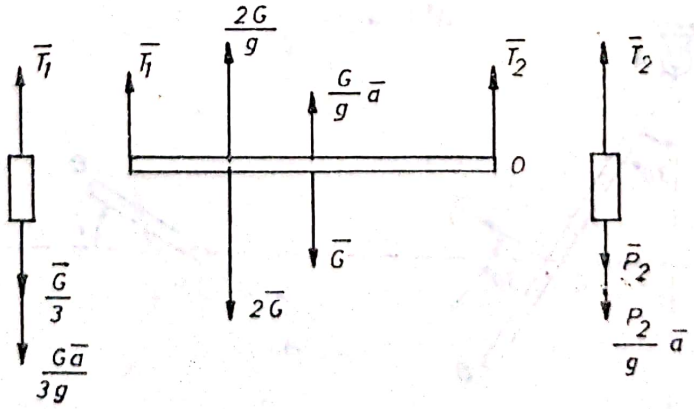


Fig. IX.1

Corpul P_1 : $T_1 = \frac{G}{3} + \frac{G}{3g} a \Rightarrow a = \frac{5}{7} g$; $T_1 = \frac{12}{21} G = \frac{4}{7} G$.

Deci : $T_2 = \frac{2}{7} G$.

Corpul P_2 : $P_2 + \frac{P_2}{g} a = T_2 \Rightarrow P_2 = \frac{G}{6}$. Presiunea între $2G$ și bară este

$N = 2G - \frac{2G}{g} a = \frac{4}{7} G$.

Static ar fi fost :

$2G \frac{l}{4} + G \frac{l}{2} = P_2 l \Rightarrow P_2 = G$; $P_1 = 2G$. Presiunea statică ar fi $N = 2G$.

2 Trebuie ca $N \leqslant \frac{3G}{2} = \frac{G}{g} a + G$; $a \leqslant \frac{g}{2}$; luăm la limită $a = \frac{g}{2}$

Deci $T = P - \frac{P}{g} a = 3G + \frac{3G}{g} a$. Găsim $P = 9G$.

3. *Cutia I* : $3G + \frac{3G}{g} a_1 = T_1$.

Cutia II : $3G - \frac{3G}{g} a_2 = T_2$.

Roata : $\Sigma M_0 = 0 : T_2 \, 2r = T_1 r$ și $a_2 = 2r \varepsilon$; $a_1 = r\varepsilon$

deci $a_2 = 2a_1$. Obținem : $a_1 = \frac{g}{5}$; $a_2 = \frac{2g}{5}$; $T_1 = \frac{18G}{5}$; $T_2 = \frac{9G}{5}$.

Corpul G din I : $N_1 = \frac{6G}{5}$; *Corpul G din II* : $N_2 = \frac{3G}{5}$.

4. *Cazul fără opritor* : $F_c = \frac{Gl}{g} \sin \alpha \omega^2$; proiectînd pe direcția barei :

$G \cos \alpha = F_c \sin \alpha \Rightarrow l = \frac{g \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \, \omega^2}$; $F_c = G \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$N_1 = G \sin \alpha + F_c \cos \alpha = \frac{G}{\sin \alpha}$ (N_1 este forța normală pe bară).

Cazul cu opritor : $F_c' = \frac{G}{g} l \sin \alpha \, 4 \, \omega^2 = 4G \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Proiecții pe direcția barei : $G \cos \alpha + N_0 = F_c' \sin \alpha$; $N_0 = 3G \cos \alpha$

$N_2 = G \sin \alpha + F_c' \cos \alpha = \frac{G}{\sin \alpha} (1 + 3 \cos^2 \alpha) > N_1$ (N_1 este forța normală pe bară, iar N_2 cea pe opritor).

5. Se vede că în momentul în care apa ar ieși din vas, fundul este acoperit ca în figura IX.5, deoarece $S = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$.

Fie o picătură de apă de masă m. Trebuie ca suprafața apei să fie perpendiculară pe $\bar{N}$. Proiectînd pe suprafața apei avem : $ma \cos \alpha = mg \sin \alpha \Rightarrow a = g \operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{2}$. Forța de frecare μG între vas și sol are sensul spre stînga.

Scanned with OKEN Scanner

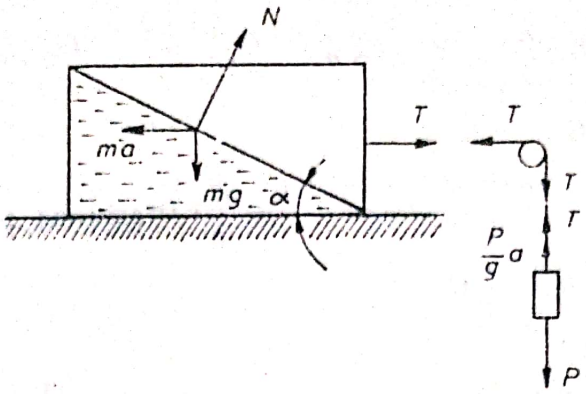


Fig. IX.5

Această accelerație o are tot sistemul deci și greutatea P.

$T = P - \frac{P}{g}a = \frac{P}{2}$ · Pentru vas $= T = \frac{G}{g}a + \frac{1}{2}G = G$ de unde $P = 2G$.

6. *Corpul* G în mișcare (fig. IX.6). Trebuie ca $\frac{G}{g}a_2 = \frac{G}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{g}{4}$.

a) Cutia se accelerează în sus: $T_2 = 3G + \frac{3G}{4} = \frac{15G}{4}$

În firul care conduce la P avem: $T_1 = \frac{T_2}{2} = \frac{15G}{8}$ · Accelerația a_1 a lui P este $a_1 = 2a_2 = \frac{g}{2}$; deci $T_1 + \frac{P}{g}a_1 = P \Rightarrow P = \frac{15G}{4}$

b) Aci cutia coboară cu $a_2 = \frac{3}{4}g$; $a_1 = \frac{3}{2}g$.

$T_2 = \frac{9}{4}G$; $T_1 = \frac{9}{8}G$; $P = \frac{9}{20}G$.

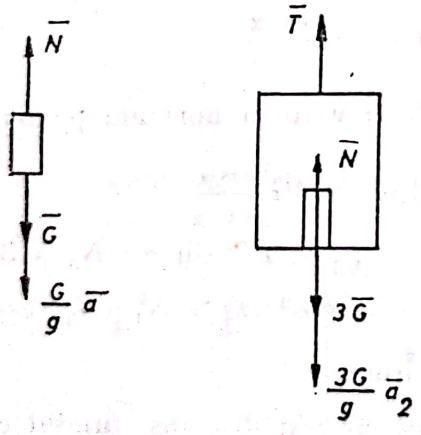


Fig. IX.6

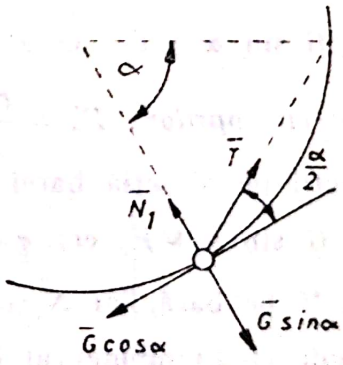


Fig. IX.7

7. *În repaus:* $T = P = G\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $N_1 = G\ \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2}$ (fig. IX.7).

După ruperea firului: $N_2 = G \sin\alpha$, dar pentru $\alpha < 90°$, $\sin\alpha > \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ deci $N_2 > N_1$; mobilul apasă mai mult imediat după ruperea firului.

Scanned with OKEN Scanner

În fundul vasului $v_1 = \sqrt{2gR\ (1 - \sin\alpha)}$ de unde rezultă forța centrifugă $F_c = \frac{G}{g}\frac{v_1^2}{R} = 2G\ (1 - \sin\alpha)$;

$N_0 = G + F_c = G(3 - 2\ \sin\alpha)$.

8. Avem $K = \frac{4G}{l}$. Cablul are (v. fig. 8 enunț) lungimea $3l$, deci $T = K\ (3l - l) = 8G$.

Punctul material A. Forța centrifugă $F_c' = \frac{G}{g} l\ \omega^2$.

Punctul material B. Forța centrifugă $F_c'' = \frac{G}{g} 2l\omega^2$.

Deci reacțiunile la opritoare N_A și N_B rezultă:

$N_A = 8G - \frac{G}{g} l\omega^2$; $N_B = 8G - \frac{G}{g} 2l\omega^2$;

$N_B = 0$ cînd $\omega^2 = \frac{4g}{l}$, atunci $N_A = 4G$.

În stare statică: $N_A = N_B = 8G$.

9. Avem $\frac{d}{l} = \cos\alpha$; $F_c = \frac{G}{g} l \sin\alpha\omega^2$ (fig. IX.9). Deci din $\Sigma Y_i = 0$ $N = G - T\ \cos\alpha$ iar din $\Sigma X_i = 0$: $T = \frac{G}{g} l\omega^2$, de unde $N = G - \frac{G}{g} l\omega^2 \cos\alpha$

$$N = 0 \text{ cînd } \omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha} = \frac{g}{d}$$

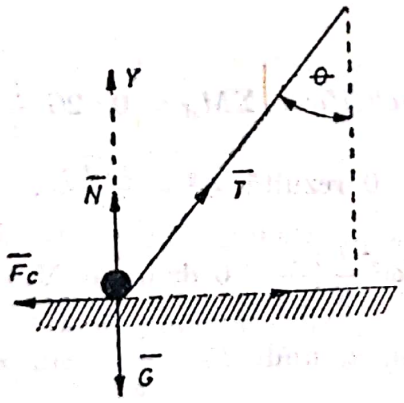


Fig. IX.9

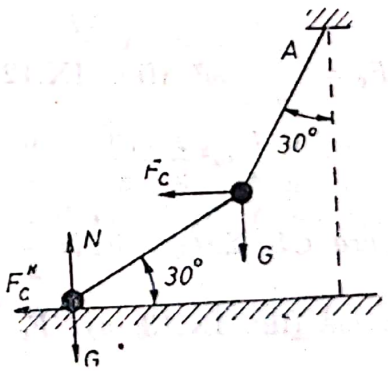


Fig. IX.10

10. $F_c' = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega^2$; $F_c'' = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega^2(1 + \sqrt{3})$. Momente pentru sistemul solidificat: (fig. IX.10).

$$\Sigma M_A = 0: G\frac{l}{2} - \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega^2 l\frac{\sqrt{3}}{2} + G\frac{l}{2}(1 + \sqrt{3}) - \frac{G}{g}\frac{l^2\omega^2}{4}(1 + \sqrt{3})^2 = N\frac{l}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Sau $N = G\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \dfrac{G}{2g} l\omega^2 \dfrac{3\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+1}$.

$N = 0$ cînd $\omega^2 = \dfrac{2g}{l}\dfrac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4}$.

11. Avem (fig. IX.11): $\cos\alpha = \dfrac{d}{l}$;

$\Sigma M_A = 0 : G\dfrac{l}{2}\sin\alpha - \dfrac{G}{g}\dfrac{l}{2}\sin\alpha\omega^2\dfrac{2}{3}l\cos\alpha - Nl\sin\alpha = 0.$

$N = \dfrac{G}{2}\left(1 - \dfrac{2\omega^2}{3g}l\cos\alpha\right)$. $N = 0$ cînd $\omega^2 = \dfrac{3g}{2d}$.

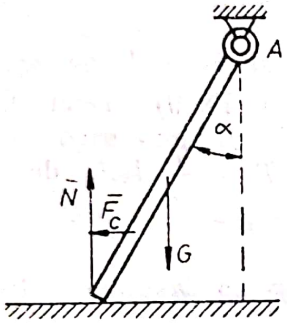


Fig. IX.11

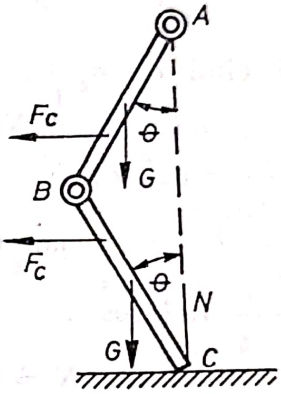


Fig. IX.12

12. $F_c = \dfrac{G}{g}\dfrac{l}{4}\omega^2$ (fig. IX.12). *Sistemul solidificat* $\Sigma M_A = 0 : 2G\dfrac{l}{4} -$

$- \dfrac{G}{g}\dfrac{l}{4}\omega^2\dfrac{2}{3}\dfrac{l\sqrt{3}}{2} - \dfrac{G}{g}\dfrac{l}{4}\omega^2\dfrac{4l}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ rezultă $\omega^2 = \dfrac{2\sqrt{3}g}{3l}$.

Bara CB $\Sigma M_B = 0 : N\dfrac{l}{2} - \dfrac{Gl}{4} - \dfrac{G}{g}\dfrac{l}{4}\omega^2\dfrac{l}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ de unde $N = \dfrac{2}{3}G$.

13. Avem (fig. IX.13, *a*): $F_c\cos\alpha = G\sin\alpha$, unde $F_c = \dfrac{G}{g}R\sin\alpha\omega^2$.

a) $F_c\sin\alpha + G\cos\alpha = N$. Deci $N = \dfrac{G}{g}R\sin^2\alpha\omega^2 + G\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{g}{R\omega^2} = \dfrac{1}{5}$; $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. Deci $N = \dfrac{G}{g}\dfrac{1}{2}\dfrac{24}{25}\cdot 100 + \dfrac{G}{5} \approx 5G$.

b) $F_c = \dfrac{G}{g}R(1+\sin\alpha)\omega^2$ dar $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{24}}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$

$N = G\cos\alpha + F_c\sin\alpha$; $F_c\cos\alpha = G\sin\alpha$.

De unde: $\omega^2 = 49\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$; $\omega = 7\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$; $N \approx \dfrac{6G}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

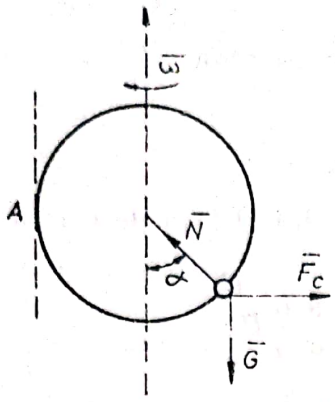


Fig. IX.13, *a*

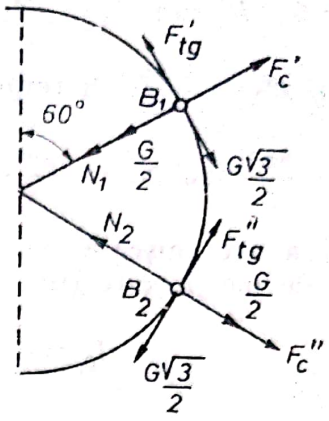


Fig. IX.14

14. Vom determina $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ în cele două puncte B_1 și B_2 definite prin $\measuredangle 60°$ cu verticala.

a) *În punctul* B_1 : $v_1^2 = v_A^2 + 2g\frac{R}{2}$; $N_1 = F_c' - \frac{G}{2} = 5G$ deci $v_A^2 = \frac{9}{2}gR$ și $v_1 = \sqrt{\frac{11}{2}gR}$. Din $F_{tg}' = \frac{G}{g}a_{tg} = G\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_{tg} = \frac{\sqrt{3}}{2}g$; $a_n = \frac{v_1^2}{R} = \frac{11}{2g}$; în B_1 : $a_1 = \sqrt{a_{tg}^2 + a_n^2} = \frac{g}{2}\sqrt{124} \approx 5{,}57\ g$.

În punctul B_2 : Analog pentru a avea $N_2 = 5G$:

$$v_A^2 = \frac{3}{2}gR\ ;\quad v_2 = \sqrt{\frac{9}{2}gR}\ ;\quad a_{tg} = \frac{\sqrt{3}}{2}g\ ;\quad a_n = \frac{9}{2}g$$

$$a = \frac{g}{2}\sqrt{30}.$$

b) În aceleași puncte B_2 și B_1 inelul lansat cu $\bar{v}_c$ din C va avea :

$$\text{În } B_2 : v_2 = \sqrt{\frac{9}{2}gR}\ ;\quad v_c = \sqrt{\frac{11}{2}gR}\ ;\quad a_{tg} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\quad a_n = \frac{9}{2}g\ ;$$

$$a_2 = \frac{g}{2}\sqrt{30}\ ;$$

$$\text{În } B_1 :\ v_1^2 = v_c^2 - 3\ gR = \frac{5}{2}gR\ ;\quad a_{tg} = \frac{\sqrt{3}}{2}g\ ;\quad a_n = \frac{5}{2}g\ ;$$

$$a_1 = g\sqrt{7}\ ;\quad N_1 = 2G.$$

15. Analog cu problema precedentă, vom avea :

$$N_A = \frac{G}{g}\frac{v_A^2}{R} - G = \frac{G}{5} \text{ sau } N_A = G - \frac{G}{g}\frac{v_A^2}{R} = \frac{G}{5} \text{ de unde respectiv}$$

Scanned with OKEN Scanner

$v_A^2 = 6\ gR$ sau $v_A^2 = \frac{4gR}{5}$ și $v_0^2 = \frac{16gR}{5}$ sau $v_0^2 = \frac{14gR}{5}$

În B, $v_B^2 = \frac{26gR}{5}$ sau respectiv $v_B^2 = \frac{24gR}{5}$; de unde:

$N_B = \frac{31G}{5}$ sau $N_B = \frac{29G}{5}$.

16. a) Bara are mișcare de rotație în jurul lui O față de care momentul ei de inerție este (fig. IX.16, *a*):

$$I_0 = \frac{G}{g}\frac{l^2}{12} + \frac{G}{g}l^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{6}\frac{G}{g}l^2.$$

Lucrul mecanic din poziția I în II: $G\frac{l\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{6}\frac{G}{g}l^2\frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g\sqrt{3}}{5l}$

În poziția II: $2N_2\frac{\sqrt{3}}{2} = G + F_c = G + \frac{G}{g}\frac{l\sqrt{3}}{2}\frac{3g\sqrt{3}}{5l}$;

deci $N_2 = \frac{19G\sqrt{3}}{30}$.

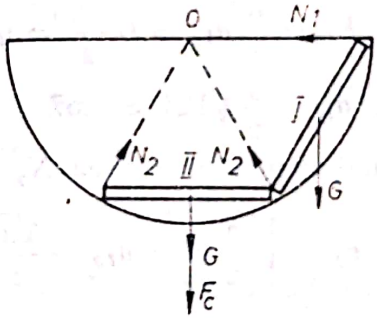


Fig. IX.16, *a*

b) Din $M_{ext} = I_0\varepsilon$ avem $Gl\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{6}\frac{G}{g}l^2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{9}{10}\frac{g}{l}$

Forța de inerție are în poziția I chiar în momentul mișcării, componentele $\bar{F}_c = 0$ (căci $\omega = 0$) și $\bar{F}_{tg}$ pe direcția barei (în sus):

$$F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l\sqrt{3}}{2}\varepsilon = \frac{9\sqrt{3}}{20}G.$$

Proiectînd perpendicular pe bară și apoi paralel cu ea avem:

$N_1\frac{\sqrt{3}}{2} + N_2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{G}{2}$ și $\frac{N_2}{2} - \frac{N_1}{2} - G\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{20}G = 0$

de unde $N_1 = \frac{7G\sqrt{3}}{60}$; $N_2 = \frac{13G\sqrt{3}}{60}$.

17. Avem $2\pi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow \varepsilon = \pi$ rad/s². *Reacțiunile*: N_1 este centripetă, N_2 verticală (fig. IX.17).

Avem $N_1 = F_c = \frac{G}{g} R\omega^2$; $N_2 = G$; $N_0 = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{G}{g}\sqrt{g^2 + R^2\omega^4}$

$$\mu N_0 = F_{tg} = \frac{G}{g} R\varepsilon \Rightarrow \mu = \frac{F_{tg}}{N_0}$$

La $t = 0$, $\omega = 0$, $\mu_0 = \frac{R\varepsilon}{g} = 0{,}157$.

La $t = 2$, $\omega = 2$, $\mu_A = \frac{R\varepsilon}{\sqrt{g^2 + R^2\omega^4}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{5}} = 0{,}07$. Deci dacă $\mu \geqslant \mu_0$ punctul nu lunecă.

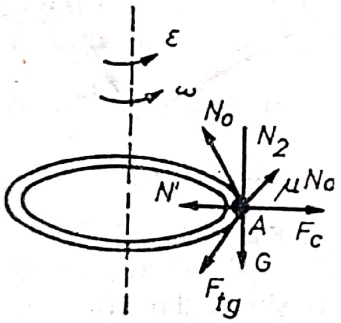


Fig. IX.17

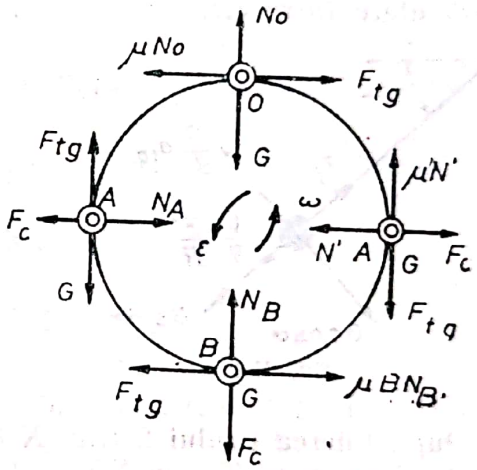


Fig. IX.18

18. a) Pentru $\omega = \text{const.}$ punctul cel mai defavorabil este în A sau A'. Acolo $N_A = F_c = \frac{G}{g} R\omega^2$ deci $\mu \frac{G}{g} R\omega^2 = G$; $\mu = \frac{g}{R\omega^2}$

b) Pentru mișcarea accelerată: În O avem $N_0 = G$; $\mu_0 N_0 = \frac{G}{g} R\varepsilon$;

$\mu_0 = \frac{R\varepsilon}{g} = 0{,}15$. *În* A $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

$N_A = F_c = \frac{G}{g} R\omega^2$ iar $\mu_A N_A = G - \frac{G}{g} R\varepsilon$, $\mu_A = \frac{g - R\varepsilon}{R\omega^2} \approx 3$.

În B: $\omega = \pi$; $N_B = F_c + G$; $\mu_B N_B = F_{tg} = \frac{G}{g} R\varepsilon \Rightarrow \mu_B \approx 0{,}1$.

În A': $\omega = \frac{3\pi}{2}$; $N' = F_c = \frac{G}{g} R\omega^2 = \frac{9}{8} G$; $\mu'_A \approx 0{,}13$.

În O: $\omega = 2\pi$; $N'_0 = G + F_c = 3G$; $\mu'_0 = 0{,}052$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

FORȚE INIȚIALE

1. a) *Static* $T = \frac{G}{2 \sin \alpha}$. După tăierea firului (fig. X.1, *a*) $T_1 = G \sin \alpha$ ($v = 0$ imediat după tăierea firului). Pentru ca $T_1 = T$ trebuie ca $\frac{G}{2 \sin \alpha} = G \sin \alpha$; $\alpha = 45°$.

Dacă: $\frac{G}{2 \sin \alpha} > G \sin \alpha$; $\sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha < 45°$.

Dacă: $\frac{G}{2 \sin \alpha} < G \sin \alpha$; $\alpha > 45°$ este ciocnire pe direcția firului.

Dacă dorim ca $T = T_1$ după tăiere, trebuie ca firele să fie perpendiculare între ele.

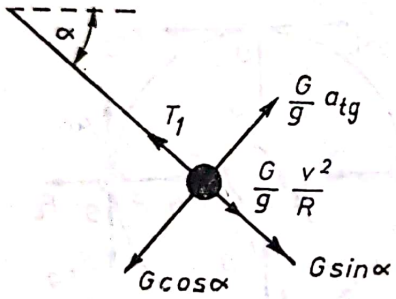


Fig. X.1, *a*

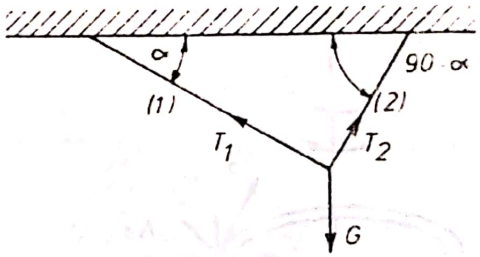


Fig. X.1, *b*

b) După tăierea firului 2 (fig. X.1, *b*). $T_1 = G \sin \alpha$, dar static înaintea tăierii avem pe T_1 din $\Sigma X_i = 0$: $T_1 \cos \alpha - T_2 \sin \alpha = 0$; $\Sigma Y_i = 0$: $T_1 \sin \alpha + T_2 \cos \alpha = G$ care dă $T_1 = G \sin \alpha$ deci T_1 rămîne același după tăierea firului ca înainte, în cazul în care firele sînt perpendiculare. Același rezultat pentru T_2.

2. a) Fie $T_s = T$ în stare statică și $T_d = T$ în stare dinamică (fig. X.2, *a*)

Avem: $T_s = \frac{mg}{2 \sin \alpha}$; $T_d = \frac{mg}{2} \sin \alpha$.

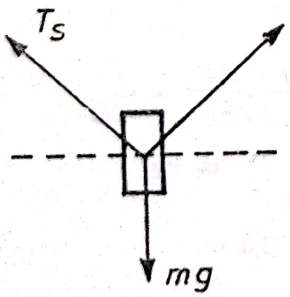


Fig. X.2, *a*

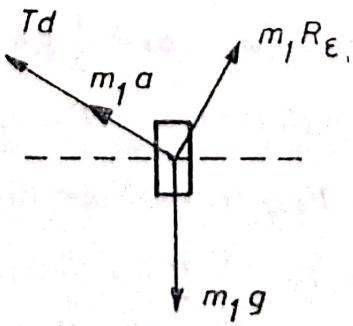


Fig. X.2, *b'*

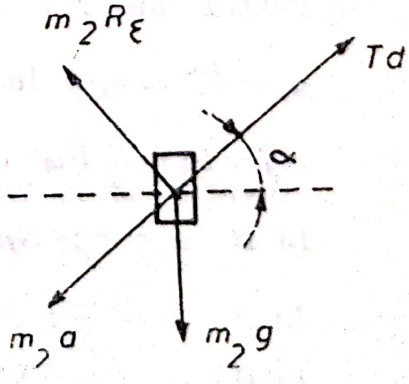


Fig. X.2, *b''*

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie cele două mase m_1 și m_2, $m_1 + m_2 = m$ și $m_1 > m_2$. După tăierea firului avem (fig. X.2,b' și X.2, b'') $T_d = m_1 g \sin\alpha - m_1 a = m_2 g \sin\alpha + m_2 a$, de unde $a = \frac{(m_1 - m_2) g \sin\alpha}{m_1 + m_2}$ și $T_d = \frac{2 m_1 m_2 g \sin\alpha}{m_1 + m_2}$

În momentul ruperii $\omega = 0$ deci forța centrifugă e nulă; forța de inerție tangențială este $m_1 R\varepsilon_1$ respectiv $m_2 R\varepsilon_2$ unde $R = \frac{l}{\cos\alpha}$.

Proiectînd perpendicular pe T_d găsim $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{g\cos^2\alpha}{l}$

Forțele de inerție tangențiale nu au influență asupra lui T_d.

3. *Static* $\Sigma M_C = 0 : G\left(\frac{l}{2} - x\right) = F_A(l - x) \Rightarrow F_A = \frac{G}{2}\left(\frac{l - 2x}{l - x}\right)$.

La scoaterea reazemului apare forța de inerție tangențială (cea centrifugă e nulă căci $\omega = 0$): $F_{i\,tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon$. Din $M_{ext} = I_A\varepsilon \Rightarrow G\frac{l}{2} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{3g}{2l}$; $F_{i\,tg} = \frac{3G}{4}$ deci $F'_A = \frac{G}{4}$.

Rezultă că static $F_A = \frac{G}{2}$ deci $x = 0$ bara trebuie sprijinită în B, la extremitatea sa.

4. a) *Înainte de rupere* (fig. X.4, *a*) $\Sigma M_A = 0$:

$$G\frac{l\sqrt{3}}{4} - T\frac{l}{3} = 0\,;\quad T = \frac{3G\sqrt{3}}{4},\quad X_A = \frac{T}{2} = \frac{3G\sqrt{3}}{8}\,;$$

$$Y_A = G - \frac{T\sqrt{3}}{2} = -\frac{G}{8}.$$

După rupere $F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon$ situată în C la $AC = \frac{2}{3}l$ iar F_c forța centrifugă e nulă deoarece $\omega = 0$.

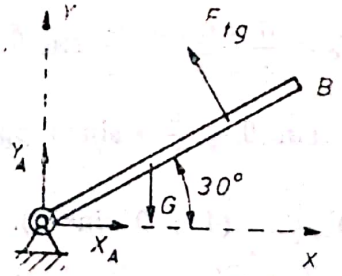


Fig. X.4, *a*

Determinarea lui ε: $\Sigma M_A = G\frac{l\sqrt{3}}{4} - \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon = 0$ de unde:

$$\varepsilon = \frac{3g\sqrt{3}}{4l}\,;\quad F_{tg} = \frac{3G\sqrt{3}}{8}\ \text{deci}$$

$$X_A = \frac{3G\sqrt{3}}{16}\,;\quad Y_A = G - \frac{9G}{16} = \frac{7G}{16} \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe direcţia Ox este scădere de forţă, pe direcţia Oy este creştere de forţă.

b) *Înainte de rupere* $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T = \frac{3G\sqrt{3}}{8}$; $X_A = \frac{T}{2} = \frac{3G\sqrt{3}}{16}$;

$Y_A = G - \frac{9G}{16} = \frac{7G}{16}$ (înainte de rupere).

După rupere: acelaşi ε, deci acelaşi F_{tg}, X_A, Y_A ca la (a) relaţia (1). Pe direcţia Ox este aceeaşi forţă, pe direcţia Oy este aceeaşi forţă ca la (b) înainte de rupere.
Aceleaşi forţe de rupere ca înainte de rupere. Firul fusese legat la o distanţă de articulaţie egală cu lungimea pendulului simplu sincron cu bara.

c) $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T = G\frac{\sqrt{3}}{2}$; $X_A = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = \frac{3G}{4}$

X_A şi Y_A scad prin ruperea firului.

5. a) $\Sigma M_A = 0$: $T \sin\alpha \frac{3l}{4} = G\frac{l}{4}$; $T = \frac{G}{3\sin\alpha}$; $X_A = -\frac{G}{3}\operatorname{ctg}\alpha$; $Y_A = \frac{2G}{3}$

b) Determinarea acceleraţiei unghiulare după ruperea firului $G\frac{l}{4} = I_A\varepsilon$

unde $I_A = \frac{G}{g}\frac{l^2}{12} + \frac{G}{g}\frac{l^2}{16} = \frac{7}{48}\frac{G}{g}l^2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{12}{7}\frac{g}{l}$

$F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\varepsilon = \frac{3}{7}G$ deci $F_A = Y_A = \frac{4}{7}G < Y_A$ static (nu e ciocnire).

c) Din legea lucrului mecanic (fig. X. 5,c) $G\frac{l}{4}\sin\theta = \frac{I_A\omega^2}{2}$, de unde:

$$\omega^2 = \frac{24\,g\sin\theta}{7l}.$$

derivînd $\varepsilon = \frac{12g\cos\theta}{7l}$. De aci $F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\varepsilon = \frac{3}{7}G\cos\theta$;

$$F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\omega^2 = \frac{6G}{7}\sin\theta.$$

$$X_A = +\frac{3}{7}G\cos\theta\sin\theta + \frac{6}{7}G\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{7}G\sin\theta\cos\theta;$$

$$Y_A = \frac{G}{7}(4 + 9\sin^2\theta).$$

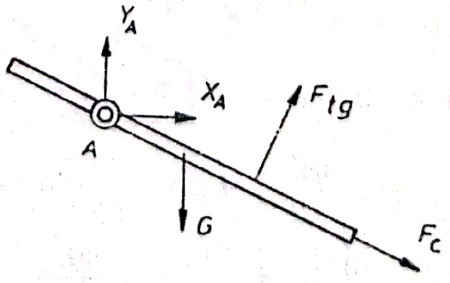


Fig. X.5, c

Scanned with OKEN Scanner

6. a) *Static :* Din $\Sigma M_A = 0$: $N_B = \frac{G}{4}$; $X_C = -\frac{G\sqrt{3}}{8}$; $Y_C = 3G - \frac{G}{8} = \frac{23G}{8}$;

$$M_c = \frac{Gl\sqrt{3}}{4}(4 - \sqrt{3}).$$

În momentul inițial la scoaterea reazemului ($\omega = 0$, $\varepsilon = ?$)

(I) *Bara* AB: $I_A = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}$; $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon = G\frac{l}{4} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3g}{4l}$

$F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon = \frac{3G}{8}$; $X_A = -\frac{3G}{16}\sqrt{3}$ $Y_A = G - \frac{3G}{16} = \frac{13G}{16}$.

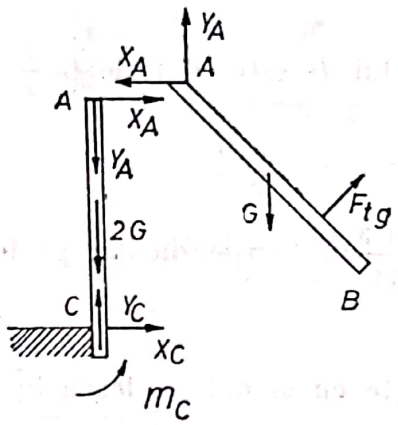


Fig. X.6

La bara AC la încastrare: $X_C = +\frac{3G}{16}\sqrt{3}$; $Y_C = 3G - \frac{3G}{16} = \frac{45}{16}G$;

$$M_c = \frac{3G}{8}l\sqrt{3}.$$

(II) Cînd bara AB trece prin poziția verticală, din expresia lucrului mecanic: $G\frac{l}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g(2-\sqrt{3})}{2}$; $\varepsilon = 0$ căci ω în acea poziție e maxim. $X_A = 0$; $Y_A = G + F_c = G + \frac{G}{g}\frac{l}{2}\frac{3g(2-\sqrt{3})}{2l} =$

$$= \frac{G}{4}\left(10 - 3\sqrt{3}\right)$$

La încastrare: $X_c = 0$; $Y_c = 2G + Y_A = \frac{G}{4}(18 - 3\sqrt{3})$; $M_c = 0$

b) *Static :* $N_B = \frac{G}{4}$; $X_A = G\frac{\sqrt{3}}{8}$; $Y_A = \frac{7G}{8}$; $X_c = \frac{G}{8}\sqrt{3}$; $Y_c = \frac{23G}{8}$

$$M_c = \frac{15Gl}{4}.$$

La scoaterea reazemului : $\varepsilon = \frac{3g}{4l}$; $F_{tg} = \frac{3G}{8}$; $X_A = \frac{3G\sqrt{3}}{16}$; $Y_A = \frac{13G}{16}$

$X_c = \frac{3G\sqrt{3}}{16}$; $Y_c = 2G + \frac{13G}{16} = \frac{45\,G}{16}$; $M_c = \frac{29\,Gl}{8}$.

Scanned with OKEN Scanner

În poziție orizontală $\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2l}g$; $F_c = \frac{3G\sqrt{3}}{4}$; $F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon$

$G\frac{l}{2} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{3g}{2l}$; $F_{tg} = \frac{3}{4}G$ (vertical în sus).

Deci: $X_A = -\frac{3G\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = G - \frac{3}{4}G = +\frac{G}{4}$; $X_c = -\frac{3G\sqrt{3}}{4}$;

$$Y_c = \frac{9G}{4};\ M_c = 2Gl - \frac{G}{4}2l = \frac{3Gl}{2}.$$

7. a) ε după scoaterea lui B este dat de $G\frac{l}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{48}\frac{G}{g}l^2\varepsilon$

de unde: $\varepsilon = \frac{6g\sqrt{3}}{7l}$

$F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\varepsilon = \frac{3\sqrt{3}}{14}G$ (perpendicular pe bară) $\Rightarrow X_A = -\frac{3}{28}G\sqrt{3}$,

$Y_A = \frac{19}{28}G$

În poziția II sosește cu ω dat de legea lucrului mecanic.

$G\frac{l}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7G}{g}\frac{l^2}{48}\frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12g(\sqrt{3}-1)}{7l}}$; după ciocnire

$\omega' = -\frac{1}{2}\omega$; $\omega'^2 = \frac{3g(\sqrt{3}-1)}{7l}$. Aplicînd din nou legea lucrului mecanic $-G\frac{l}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right) = -\frac{7}{48}\frac{Gl^2}{2}\frac{\omega'^2}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3\sqrt{3}+1}{8}$

$\theta \approx 39°35'$ deci de la poziția *II* se reîntoarce cu $9°35'$.

b) $F_{tg} = \frac{3}{14}G$ deci inițial $X_A = \frac{3}{28}G\sqrt{3}$; $Y_A = \frac{25}{28}G$.

Lucrul mecanic de la *I* la *II* dă $\omega^2 = \frac{24g\sqrt{3}}{7l}$ deci $\omega'^2 = \frac{6g\sqrt{3}}{7l}$

Din nou legea lucrului mecanic: $-G\frac{l}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right) = -\frac{7Gl^2}{48g}\frac{\omega'^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\theta \cong 64°25'$ deci de la poziția *II* se reîntoarce cu $34°35'$.

8. La toate figurile X.8 $I_A = \frac{5G}{g}l^2$, iar ε se determină din $M_{ext} = I_A\varepsilon$.

Forțele centrifuge inițial sînt nule, cele tangențiale sînt F_1 pentru bara mică, F_2 pentru cea mare.

a) *Static:* $X_A = 0$; $Y_A = G$.

Dinamic inițial: $2Gl = \frac{5G}{g}l^2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{2g}{5l}$.

Scanned with OKEN Scanner

Punînd F_1 și F_2 forțe de inerție tangențiale avem :

$$F_1 = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon = \frac{G}{5};\ F_2 = \frac{2G}{g} l\sqrt{2}\varepsilon = \frac{4G\sqrt{2}}{5};$$

$$X_A = -F_1 - F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = -G;\ Y_A = 3G - F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{11}{5}G.$$

Acestea sînt mai mari decît cele statice, avem ciocnire în articulație.

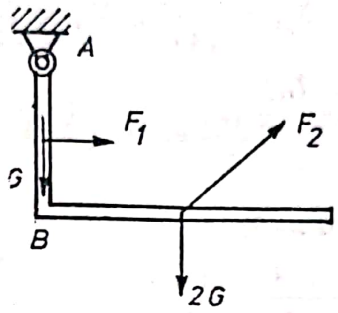


Fig. X.8

b) *Static :* $X_A = -\frac{5G}{2};\ Y_A = 3G.$

Dinamic inițial $G\frac{l}{2} + 2Gl = \frac{5G}{g}l^2\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{g}{2l};\ F_1 = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\varepsilon = \frac{G}{4};\ F_2 = \frac{2G}{g}l\sqrt{2}\,\varepsilon = G\sqrt{2};\ X_A = F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = G$$

$Y_A = \frac{7G}{4}$ este ciocnire pe direcția Ox.

c) *Statică :* $X_A = 0,\ Y_A = G$;

Dinamic inițial : $\varepsilon = \frac{2g}{5l};\ F_1 = -\frac{2G}{5}$ (orizontal) $F_2 = \frac{4G}{5}\sqrt{2}$ (45° cu verticala) ; $X_A = F_1 + \frac{4G}{5} = \frac{6G}{5};\ Y_A = \frac{11G}{5}$ (ciocnire)

d) *Static :* $X_A = \frac{5G}{2};\ Y_A = 3G.$

Dinamic inițial : $\varepsilon = \frac{g}{2l};\ F_1 = \frac{G}{4}$ (vertical în sus) ;

$F_2 = G\sqrt{2}$ (45° cu verticala) ; $X_A = G$; $Y_A = \frac{7G}{4}$ nu e ciocnire.

9. *Înainte de tăierea firului* (T este tensiunea în fir) :

a) $T = G;\ X_A = G\frac{\sqrt{3}}{2};\ Y_A = \frac{G}{2};\ X_B = 0;\ Y_B = 2G;\ M_B = Gl\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $T = G\sqrt{3};\ X_A = G\frac{\sqrt{3}}{2};\ Y_A = \frac{-G}{2};\ X_B = 0;\ Y_B = 2G;\ M_B = Gl\frac{\sqrt{3}}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

c) $T = G\frac{\sqrt{3}}{3}$; $X_A = G\frac{\sqrt{3}}{6}$; $Y_A = \frac{G}{2}$; $X_B = 0$; $Y_B = 2G$; $M_B = 5G\frac{l}{4}$

După ruperea firului. Bara AC:

a) şi b) $\varepsilon = \frac{3g\sqrt{3}}{4l}$; $F_{tg} = \frac{3G\sqrt{3}}{8}$; $X_A = \frac{3G\sqrt{3}}{16}$; $Y_A = \frac{7G}{16}$; $X_B = X_A$;

$Y_B = \frac{23G}{16}$, $M_B = \frac{3G\sqrt{3}l}{16}$.

c) $\varepsilon = \frac{3g}{4l}$; $F_{tg} = \frac{3G}{8}$; $X_A = \frac{3G\sqrt{3}}{16}$; $Y_A = \frac{13G}{16}$; $X_A = \frac{3G\sqrt{3}}{16} = X_B$

$Y_B = \frac{29G}{16}$; $M_B = \frac{21}{16}Gl$.

10. *Static:* $\Sigma M_A = 0$:

a) $\begin{cases} N = 2G;\ F_A = 0; \\ I_A = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{12} + \frac{G}{g}\frac{10l^2}{16} = \frac{19}{24}\frac{G}{g}l^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} N = G;\ F_A = G. \\ I_A = \frac{23}{48}\frac{G}{g}l^2 \end{cases}$

Dinamic iniţial: a) $\varepsilon = \frac{24}{19}\frac{g}{l}$; b) $\varepsilon = \frac{36}{23}\frac{g}{l}$.

a) $\begin{cases} F_{tg} = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\varepsilon + \frac{G}{g}\frac{3l}{4}\varepsilon = \frac{24}{19}G; \\ F_A = Y_A = 2G - \frac{24}{19}G = \frac{14}{19}G; \end{cases}$ b) $\begin{cases} F_{tg} = \frac{27}{23}G \\ F_A = \frac{19}{23}G \end{cases}$

11. *Static:* $T(R + R\cos\alpha) = GR \Rightarrow T_{st} = \frac{G}{1+\cos\alpha}; \left(\frac{G}{2} \leqslant T \leqslant G\right)$

$F_{A_{st}} = G - T_{st} = \frac{G\cos\alpha}{1+\cos\alpha}; \left(0 \leqslant F_{A_{st}} \leqslant \frac{G}{2}\right)$

Se rupe firul: $M_{ext} = I_A\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{2g}{3R}$; $F_{itg} = \frac{2}{3}G$, deci $F_A = \frac{G}{3}$.

Concluzie: F_A rămîne acelaşi cînd $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60°$; $T = \frac{2G}{3}$.

F_A creşte pentru $\cos\alpha > \frac{1}{2}$; $\alpha < 60°$; $F_{A_{st}} < \frac{G}{3}$; $T_{st} > \frac{2G}{3}$.

F_A scade pentru $\cos\alpha < \frac{1}{2}$; $\alpha > 60°$; $F_{A_{st}} > \frac{G}{3}$; $T_{st} < \frac{2G}{3}$.

12. a) *Static:* $T = \frac{G}{2}$, deci $X_A = \frac{G}{2}$; $Y_A = G$.

La ruperea firului: $\omega = 0$, $\varepsilon = \frac{3g}{4l}$ dat de $M_{ext} = I_A\varepsilon$ unde momentul de inerţie faţă de A este: $I_A = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}$.

Deci: $F_c = 0$; $F_{tg} = \frac{G}{g}l\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon = \frac{3G\sqrt{2}}{8}$; $X_A = \frac{3G}{8}$; $Y_A = G - \frac{3G}{8} = \frac{5G}{8}$

Scanned with OKEN Scanner

În poziția II : $\varepsilon = \frac{3g}{4l}$ · Din lucrul mecanic $\omega^2 = \frac{3g}{l}$; $F_c = \frac{3G\sqrt{2}}{2}$

$F_{tg} = \frac{3G\sqrt{2}}{8}$; $X_A = \frac{15G}{8}$; $Y_A = \frac{17G}{8}$

b) *Static :* $T = G$; $X_A = G$; $Y_A = G$.

Calculul momentului de inerție în raport cu A : $I_A = \frac{5G}{g}\frac{l^2}{12}$.

La ruperea firului : $\varepsilon = \frac{6}{5}\frac{g}{l}$; $F_{tg} = \frac{3G}{5}$; $X_A = 0$; $Y_A = \frac{2G}{5}$.

În poziția II : $\varepsilon = \frac{3g\sqrt{2}}{5l}$; $\omega^2 = \frac{6g\sqrt{2}}{5l}$; $F_{tg} = \frac{3G\sqrt{2}}{10}$; $F_c = \frac{3G\sqrt{2}}{5}$

$X_A = F_{tg}\frac{\sqrt{2}}{2} + F_c\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9G}{10}$; $Y_A = G - F_{tg}\frac{\sqrt{2}}{2} + F_c\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{13G}{10}$.

13. *Static :* $G\frac{l}{2} + Gl = T\frac{3l}{4} \Rightarrow T = 2G$; $F_A = 0$

Se desparte punctul material G. $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T = \frac{2}{3}G$; $F_A = \frac{G}{3}$ articulația se desprinde căci $F_A > \frac{G}{4}$.

Se desprinde articulația. Sistemul rămîne suspendat de fir și inițial are rotație în jurul lui D (fig. X.13) ($\omega = 0$) $\Sigma M_D = 0$: $G\frac{l}{4} = I_D\varepsilon$ unde $I_D = \frac{G}{g}\frac{l^2}{6} + \frac{G}{g}OD^2 = \frac{23}{48}\frac{G}{g}l^2$ deci $\varepsilon = \frac{12}{23}\frac{g}{l}$; $F_{tg} = \frac{G}{g}OD \cdot \varepsilon =$

$= \frac{G}{g}\frac{l}{4}\sqrt{5}\cdot\frac{12}{23}\frac{g}{l} = \frac{3\sqrt{5}G}{23}$

$\bar{T}$ se va înclina după rezultanta lui $\bar{F}_{tg}$ și $\bar{G}$ și are inițial valoarea $T = G -$ $- F_{tg}\cos\alpha$ unde $\operatorname{tg}\alpha = 2$ din $\frac{OC}{CD} = \operatorname{tg}\alpha$ deci $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Rezultă T inițial $= G - \frac{15G}{23} = \frac{8G}{23}$

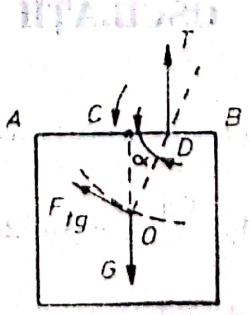


Fig. X.13

Scanned with OKEN Scanner

14. *Static :* $T = 4G$; $F_A = Y_A = -2G$.

Se rupe firul (fig. X.14, *a'*) $I_A = \frac{3}{2}\frac{G}{g} R^2 = \frac{G}{g}\frac{4R^2}{12} + \frac{G}{g} 9R^2 = \frac{65}{6}\frac{G}{g} R^2$

$M_{ext} = I_A \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{24}{65}\frac{g}{R}$; $F_{1tg} = \frac{G}{g} R\varepsilon = \frac{24}{65} G$; $F_{2tg} = \frac{G}{g} 3R\varepsilon = \frac{72}{65} G$

$F_A = Y_A = 2G - \frac{24}{65} G - \frac{72}{65} G = +\frac{24}{65} G.$

Se rupe articulația A. (fig. X.14. *a''*). Corpul inițial începe a se roti în jurul lui B : $I_B = \frac{41}{6}\frac{G}{g} R^2$; $M_{ext} = I_B \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{12}{41}\frac{g}{R}$

$F_{1tg} = \frac{G}{g} R\varepsilon = \frac{12G}{41}$; $F_{2tg} = \frac{G}{g} R\sqrt{5}\frac{12}{41}\frac{g}{R} = \frac{12\, G\sqrt{5}}{41}$.

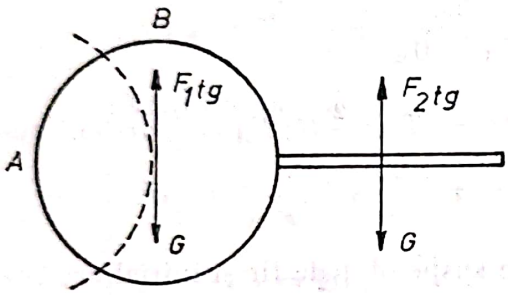


Fig. X.14, *a'*

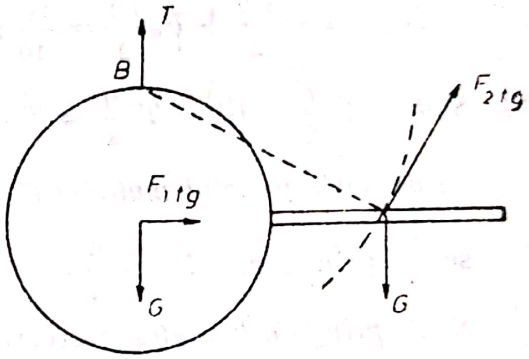


Fig. X.14, *a''*

Inițial $T = 2G - F_{2tg} \cos\alpha$ unde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{2R}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ deci $T = \frac{58\, G}{41}$,

dar din cauza lui F_{1tg} și a componentei pe orizontală a lui F_{2tg}, piesa se va deplasa spre dreapta iar $\bar{T}$ se va înclina pentru a fi pe rezultanta celorlalte forțe.

Capitolul XI

OSCILAȚII

1. $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ dar la $t = 0$, $x = 0$ deci $A \sin\varphi = 0$; $\varphi = 0$. Ecuația devine $x = A \sin\omega t$.

În A_1 : $\frac{1}{2} = A \sin\omega$; *În* A_2 : $\frac{\sqrt{3}}{2} = A \sin 2\omega = 2A \sin\omega \cos\omega$ de unde :

$\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega = \frac{\pi}{6}$; $A = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația mișcării este $x = \sin \frac{\pi}{6} t$. De aci $v = \dot{x} = \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} t$.

În O: $v_0 = \frac{\pi}{6}$; *În* A_1: $v_1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$; *în* A_2: $v_2 = \frac{\pi}{12}$.

2. Mobilul plecînd din origină ecuația mișcării este $x = A \sin \omega t$ de unde $v = A\omega \cos \omega t$.

În origină: $0 = A \sin 0$; $4 = A\omega$.

În B: $1 = A \sin \omega t_B$; $2\sqrt{3} = A\omega \cos \omega t_B \Rightarrow \omega_B = \frac{\pi}{6}$, $A = 2$; $\omega = 2$.

Ecuația mișcării este $x = 2 \sin 2t$.

Legea conservării energiei (mobilul are masă m):

În origine: $E_{cinetic} = \frac{mv^2}{2} = m \cdot 8$; $E_{pot} = -L = 0$; $E_{total} = m \cdot 8$.

În B: $E_c = m \cdot 6$; $L_{OB} = \int_0^1 ma\,dx$ (unde $a = -\omega^2 x = -4x$) deci

$L_{OB} = \int_0^1 -4m\ x\,dx = -2m$; $E_{pot} = -L_{OB} = 2\,m$; $E_{total} = m \cdot 8$.

În A: $E_c = 0$; $L_{OA} = \int_0^2 -4mx\,dx = -m \cdot 8$; $E_{pot} = -L_{OA} = m \cdot 8$;

$E_{total} = m \cdot 8$.

3. Avem $x = A \sin(\omega t + \varphi)$, deoarece la $t = 0$, $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi) = 0$. avem $\varphi = \frac{\pi}{2}$, deci $x = A \cos \omega t$. Avem $T_{sec} = 8$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$

La $t = 0$; $x = 3 \Rightarrow A = 3$. Ecuația mișcării este $x = 3 \cos \frac{\pi}{4} t$.

În origine: $x = 0$; $t = 2$ sec; $v = \dot{x} = -\frac{3\pi}{4}$; $L = 0$;

$$E_{pot} = 0,\ E_c = \frac{m \cdot 9\pi^2}{32},\ E_{total} = \frac{m \cdot 9\pi^2}{32}.$$

În B: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = 1$; $\dot{x} = -\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$; $E_c = \frac{9\pi^2}{64} m$;

$$L = \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} -m\omega^2\, x\,dx = -\frac{m\pi^2 9}{64};$$

$E_{pot} = -L = \frac{9m\pi^2}{64}$; $E_{total} = \frac{9\pi^2 m}{32}$.

În A: $x = 3$; $t = 0$; $v = 0$, $E_{cin} = 0$; $L = \int_0^3 -m\omega^2\ x\,dx =$

$= \frac{m\pi^2 9}{32}$; $E_{pot} = \frac{9\pi^2 m}{32}$; $E_{total} = \frac{9\pi^2 m}{32}$

4. Identificînd coeficienții în identitatea:

$x = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t \equiv A \sin(2t + \varphi) = A \sin 2t \cos \varphi + A \cos 2t \sin \varphi$.

avem:

$A \cos \varphi = 4$; $A \sin \varphi = 3 \Rightarrow A = 5$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$; $\varphi \cong 36° = \frac{\pi}{5}$.

Deci amplitudinea este 5, perioada $T_{sec} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ și ecuația mișcării

Scanned with OKEN Scanner

$x = 5 \sin (2t + \frac{\pi}{5})$. La $t=0$ mobilul este în punctul M_1 dat de $x_1 = 5 \sin \frac{\pi}{5}$ cu viteza $v_1 = 10 \cos \frac{\pi}{5}$.

5. Prin identificarea coeficienților la :

a) $x = \sqrt{3} \cos \pi t + 3 \sin \pi t \equiv A \sin (\pi t + \varphi) \Rightarrow A = 2\sqrt{3}$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Deci ecuația mișcării este : $x = 2\sqrt{3} \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$; $\omega = \pi$; $T_{sec} = 2$.

Legea conservării energiei :

În origină : $x = 0$; $\pi t = -\frac{\pi}{6}$; $\dot{x} = 2\pi\sqrt{3} \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi\sqrt{3}$

$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} = 6\, m\pi^2$; $L = 0$; $E_{pot} = 0$; $E_{total} = 6m\pi^2$.

La $t = 0 : x = \sqrt{3}$; $\dot{x} = 3\pi$; $E_c = \frac{m \cdot 9\pi^2}{2}$; $L = \int_0^{\sqrt{3}} -m\omega^2 x\,dx = \frac{-m\pi^2 3}{2}$

$$E_{pot} = \frac{m\pi^2 3}{2} \; ; \quad E_{total} = 6m\pi^2.$$

La extremitate : $\sin (\pi t + \frac{\pi}{6}) = 1$; $\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$; $t = \frac{1}{3}$;

$x = 2\sqrt{3}$; $\dot{x} = 0$; $E_c = 0$; $L = \int_0^{2\sqrt{3}} -m\omega^2\, x\,dx = -\frac{m\pi^2}{2} \cdot 12$,

$$E_{pot} = 6m\pi^2 \; ; \quad E_{total} = 6m\pi^2.$$

b) Ecuația mișcării devine $x = 2 \sin (\pi t - \frac{\pi}{6})$; $\omega = \pi$, $T_{sec} = 2$.

În origină : $x = 0$; $t = \frac{1}{6}$; $\dot{x} = 2\pi$; $E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} = 2\pi^2 m$;

$$L = 0 \; ; \quad E_{total} = 2\pi^2 m.$$

La $t = 0 : x = 1$; $x = \pi\sqrt{3}$; $E_c = \frac{m \cdot 3\pi^2}{2}$; $L = \int_0^1 -m\omega^2\, x\,dx =$

$= -\frac{m\pi^2}{2}$; $E_p = -L = +\frac{m\pi^2}{2}$; $E_{total} = 2m\pi^2$.

La extremitate : $\pi t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$; $t = \frac{2}{3}$; $x = 2$; $\dot{x} = 0$; $E_c = 0$;

$$L = \int_0^2 -m\omega^2\, x\,dx = -\frac{m\pi^2}{2} 4, \quad E_p = 2m\pi^2 \; ;$$

$$E_{total} = 2m\pi^2.$$

6. Se determină K al resortului : $T = G = K\Delta l_0$; $K = \frac{4G}{l_0} = 8G$.

Determinarea distanței pînă la oprire (originea pentru x este în O) :

Prin legea lucrului mecanic :

$-\mu G x - \int_0^x K x\,dx = -\frac{G}{g} \frac{v_0^2}{2}$ de unde $x \approx \frac{9}{8}$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Prin legea lui Newton :

$$m\ddot{x} = -\mu G - Kx \Rightarrow \ddot{x} + 8g\left(x + \frac{1}{16}\right) = 0$$

punînd $\sqrt{8g} \approx 9$ avem $x + \frac{1}{16} = A \cos 9t + B \sin 9t$.

Condiţiile iniţiale $t = 0$; $x = 0$, $v_0 = 10$ deci $A = \frac{1}{16}$; $B = \frac{10}{9}$ de unde :

$x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \cos 9t + \frac{10}{9} \sin 9t \equiv A_0 \sin (9t + \varphi)$

iar prin identificare $A_0 \sin \varphi = \frac{1}{16}$; $A_0 \cos \varphi = \frac{10}{9}$; $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}056$

$\varphi \approx 3° \approx \frac{\pi}{60}$ rad ; $A_0 \approx \frac{10}{9}$. Deci distanţa maximă este $x_{max} = \frac{1}{16} + \frac{10}{9} \approx$

$\approx \frac{18}{16}$ m, acelaşi rezultat (ţinînd seama de aproximări) ca prin legea lucrului mecanic.

7. Din $K\Delta l_0 = G = mg \Rightarrow K \approx 160$. Condiţiile iniţiale : $t = 0$, $x = \frac{1}{8}$, $v = 9$.

Ecuaţia mişcării : $m\ddot{x} = -Kx + mg$ sau

$\ddot{x} + \frac{K}{m}\left(x - \frac{m}{K} g\right) = 0$; $\ddot{x} + 80\left(x - \frac{1}{8}\right) = 0$; $\omega = \sqrt{80} = 9$; $T_{sec} = \frac{2\pi}{9}$.

Integrînd :

$$x - \frac{1}{8} = A \cos 9t + B \sin 9t ;$$

$$v = -9A \sin 9t + 9B \cos 9t.$$

Din condiţiile iniţiale : $A = 0$, $B = 1$ deci $x = \frac{1}{8} + \sin 9t$; $x_{max} = \frac{9}{8}$;

$x_{min} = -\frac{7}{8}$. Mobilul oscilează în jurul lui $x = \frac{1}{8}$ ca centru cu distanţe egale cu 1 de fiecare parte.

8. $K = \frac{G}{0{,}1} = 10\,G$. Ecuaţia mişcării: $m\ddot{x} = -Kx + mg$ sau $\ddot{x} + 10g\left(x - \frac{1}{10}\right) =$

$= 0$. La $t = 0$, $x = 0$, $v = 0$. Ecuaţia integrată este $x = \frac{1}{10} +$

$+ A \cos \sqrt{10g}t + B \sin \sqrt{10g}t \Rightarrow A = -\frac{1}{10}$;

$$B = 0,\ \omega = \sqrt{10g}\ ;\ T_{sec} = \frac{2\pi}{\sqrt{10g}}\ .$$

Ecuaţia devine : $x = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \cos \sqrt{10g}t$; $x_{max} = \frac{2}{10}$ cînd $\cos \sqrt{10g}t =$

$= -1$, $t = \frac{\pi}{\sqrt{10g}} \approx \frac{\pi}{10}$; $x_{min} = 0$, la $\cos \sqrt{10g}\ t = 1$: $t = 0$.

9 *Determinarea lui* K : $2G = K\frac{l_0}{4} \Rightarrow K = 400$. După rupere :

$m\ddot{x} = -Kx + mg$ sau $\ddot{x} + 80\left(x - \frac{1}{8}\right) = 0$; $\omega = \sqrt{80} \approx 9$; $T_{sec} = \frac{2\pi}{9}$

$x - \frac{1}{8} = A \cos 9t + B \sin 9t$ cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $x_0 = \frac{1}{4}$; $v_0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Se obține: $A = \frac{1}{8}$; $B = 0$ deci $x = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 9t$; $x_{max} = \frac{1}{4}$ la $t = 0$.

Mișcarea este oscilatorie în jurul punctului de echilibru static.

10. *Statica:* $mg = 20 = K \cdot \Delta l = K\frac{1}{10} \Rightarrow K = 200$.

Mișcarea în mediu fluid: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10$; $T_{sec} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} =$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{100 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{6}; \quad \alpha = 8.$$

Ecuația mișcării este

$$m\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + Kx = 0 \text{ sau } \ddot{x} + 8\dot{x} + 100x = 0.$$

Rezistența fluidului: $K_1 v = 2m\alpha v = 32v$.

Din ecuația caracteristică $r^2 + 8r + 50 = 0 \Rightarrow r \cong -4 \pm 9i$

deci $x = e^{-4t}(B_1 \cos 9t + B_2 \sin 9t)$. Condițiile inițiale $t = 0$, $x = \frac{1}{10}$;

$v = 4$ dau $B_1 = \frac{1}{10}$; $B_2 = \frac{22}{45} \approx \frac{1}{2}$, deci:

$x = e^{-4t}\left(\frac{1}{10}\cos 9t + \frac{1}{2}\sin 9t\right) \equiv e^{-4t} A_0 \sin(9t + \varphi) \Rightarrow A = \frac{10{,}2}{20} \approx$

$\approx 0{,}51$; $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}4$; $\varphi \approx 22° = \frac{11\pi}{90}$.

Ecuația este deci: $x = 0{,}5e^{-4t}\sin\left(9t + \frac{11\pi}{90}\right)$.

11. *Static:* $T = K\Delta l = G \Rightarrow K\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$; $K = 4$.

Mișcarea punctului material fără resort în mediu fluid. Forța este $-K_1 v$

$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = -K_1 v$, sau $\left(\text{deoarece } v = \frac{ds}{dt}\right)$; $\frac{dv}{ds} = -\frac{K_1}{m} = -20K_1$ de

aci $v_1 - v_0 = -20K_1 s$; $v_1 = 0$ pentru $s = \frac{1}{4}$; $K_1 = \frac{v_0}{5} = 2$.

Mișcarea punctului material cu resort în mediu fluid:

$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$ unde $2\alpha = \frac{K_1}{m} = 2 \cdot 20 = 40$; $\alpha = 20$; $\omega^2 = \frac{K}{m} = 80$.

Ecuația caracteristică $r^2 + 40r + 80 = 0 \Rightarrow r_1 = 20 + 18 = -2$; $r_2 = -38$.

Ambele rădăcini negative reale, mișcarea nu e oscilatorie: $x = Ae^{-2t} +$

$+ Be^{-38t}$; condițiile inițiale $t = 0$; $x = 0$; $v = 10$, găsim $A = \frac{5}{18}$; $B =$

$= -\frac{5}{18}$; deci: $x = \frac{5}{18}(e^{-2t} - e^{-38t})$, iar viteza $v = \frac{5}{18}(38e^{-38t} - 2e^{-2t})$.

Viteza e nulă cînd $19e^{-38t} = e^{-2t}$ sau $-2t = \log 19 - 38t \Rightarrow t = \frac{2{,}94}{36} \approx 0{,}08$ s.

12. *Static* găsim $K = 300$.

Pulsația forței impuse este $\lambda = 9{,}99$ deci $\lambda^2 = 99{,}89$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația mișcării este

$m\ddot{x} = -Kx + P_0 \cos \lambda t$ sau $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \cos \lambda t$

unde $\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{300}{3} = 100 \Rightarrow \omega = 10$; $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{10}$.

Integrala este compusă din integrala fără membrul al doilea care este o oscilație armonică de perioadă T_1 și de integrala particulară a membrului doi: $\frac{P_0}{m(\omega^2 - \lambda^2)} \cos \lambda t$ de perioadă T_2, care este o oscilație armonică de pulsație λ. Deci:

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{P_0}{m(\omega^2 - \lambda^2)} \cos \lambda t = x_1 + x_2$ unde

$x_1 = A \cos 10t + B \sin 10t$ și cu condițiile: la $t = 0$
$x_1 = 0$, $v = 10 \Rightarrow A = 0$; $B = 1$, avem $x_1 = \sin 10t$.

$x_2 = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \lambda^2)} \cos \lambda t = \frac{20}{3(100 - 99{,}89)} \cos 9{,}99t$ sau

$x = \sin 10t + 60{,}6 \cos 9{,}99t$. Amplitudinea dată de forța P_0 acopere cu mult mișcarea proprie.

13. *Oscilația proprie* dată de resort are

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$, $T_1 = \frac{2\pi}{5}$ de forma $x_1 = A \cos 5t + B \sin 5t$.

Oscilația impusă care se suprapune are:

$\lambda = 4{,}99$ și $x_2 = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \lambda^2)} \cos 4{,}9t = \frac{20}{4(25 - 24{,}9)} \cos 4{,}99t = 50 \cos 4{,}99t$

Din condițiile inițiale pentru oscilația proprie găsim: $A = 0$; $B = 2$. Deci mișcarea este $x = x_1 + x_2 = 2 \sin 5t + 50 \cos 4{,}99t$.

14. Aci $\lambda = \omega = 5\text{s}^{-1}$. Oscilația proprie este aceeași: $x_1 = 2 \sin 5t$.
Soluția parțială a membrului doi este:

$$\frac{P_0}{2m\lambda} t \sin \lambda t = \frac{20}{2 \cdot 4 \cdot 5} t \sin 5t$$

deci $x_2 = \frac{1}{2} t \sin 5t$, unde amplitudinea este $\frac{1}{2} t$, deci crește cu t.

Pentru ca $\frac{1}{2} t = 10 \cdot 2$, avem $t = 40$ s. Cum o oscilație se face în $T = \frac{2\pi}{5} = 1{,}25$ s, această amplitudine va fi atinsă după $\frac{40}{1{,}25} = 32$ oscilații.

15. $T_1 = T_2 = Kx$ (fig. X.15). Ecuația mișcării este $m\ddot{x} = -2Kx$, de unde $\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 2\sqrt{\frac{2g}{l}}$; $T_{sec} = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$. Integrînd ecuația mișcării:

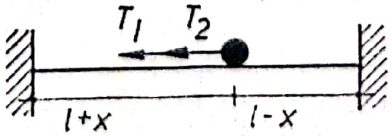


Fig. XI.15

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$; la $t = 0$, $x = \frac{l}{4}$; $v = 0$ deci $A = \frac{l}{4}$; $B = 0$ și $x = \frac{l}{4} \cos \omega t$.

Pentru $x = 0$: $\omega t = \frac{\pi}{2}$; $v = \dot{x} = -\omega \frac{l}{4} \sin \omega t$ devine $v = -\omega \frac{l}{4} = \sqrt{\frac{gl}{2}}$.

16. a) Fixînd punctul material B avem pentru A, $m\ddot{x} = -(K_1 + K_2)x$ deci $\omega_A = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}} = \sqrt{\frac{6g}{l}} = \omega_B$ deoarece poziţiile punctelor materiale sînt simetrice.

b) Ecuaţia mişcării lui A este :

$$x = \frac{l}{4} \cos 2 \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{1}$$

A este acţionat de : $T_1 = -(K_1 + K_2)\, x + K_2 y$ (unde y este deplasarea lui B), iar B este acţionat de $T_2 = -(K_1 + K_2)y + K_2 x$.

Deci *ecuaţia mişcării lui* A este : $m\ddot{x} + (K_1 + K_2)x - K_2 y = 0$ sau

$$\frac{1}{\omega_A^2} \ddot{x} + x = \frac{K_2}{K_1 + K_2}\, y \tag{2}$$

unde : $\omega^2_A = \frac{K_1 + K_2}{m}$

Ecuaţia mişcării lui B : $m\ddot{y} + (K_1 + K_2)y - K_2 x = 0$ sau $\omega_B^2 \ddot{y} + y = \frac{K_2}{K_1 + K_2}\, x$ (3)

unde : $\omega^2_B = \frac{K_1 + K_2}{m}$

Înlocuind relaţia (1) în (2) şi ţinînd seama de valorile lui K_1, K_2 şi ω_A rezultă :

$$y = 3 \frac{l}{4} \left(1 - \frac{4 \frac{g}{l}}{6 \frac{g}{l}} \right) \cos 2 \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \text{ sau } y = \frac{l}{4} \cos 2 \sqrt{\frac{g}{l}}\, t ;$$

deci punctul B are şi el o mişcare cosinusoidală de aceeaşi amplitudine. $A = \frac{l}{4}$ şi de aceeaşi pulsaţie $\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{l}}$.

17. Momentul de inerţie al roţii în raport cu punctul fix O este $I_0 = \frac{3}{2} \frac{G}{g} R^2$.

a) Fie T_1 şi T_2 tensiunile date de cele două resoarte $T_1 = T_2 = KR\theta$. *Ecuaţia mişcării* este :

$$\frac{3}{2} \frac{G}{g} R^2 \ddot{\theta} = -2KR\theta \cdot R = -2KR^2\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{8g}{3R}\, \theta = 0 ; \quad \omega = \sqrt{\frac{8g}{3R}}$$

$$T_{sec} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{8g}} .$$

b) $T_1 = T_2 = 2K \cdot 2R\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{32g}{3R}} \Rightarrow T_{sec} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{32g}}$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Avem $K = \frac{G}{\Delta l_0} = \frac{G}{l_0} = \frac{2G}{l}$; θ fiind mic putem scrie (fig. X.18) : $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{x}{l}$; $\cos\theta \approx 1$. Avem $T = K\Delta l = K\left(\frac{l}{\cos\theta} - l_0\right) = \frac{2G}{l}\left(\frac{l}{\cos\theta} - l_0\right)$.

$\frac{G}{g}\ddot{x} = -2T\sin\theta = -2T\frac{x}{l}$ deci $\ddot{x} + \frac{4g}{l}\left(l - l_0\right)\frac{x}{l} = 0$

sau avînd $l_0 = \frac{l}{2}$; $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

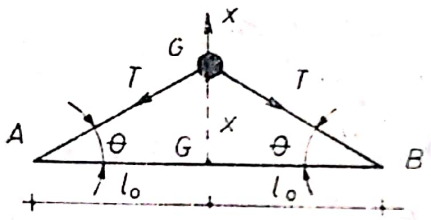


Fig. XI.18

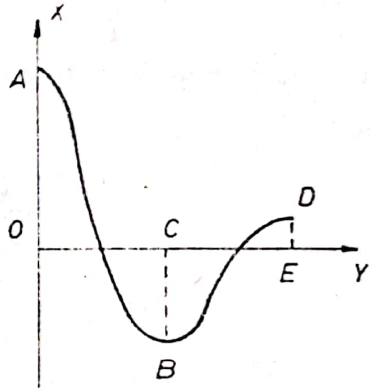


Fig. XI 19

19. Forța dată de resoarte este $F = -2T\sin\theta = -\frac{2G}{l}x$ forța de frecare este $\frac{G}{10}$. Ecuația mișcării $\frac{G}{g}\ddot{x} + \frac{2G}{l}x - \frac{G}{10} = 0$ dă ca rezultat o mișcare oscilatorie cu $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ și amplitudine descrescătoare. Din legea lucrului mecanic între două opriri avem :

$$L = \int_{\frac{l}{4}}^{x_1} -\frac{2G}{l}x\,dx + \int_{\frac{l}{4}}^{x_1}\frac{G}{10}\,dx = 0 \text{ care dă } x_1 = -\frac{3l}{20}.$$

Continuînd la fel avem pentru a doua oprire $x_2 = \frac{l}{20}$ unde se oprește definitiv căci acolo viteza e nulă iar forța de frecare este egală cu cea dată de resoarte : $\frac{G}{10} = \frac{2G}{l}\frac{l}{20}$.

Ținînd seama că $\frac{l}{4} = \frac{5l}{20}$ avem figura XI.19 : $OA = \frac{5l}{2}$; $BC = -\frac{3l}{20}$; $DE = \frac{l}{20}$.

20. *Static :* $2T \sin\alpha = G$ dar $T = 2K\left(\frac{l}{\cos\alpha} - l_0\right)$ $\sin\alpha = G$ dar $\sin\alpha \cong \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{l}$, şi $l_0 = \frac{l}{2}$ deci $\frac{4G}{l}\frac{x}{2} = G$; $x = \frac{l}{2}$ la echilibru static. Deplasăm punctul material în jos cu $\frac{l}{4}$.

Ecuaţia mişcării :

$\frac{G}{g}\ddot{x} + 2Gx - G = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$; mişcare oscilatorie.

Legea lucrului mecanic între două opriri :

$L = \int_{\frac{3l}{4}}^{x} -\frac{2G}{l}x\,dx + \int_{\frac{3l}{4}}^{x} G\,dx = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{4}$. Mişcarea oscilatorie armonică între două puncte situate cu $\frac{l}{4}$ de fiecare parte a poziţiei de echilibru static.

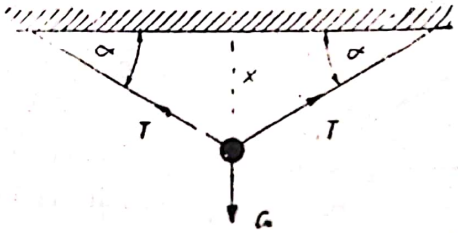


Fig. XI.20

21. a) *Static :* Din $\Sigma M_A = 0$: $T_{static} = G$.

Determinarea lui K : $G = T = K\Delta l_0 = K\frac{l}{4} \Rightarrow K = \frac{4G}{l}$.

$I_A = \frac{2G}{g}\frac{4}{3}\frac{l^2}{} + \frac{G}{g}\frac{l^2}{3} = \frac{3G}{g}l^2$; $T_{dinamic} = T_{st} + K\Delta l = T_{st} + K2\,l\theta$ (θ este unghiul mic cu care se înclină AC în timpul oscilaţiilor, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$).

Din $M_{ext} = I_A\varepsilon$ avem $2Gl\cos\theta + G\frac{l}{2}\sin\theta - T_{din}\,2l = \frac{3G}{g}l^2\ddot{\theta}$ sau $\ddot{\theta} + \frac{31}{6}\frac{g}{l}\theta = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{31}{6}\frac{g}{l}}$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{6}{31}\frac{l}{g}}$.

b) Aceleaşi K, I_A, T_{st}. Din $M_{ext} = I_A\varepsilon$ avem :

$2Gl - \frac{Gl}{2}\theta - \frac{4G}{l}2l\,\theta\,2l - G\cdot 2l = \frac{3}{g}Gl^2\ddot{\theta}$ sau $\ddot{\theta} + \frac{11}{2}\frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{11}{2}\frac{g}{l}}$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{11}\frac{l}{g}}$.

55 Aci $T_{static} = 0$; $T_{din} = K\Delta l = K\frac{3R}{2}\theta = 6G\theta$. Din $I_A\ddot{\theta} = M_A$ avem

$\frac{3}{4}\frac{G}{g}R^2\ddot{\theta} = G\frac{R}{2}\theta - 6G\theta\cdot\frac{3R}{2}$ sau $\ddot{\theta} + \frac{34g}{3R}\theta = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{34g}{3R}}$

$T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{34g}}$.

23. a) $I_A = \frac{2G}{g}\,\frac{l^2}{3}$; $My_G = \frac{2G}{g}\,\frac{l\sqrt{3}}{4}$ deci $l_0 = \frac{I_A}{My_G} = \frac{4l\sqrt{3}}{9}$; $T_{sec} =$

$= 2\pi\sqrt{\frac{4l\sqrt{3}}{9g}}$.

b) Cînd se prinde resortul, avem în stare statică $T_{st} = \frac{3G}{4}\,\frac{l}{x}$.

Dinamic : $T_{din} = T_{st} + Kx\theta = \frac{3G}{4}\,\frac{l}{x} + \frac{4G}{l}\,x\theta$.

Din $M_{ext} = I_A\,\ddot{\theta} \Rightarrow 3G\,\frac{l}{4} - \left(\frac{3G}{4}\,\frac{l}{x} + \frac{4G}{l}\,x\theta\right)x = \frac{2G}{g}\,\frac{l^2}{3}\,\ddot{\theta}$.

Avem $\omega = \sqrt{\frac{6g\,x^2}{l^3}}$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l^3}{6g\,x^2}}$. Pentru a fi egal cu cel de sus $\Rightarrow \frac{l^3}{6g\,x^2} = \frac{4l\sqrt{3}}{9g} \Rightarrow x^2 = \frac{l^2\sqrt{3}}{8}$ sau $x \approx 0{,}465\,l$.

c) Același K și I_A; $My_G = \frac{2G}{g}\,\frac{l}{4}$; $l_0 = \frac{4l}{3}$

În oscilații *fără resort :* $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{3g}}$;

Cu resort : $T_{st} = \frac{G}{4}\,\frac{l}{x}$; $T_{din} = \frac{G}{4}\,\frac{l}{x} + \frac{4G}{l}\,x\theta$.

Ecuația mișcării : $\frac{2G}{g}\,\frac{l^2}{3}\,\ddot{\theta} + \frac{4G}{l}\,x^2\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{6g\,x^2}{l^3}$

pentru a avea același $T_{sec} \Rightarrow \frac{4l}{3g} = \frac{l^3}{6g\,x^2} \Rightarrow x = \frac{l}{2\sqrt{2}} = 0{,}356\,l$.

24. În toate cazurile mișcările sînt de rotație cu unghi mic θ în raport cu articulația A :

a) $I_A = \frac{7}{4}\,\frac{G}{g}\,l^2$; $T_{st} = 3G$; $T_{din} = 3G + \frac{4G}{l}\,\frac{l}{2}\,\theta$.

Ecuația mișcării : $\frac{7}{4}\,gl\,\ddot{\theta} + \theta = 0$: $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{4}\,\frac{l}{g}}$.

b) $I_A = \frac{2G}{g}\,l^2$; $T_{st} = \frac{3G}{2}$; $T_{din} = \frac{3G}{2} + 4G\theta$

Ecuația mișcării : $\frac{l}{g}\,\ddot{\theta} + 2\theta = 0$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

c) Aceleași rezultate ca la (a).

d) $I_A = \frac{2G}{g}\,l^2$; $T_{st} = G$; $T_{din} = G + 4G\theta$.

Ecuația mișcării : $\frac{l}{g}\,\ddot{\theta} + 2\theta = 0$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

e) $I_A = \frac{11}{4}\,\frac{G}{g}\,l^2$; $T_{st} = 3G$; $T_{din} = 3G + 2G\theta$.

Ecuația mișcării : $\frac{11}{4}\,\frac{l}{g}\,\ddot{\theta} + \theta = 0$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{11l}{4g}}$.

Scanned with OKEN Scanner

f) $I_A = \frac{11}{4}\frac{G}{g}l^2$; $T_{st} = \frac{3G}{2}$; $T_{din} = \frac{3G}{2} + 4G\theta$.

Ecuația mișcării: $\frac{11}{4}\frac{l}{g}\ddot{\theta} + 4\theta = 0$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{11}{16}\frac{l}{g}}$.

g) $I_A = \frac{7}{4}\frac{G}{g}l^2$; $T_{st} = \frac{G}{2}$; $T_{din} = \frac{G}{2} + 4G\theta$.

Ecuația mișcării: $\frac{7}{4}\frac{l}{g}\ddot{\theta} + 4\theta = 0$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{16}\frac{l}{g}}$.

h) Același rezultat ca la (g).

25. a) $I_A = \frac{8G}{g}\frac{4l^2}{3} - \left(\frac{2G}{g}\frac{l^2}{12} + \frac{G}{g}\frac{9l^2}{2}\right) = \frac{6G}{g}l^2$.

$My_G = \frac{4G}{g}l\sqrt{2} - \frac{G}{g}\frac{3l\sqrt{2}}{2} = \frac{5G}{g}\frac{l\sqrt{2}}{2}$; $l_0 = \frac{I_A}{My_G} = \frac{6l\sqrt{2}}{5}$

$T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{6l\sqrt{2}}{5g}}$.

b) $I_A = \frac{51}{6}\frac{G}{g}l^2$; $My_G = \frac{3G}{g}l\sqrt{2}$; $l_0 = \frac{51\sqrt{2}}{36}l$;

$T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{51\sqrt{2}\,l}{36g}}$.

c) Același rezultat ca la (b).

26. a) $T_{st} = \frac{5G}{3}$; $T_{din} = \frac{5G}{3} + K\frac{3l\sqrt{2}}{2}\theta = \frac{5G}{3} + 6G\sqrt{2}\theta$;

Ecuația mișcării: $\frac{6G}{g}l^2\ddot{\theta} = 4gl\sqrt{2} - G\frac{3l\sqrt{2}}{2} -$

$-\left(\frac{5G}{3} + 6G\sqrt{2}\theta\right)\frac{3l\sqrt{2}}{2}$,

sau $\ddot{\theta} + \frac{3g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

b) $T_{st} = \frac{3g}{2}$; $T_{din} = \frac{3G}{2} + K2l\sqrt{2}\theta = \frac{3G}{2} + 8G\sqrt{2}\theta$.

Ecuația mișcării: $\frac{51}{6}\frac{G}{g}l^2\ddot{\theta} = 3Gl\sqrt{2} - \left(\frac{3G}{2} + 8G\sqrt{2}\theta\right)2l\sqrt{2}$ de

unde $\ddot{\theta} + \frac{64}{17}\frac{g}{l}\theta = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{64}{17}\frac{g}{l}}$; $T_{sec} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{17\,l}{g}}$.

c) Același rezultat ca la (b).

27. a) *Mișcarea oscilatorie în raport cu axa prin A*

$$I_A = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3} + \frac{G}{g}\frac{l^2}{12} + \frac{G}{g}\frac{3l^2}{4} = \frac{3}{2}\frac{G}{g}l^2; \quad My_G = \frac{3G}{g}\frac{l\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$l_0 = \frac{I_A}{My_G} = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Scanned with OKEN Scanner

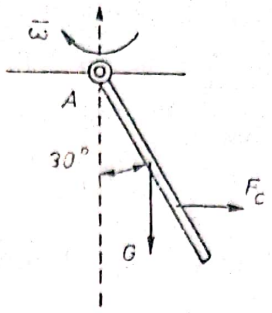


Fig. XI.27

b) *Mișcarea oscilatorie în raport cu axa orizontală prin A (axa OO').*

$I_{OO'} = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3} + \frac{G}{g}\frac{l^2}{12} = \frac{3}{4}\frac{G}{g}\,l^2$; $My_G = \frac{G}{g}\,l\sqrt{3}$; $l_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,l$.

c) *Mișcarea ca pendul conic.* Forța centrifugă $F_c = \frac{G}{g}\frac{l}{4}\,\omega^2$.

Din $\Sigma M_A = 0$ avem $\omega^2 = \frac{g\sqrt{3}}{l}$.

Capitolul XII

MIȘCĂRI RELATIVE

1 Vom nota cu v_a viteza absolută, cu v_{tr} viteza de transport, cu v_r viteza relativă. Analog pentru accelerații (fig. XII.1).

a) Omul înaintează cu $\bar{v}_{tr} = 3$ km/h. Ploaia cade vertical cu $\bar{v}_r$ pe umbrelă $AB = \bar{v}_{tr} = 3$; $\overline{BC} = v_r = ?$

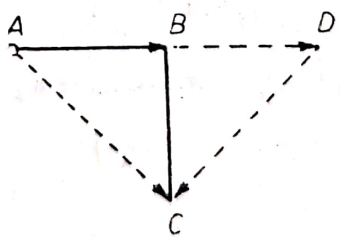


Fig. XII.1

b) Omul merge cu viteza dublă AD, $\bar{v}_r'$ este la 45° (DC), $\bar{v}_a$ fiind aceeași AC și $\bar{v}_a = \bar{v}_r' + \bar{v}_c$. Căpătăm deci $AC = 3\sqrt{2} = DC$; $\bar{v}_r = BC = AB = 3$; $DC = 3\sqrt{2} = \bar{v}_a$.

c) În repaus, umbrela va fi înclinată după $\bar{v}_a$ deci cu 45° spre spate.

Scanned with OKEN Scanner

2. $AB = s_a$; $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ unde $v_t = 2$, $v_r = 3$.
Din figura XII.2, *a''*, $v_a \cos\alpha = 2 - 3\cos\varphi$, $v_a \sin\alpha = 3\sin\varphi$

$v_a = \sqrt{13 - 12\cos\varphi} = \dfrac{120}{\sin\alpha t}$ iar $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3\sin\varphi}{2 - 3\cos\varphi}$ de unde

$t = \dfrac{120}{3\sin\varphi}$ · Pentru t_{min}, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ deci $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{2}$; $\alpha \cong 56°15'$,

$v_a = \sqrt{13}$; $t = \dfrac{l}{3} = \dfrac{0{,}12}{3} = 0{,}04\ h = 2{,}4$ min.

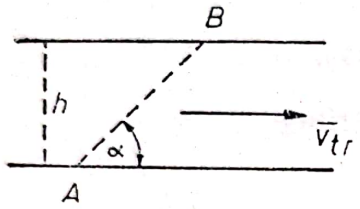


Fig. XII.2, *a'*

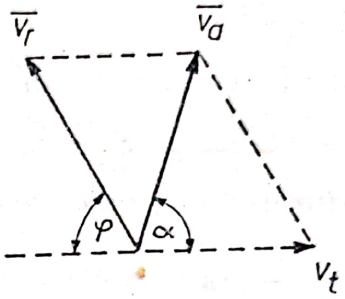


Fig. XII.2, *a''*

3. Din mişcarea sistemului deducem că acceleraţia barei orizontale este $a_t = \dfrac{g}{3}$ în jos. Bara plecînd din repaus are $\dfrac{l}{4} = \dfrac{g}{3}\dfrac{t^2}{2}$ deci $t = \sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{l}{g}}$,

iar după acest timp are $v_{tr} = \dfrac{g}{3}t = \sqrt{\dfrac{lg}{6}}$.

Mobilul se deplasează în acest timp cu l: $l = \dfrac{a_r t^2}{2} \Rightarrow a_r = \dfrac{4g}{3}$; iar în B, $v_r = \dfrac{4g}{3}t = 2\sqrt{\dfrac{2lg}{3}}$. Deci în B avem

Viteze (fig. XII.3, *a'*): $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_{tr} \Rightarrow v_a = \sqrt{\dfrac{17lg}{6}}$; $\bar{v}_r = 2\sqrt{\dfrac{2lg}{3}}$;

$$v_{tr} = \sqrt{\frac{lg}{6}}.$$

Acceleraţii (fig. XII.3, *a''*): $\bar{a}_a = \bar{a}_{tr} + \bar{a}_r \Rightarrow a_a = \dfrac{g}{3}\sqrt{17}$; $\bar{a}_r = \dfrac{4g}{3}$; $a_{tr} = \dfrac{g}{3}$.

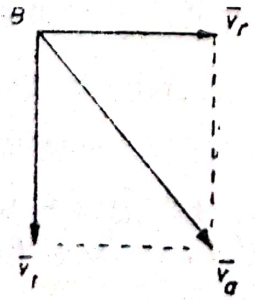


Fig. XII.3, *a'*

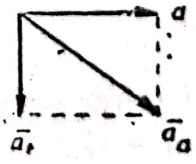


Fig. XII.3, *a''*

Scanned with OKEN Scanner

4. a) Din $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_{tr}$ avem $-25 + 20 = -5$ m/s.
Mișcarea parabolică : Ecuațiile sale parametrice sînt $x = 5t$; $y = 2 = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $x \approx 3{,}1$ m.

Aceasta este distanța de la punctul de lansare, înapoia mișcării trenului. În acest timp trenul a înaintat $s = v_{tr} \cdot t = 20\sqrt{\frac{2}{5}} = 12{,}4$ m.

Deci între fereastra de unde a fost lansat și mobil, în momentul în care mobilul atinge solul sînt 15,5 m (pe orizontală).

b) Aci $v_a = 45$ m/s. În mișcarea parabolică :

$x = 45t$; $y = \frac{gt^2}{2} = 2 \Rightarrow x = 27{,}90$ m. Trenul a înaintat cu 12, 4 m deci distanța între ele la momentul cînd punctul e pe sol este $27{,}9 - 12{,}4 =$ $= 15{,}5$ pe orizontală în direcția mersului.

c) $v_x = 20$; $v_y = 25$; $x = 20t$; $y = 25t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = 0{,}08$ s $\quad x = 1{,}6$ m.

Trenul a înaintat cu $s = 1{,}6$ m. Distanța între mobil și tren pe orizontală este nulă.

5. Proiecțiile lui $\bar{v}_a$ a proiectilului sînt :
Pe Ox : $v_x = 25 \cos \alpha + 20$
Pe Oy : $v_y = 25 \sin \alpha$;

deci : $x = (25 \cos \alpha + 20)t$; $y = 25 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} = -2$.

$\alpha = 30°$; $v_x = 41{,}25$; $v_y = 12{,}5$; $t = 2{,}65$; $x = 109{,}3$ m.
(În acest timp trenul a înaintat $s = 53$ m) ;
$\alpha = 45°$; $v_x = 37{,}5$; $v_y = 17{,}5$; $t = 1{,}85$; $x = 69{,}37$; $s = 37$ m ;
$\alpha = 60°$; $v_x = 32{,}5$; $v_y = 21{,}25$; $t = 1{,}23$; $x = 39{,}97$; $s = 24{,}6$ m ;
$\alpha = 90°$; $v_x = 20$; $v_y = 25$; $t = 5{,}08$; $x = 101{,}6 = s$.
Bătaia maximă este în cazul cînd $\bar{v}_a$ este la 45°, deci $\alpha \approx 79°35'$;
$v_x = 24{,}55$; $v_y = 24{,}55$; $t = 5$; $x = 122{,}75$.

6 a) *Mișcarea accelerată* (fig. XII.6, *a*) $s = 50 = \frac{at^2}{2}$; $v = 20 = at$; $a = 4$ m/s²
acest $\bar{a}$ este accelerația de transport $\bar{a}_{tr}$.
Pendulul $\bar{a}_r = \bar{a}_a - \bar{a}_{tr}$ unde $\bar{a}_a = \bar{g}$ vertical în jos
$\bar{a}_{tr} = 4$ spre dreapta ; $a_r = \sqrt{g^2 + 4} \approx 10{,}7$ m/s².

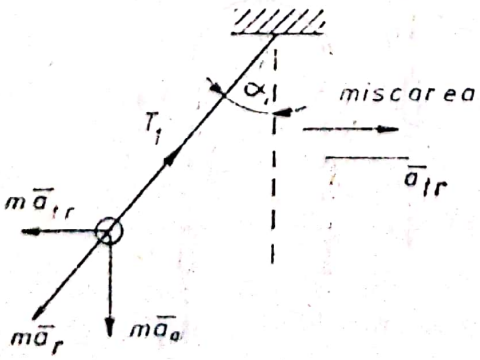


Fig. XII.6, *a*

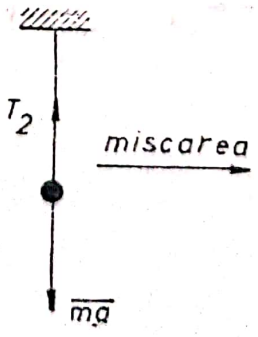


Fig. XII.6, *b*

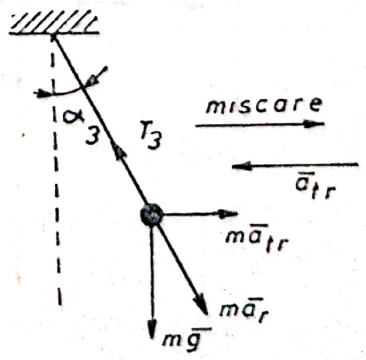


Fig. XII.6, *c*

$$\bar{T}_1 = m\,\bar{a}_r = m\cdot 10{,}7\,;\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a_{tr}}{a_a} \approx \frac{4}{g} = 0{,}4.$$

b) *Mișcarea de regim* (fig. XII.6, *b*). Nu există accelerație de transport

$$\bar{a}_r = \bar{a}_a = g\,;\ \bar{T}_2 = m\bar{g} = m\cdot 10$$

c) *Mișcarea întîrziată* (fig. XII.6, *c*): $t = 10$, $v_{final} = 20 + a_{tr}t = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{tr} = -2$ m/s²

$$a_r = \sqrt{g^2 + 2^2} = \sqrt{104} \cong 10{,}2 \quad T_3 = m\cdot 10{,}2\,;\ \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{2}{g} \approx 0{,}2$$

7. De la $\Sigma X_i = 0$ la lada *II*: $T = \mu 2G + \frac{2G}{g}a$; De la $\Sigma Y_i = 0$ la lada *I*: $T =$ $= 5G - \frac{5G}{g}a \Rightarrow a = \frac{4}{7}g = a_{tr}$.

Pendulul I: Perioada $T'_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a_r}}$ dar $\bar{a}_r = \bar{a}_a - \bar{a}_{tr}$

și $\bar{a}_a = \bar{g}$; deci $a_r = g - \frac{4}{7}g = \frac{3}{7}g$

$$T'_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{3}\frac{l}{g}}.$$

Pendulul II: $T''_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a_r}}$; $\bar{a}_r = \bar{a}_a - \bar{a}_{tr}$ unde

$\bar{a}_a = \bar{g}$ în jos, $\bar{a}_{tr} = \frac{4}{7}g$ spre stînga

$$a_r = \sqrt{g^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 g^2} = \frac{g}{7}\sqrt{65} \approx \frac{8}{7}g\,;\ T''_{sec} \approx 2\pi\sqrt{\frac{7}{8g}}.$$

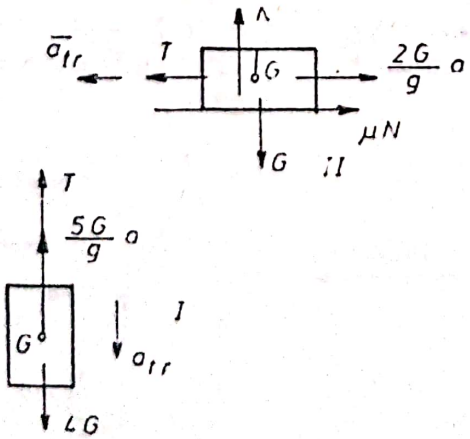


Fig. XII.7

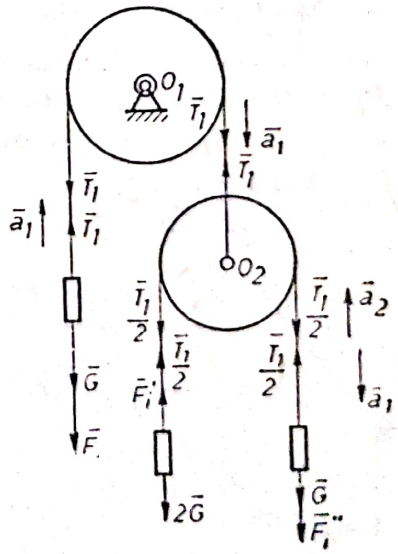


Fig. XII.8

Scanned with OKEN Scanner

8. Corpul G din stînga se urcă cu $\bar{a}_1$ cu care va coborî scripetele O_2 (fig. XII.8). $2G$ față de O_2 coboară cu $\bar{a}_2$, iar G față de O_2 se urcă cu $\bar{a}_2$. Avem forțele de inerție ca în figură. $T_1 = G + \frac{G}{g} a_1$

$$\frac{T_1}{2} = 2G - \frac{2G}{g}(a_1 + a_2) = G - \frac{G}{g}(a_1 - a_2).$$

Obținem: $a_1 = \frac{5g}{11}$; $a_2 = \frac{2g}{11}$; $T_1 = \frac{16G}{11}$.

Corpul G din stînga se urcă cu $a_1 = \frac{5g}{11}$ · Corpul $2G$ coboară cu $a_1 + a_2 = \frac{7g}{11}$;
Corpul G din dreapta urcă cu $\frac{3g}{11}$ · Deci $T_1 = \frac{16G}{11}$ $\frac{T_1}{2} = \frac{8}{11} G$.

9. a) *Mișcarea relativă:* $x = \frac{3}{2} \cos 2t$. În M: $x = \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cos 2t$ $2t = \frac{\pi}{3}$;

$v_M = -3 \sin 2t = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $a_M = -6 \cos 2t = -3$ m/s²; v_M este viteza relativă iar a_M accelerația relativă.

Mișcarea de transport: $v_t = V = 4$; $a_{tr} = 0$.

Mișcarea absolută: $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_{tr} = 4 - 3\sqrt{3} \approx 1{,}45$ m/s;
$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_{tr} = -3$ m/s².

b) Dacă viteza V are direcția verticală și sensul în sus

$$v_{abs} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{91} \cong 4{,}8; \quad a_{abs} = -3.$$

10. Avem $\omega = \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = 3$ rad/s². Analog $l = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = 2$ m/s² (fig. XII.10).

Vitezele. În C: $v_r = at = 4$ m/s; $v_{tr} = R\omega = \frac{4\sqrt{2}}{2} 6 = 12\sqrt{2}$ ($\bar{v}_{tr}$ este perpendicular pe planul figurii).

Deci $v_A = \sqrt{v_r^2 + v_{tr}^2} \approx 17{,}4$ m/s.

Accelerațiile: $\bar{a}_r = 2$; $\bar{a}_{tr}$ are două componente (pe tangentă și pe rază):

$$a_{tg} = R\varepsilon = \frac{4\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2}.$$

$a_n = R\omega^2 = \frac{4\sqrt{2}}{2} \cdot 36 = 72\sqrt{2}$; $a_{cor} = 2v_r\omega \sin\alpha = 2 \cdot 4 \cdot 6 \sin 135° = 24\sqrt{2}$

(a_{cor} este accelerația lui Coriolis).

($\bar{a}_r$ și $\bar{a}_n$ sînt în planul figurii, iar $\bar{a}_{tg}$ și $\bar{a}_{cor}$ sînt $\perp$ pe planul figurii) Avem:
$a_a^2 = (a_r - a_n \cos 45)^2 + a_n^2 \sin^2 45 + (a_{cor} + a_{tg})^2 = 118\,841$; $a_a \approx 345$.

Scanned with OKEN Scanner

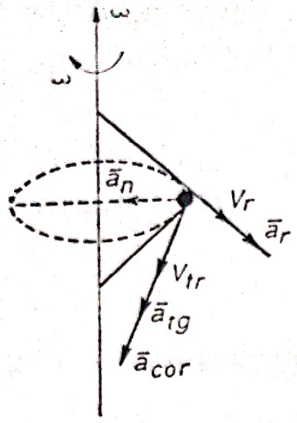


Fig. XII.10

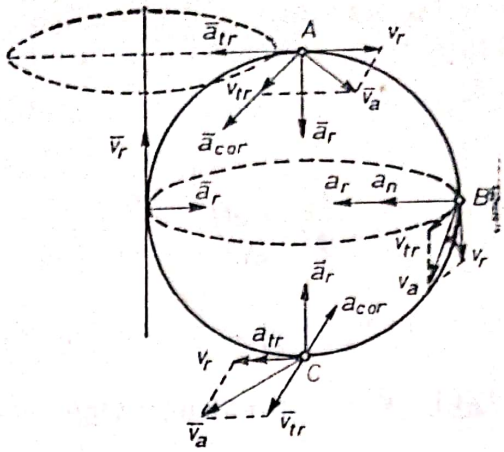


Fig. XII.11

11. Avem (fig. XII.11) : $2\pi = \omega t \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega}$; $2\pi R = Vt = V\frac{2\pi}{\omega}$ deci $V = \omega R$.

Vitezele : A) $v_r = V = \omega R$; $v_t = \omega R$; $v_a = \sqrt{2}\omega R$
$\bar{v}_a$ este în planul orizontal prin A
B) $v_r = V = \omega R$; $v_{tr} = \omega\, 2R$; $v_a = \omega R\sqrt{5}$
v_a este în plan vertical prin B ; $v_r = \omega R$; $v_{tr} = \omega R$;
$v_a = \omega R\sqrt{2}$; $\bar{v}_a$ este în plan orizontal prin B.
D) $v_r = \omega R$; $v_t = 0$; $v_a = \omega R$
Acceleraţiile :

A) $\begin{cases} a_r = a_n = \omega^2 R \\ a_{tr} = a_n = \omega^2 R \\ a_{cor} = 2v_r\omega \sin\alpha = 2\omega^2 R \ (\perp \text{ pe planul figurii}) \\ a_a = \sqrt{\omega^4R^2 + \omega^4R^2 + 4\omega^4R^2} = \omega^2 R\sqrt{6}. \end{cases}$

B) $\begin{cases} a_r = a_n = \omega^2 R \\ a_{tr} = a_n = \omega^2\, 2R \\ a_{cor} = 0 \ (\alpha = \pi) \\ a_a = 3\omega^2 R \end{cases}$

C) $\begin{cases} a_r = a_n = \omega^2 R \\ a_{tr} = \omega^2 R \\ a_{cor} = 2\omega^2 R \ (\perp \text{ pe planul figurii}) \\ a_a = \omega^2 R\sqrt{6} \end{cases}$

D) $\begin{cases} a_r = \omega^2 R \\ a_{tr} = 0 \\ a_{cor} = 0 \\ a_a = \omega^2 R \end{cases}$

12. *Vitezele :* mişcarea oscilatorie $T = \pi$; $\omega = 2$; $A = 3$; $x = 3\cos 2t$
$\dot{x} = v_r = -6\sin 2t$; $\ddot{x} = a_r = -12\cos 2t = -4x$
În B : $v_{tr} = 2R\omega_1 = 12$; $v_r = 0$; $v_a = v_{tr} = 12$.

Scanned with OKEN Scanner

$a_{tr} = 2R\omega_1^2 = 24$; $a_r = 12$; $a_{cor} = 2v_r\omega \sin \alpha = 0$
$a_a = 36$ (pe AB spre stînga).

În C : $\left(OC = \frac{R}{2}\right) \frac{3}{2} = 3 \cos 2t \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{3}$; $v_r = -3\sqrt{3}$;

$v_{tr} = \left(3 + \frac{3}{2}\right) \omega_1 = 9$; $v_a = \sqrt{108} \cong 10{,}4$; $a_r = -6$;

$a_{tr} = \frac{9}{2} \omega_1^2 = 18$; $a_{cor} = 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$

$$a_a = \sqrt{24^2 + 12^2 \cdot 3} \approx 31{,}7$$

În O : $x = 0$ $2t = \frac{\pi}{2}$; $v_r = -6$; $v_{tr} = R\omega_1 = 6$; $v_a = 6\sqrt{2}$

$a_r = 0$; $a_{tr} = R\omega_1^2 = 12$; $a_{cor} = 24$; $a_a = \sqrt{12^2 + 24^2} = 26{,}8$

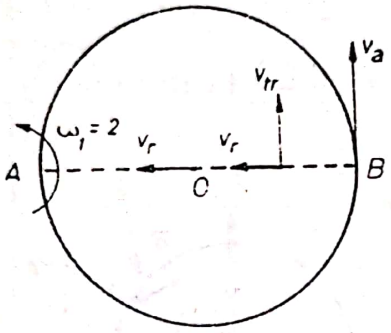


Fig. XII.12, *a'*

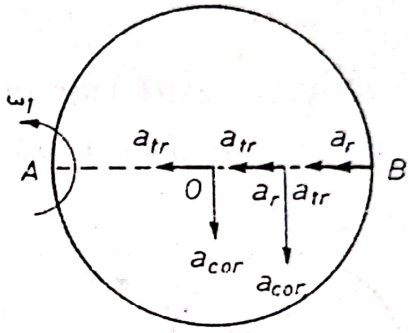


Fig. XII.12, *a"*

13. Aci (fig. XII.13) : $v_p = 29{,}7 = v_{tr}$; $v_l = 308\,000 = v_a$,
$\bar{v}_{rel} = \bar{v}_a - \bar{v}_{tr}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{tr}}{vl} = \frac{29{,}7}{308\,000}$ se găsește $\alpha = 20'', 47$ și poziția aparentă a stelei este în S'.

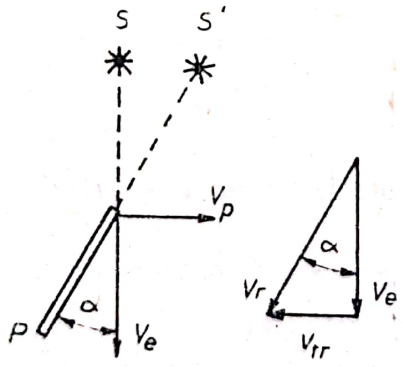


Fig. XII.13

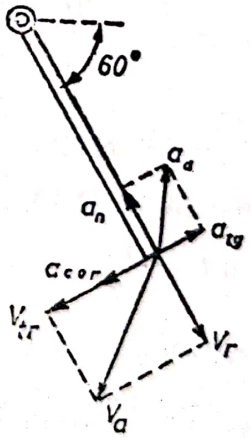


Fig. XII.14

14. Determinarea lui ω și ε în poziția II (fig. XII.14).
Lucrul mecanic :

$$G\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3\sqrt{3}g}{2l}.$$

Momentul exterior :

$$G\frac{l}{4}=\frac{G}{g}\frac{l^2}{3}\varepsilon\Rightarrow\varepsilon=\frac{3}{4}\frac{g}{l}.$$

Vitezele în A' : viteza relativă este $\bar{V}$, iar viteza transport este $l\omega$; viteza absolută $=\sqrt{V^2+l^2\omega^2}=\sqrt{V^2+\frac{3\sqrt{3}gl}{2}}$

Acceleraţiile în A' : $\bar{a}_r=0$; $\bar{a}_{tr}$ are două componente :

$a_n=l\omega^2=\frac{3\sqrt{3}g}{2}$ şi $a_{tg}=l\varepsilon=\frac{3g}{4}$; $\bar{a}_{cor}=2v_r\omega\sin\alpha=2V\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{2l}}\cdot 1$;

$a_a=\sqrt{a_n^2+(a_{cor}-a_{tg})^2}$.

15. $\omega_0=\frac{v_0}{R}=2$. Din $M_{ext}=I_{B_0}\varepsilon=-Gs=2\frac{G}{g}R^2\varepsilon\Rightarrow\varepsilon=-2$

$\left(I_{B_0}=\frac{2G}{g}R^2\right.$. Ecuaţia mişcării : $0=2t-\frac{2t^2}{2}$ · Pentru $t=1$ $0=1$ radian. Roata s-a rotit cu 1 rad $\approx 60°$.

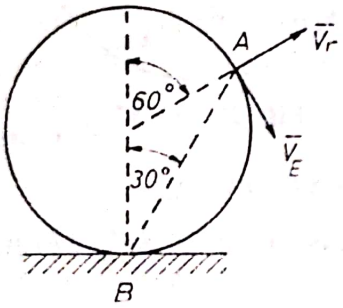


Fig. XII.15. *a'*

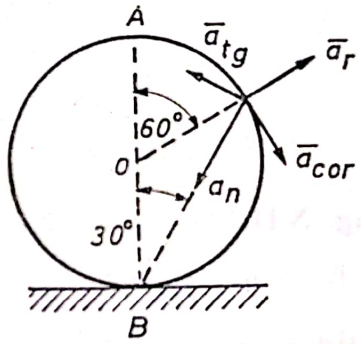


Fig. XII.15, *a"*

Mişcarea pe spiţă : $R=\frac{a_rt^2}{2}$; $\frac{1}{4}=\frac{a_r}{2}\Rightarrow a_r=\frac{1}{2}\frac{\text{m}}{s^2}$.

Vitezele (fig. XII.15, *a'*) :

$v_r=a_rt=\frac{\sqrt{1}}{2}$m/s ; v_{tr} este viteza în rotaţia în raport cu $B\cdot BA=R\sqrt{3}$.

$v_{tr}=\omega\cdot R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$m/s ; $\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_{tr}=1{,}4$.

$\bar{v}_a$ face $\hat{\alpha}$ cu orizontala, $\alpha=-8°30'$.

Acceleraţiile (fig. XII.15, *a"*) : $a_r=\frac{1}{2}$; $\bar{a}_{tr}$ are două componente

$a_n=R\sqrt{3}\omega^2=\sqrt{3}$, $a_{tg}=R\sqrt{3}\varepsilon=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$a_{cor}=2v_r\omega\sin\alpha=2$; $\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_{tr}+\bar{a}_{cor}\approx 2{,}5$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIII

COMPUNERI DE MIȘCĂRI, CENTRU INSTANTANEU

1. a) $x = x_1 + x_2 = 5 \sin t$ (fig. XIII.1, *a*) mișcare oscilatorie armonică de aceeași perioadă $T_{sec} = 2\pi$; amplitudinea este egală cu suma amplitudinilor, fără defazaj.

b) $x = 2 \sin t + 3 \cos t \equiv A \sin (t + \varphi) = A \cos \varphi \sin t + A \sin \varphi \cos t$ (fig. XIII.1, *b*).

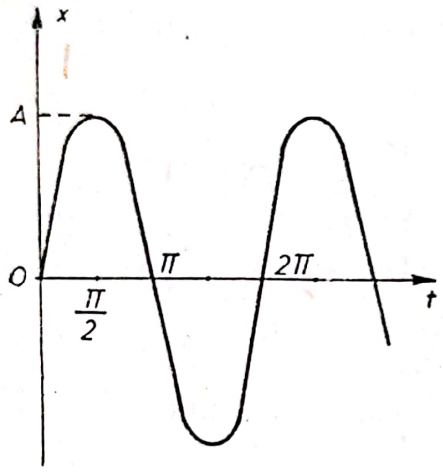


Fig. XIII.1, *a*

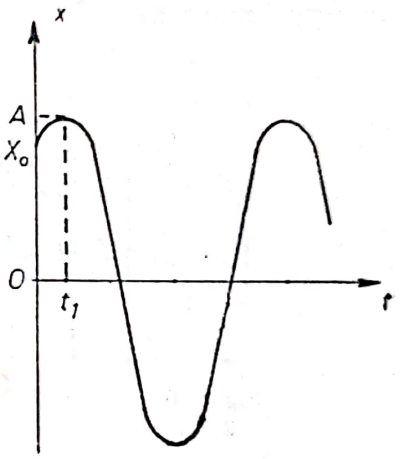


Fig. XIII.1, *b*

identificînd coeficienții lui sin *t* respectiv cos *t* avem :

$A \cos \varphi = 2$; $A \sin \varphi = 3$, $A = \sqrt{13}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{2}$; $\varphi \approx 56° = \frac{14\pi}{45}$.

Ecuația mișcării este $x = \sqrt{13} \sin \left(t + \frac{14\pi}{45} \right)$; $T_{sec} = 2\pi$; $x_0 = \sqrt{13} \sin \frac{14\pi}{45} = \sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 3$. Maximul la t_1 dat de $t_1 + \frac{14\pi}{45} = \frac{\pi}{2}$

deci $t_1 = \frac{17\pi}{90}$.

2. a) (I) Eliminînd pe *t* între cele două ecuații se capătă traiectoria $y = 3\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)$ parabolă (fig. XIII. 2, a_1). Pornirea se face din *A* în jos.

(II) Eliminînd *t* obținem traiectoria $y^2 = \frac{9x^2}{4}(4 - x^2)$ (fig. XIII.2, a_{11}).

b) (I) Traiectoria $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsă (fig. XIII.2, b_1)

(II) Traiectoria $y = 3\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ parabola (fig. XIII.2, b_{11})

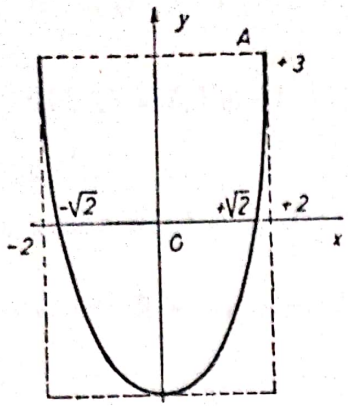


Fig. XIII.2, a_{I}

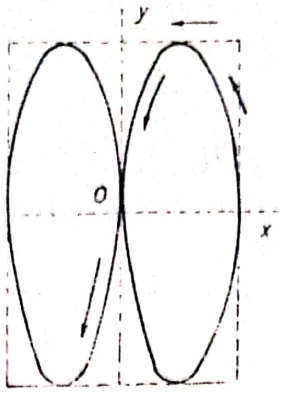


Fig. XIII.2, a_{II}

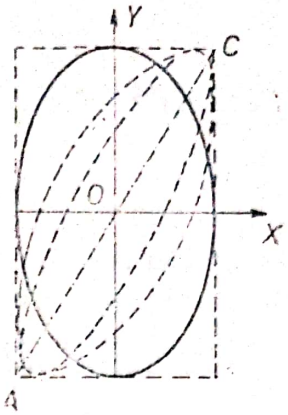


Fig. XIII.2, c

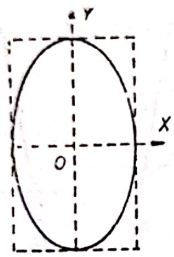


Fig. XIII. 2, b_{I}

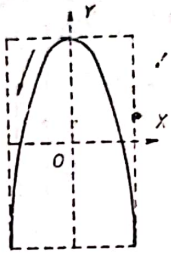


Fig. XIII. 2, b_{II}

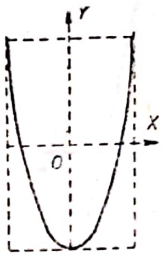


Fig. XIII. 2, b_{III}

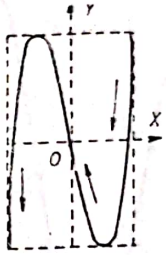


Fig. XIII. 2, b_{IV}

(III) Traiectoria $y = 3\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)$ parabola (fig. XIII.2, b_{III})

(IV) Traiectoria $y = \frac{x(x^2-2)}{4}$ (fig. XIII.2, b_{IV})

c) (I) Traiectoria este dreapta AOC y fig. XIII, 2,c) $= \frac{3}{2}x$ (—·—·—)

(II) Elipsă foarte alungită, înclinată (---------- figura XIII.2, c).

(III) Elipsă mai puțin alungită și mai puțin înclinată (---------)

(IV) Elipsa cu axele pe axele de coordonate (————)

Punctele de tangență cu dreptunghiul se depărtează cînd φ crește.

3. Din compunerea (fig. XIII.3) $\bar{\omega} + 2\bar{\omega} = \bar{\Omega}$ avem $\Omega = \omega\sqrt{5}$ și $\operatorname{tg}\theta = 2\left(\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Punctul B. Din rotație în jurul lui CA cu $\bar{\omega}$:
$v'_B = \omega \cdot r = \omega \cdot 3$ (perpendicular pe planul figurii spre față).

Din rotație în jurul lui OO' $v''_B = l\,2\bar{\omega} = \bar{\omega}\cdot 8$ (perpendicular pe planul figurii spre fund) deci $v_B = \omega \cdot 5$ spre fundul figurii.

Din rotație în jurul axului $A\Omega$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $AD = 5$ cm; $\alpha = \sphericalangle BAC$

$BD = 5\sin(\theta - \alpha) = \sqrt{5}$; $v_B = \Omega BD = \omega\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 5\omega$

Scanned with OKEN Scanner

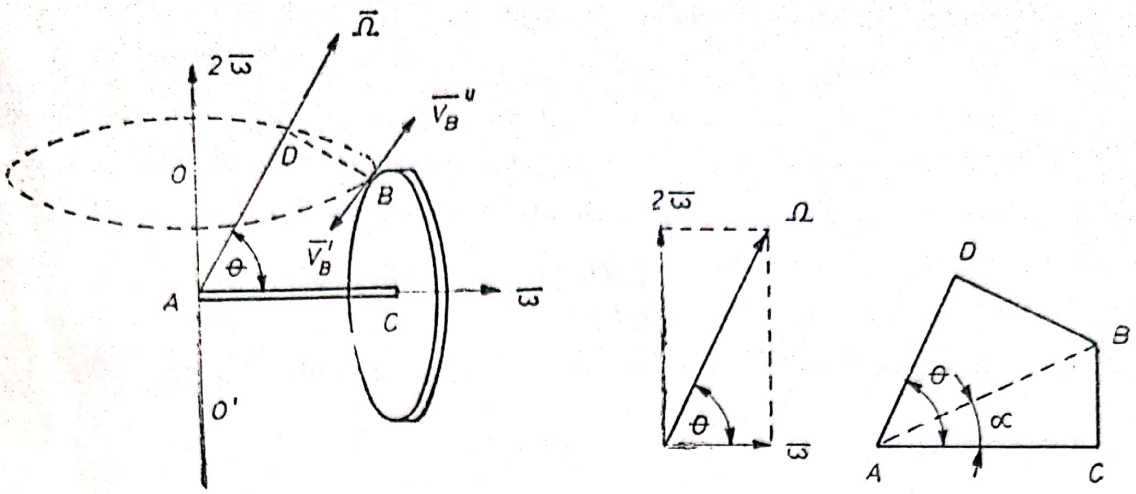


Fig. XIII.3

Punctul C
Rotația în raport cu axul AC rezultă $v_r = 0$.

Rotația în jurul axului $A\Omega$: $v_a = \Omega \cdot CD = \Omega \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = 8\omega$.

Rotația în jurul axului OO' : $v_{tr} = 8\omega$.

4 a) Fie $OE = x$ poziția rezultantei 2ω în raport cu 0 ; $3\omega \frac{R}{2} = 2\omega x \Rightarrow x =$

$= \frac{3R}{4} = 7{,}5$ m.

Punctul A poate fi considerat :
1°) Că se rotește în jurul axei prin E ($DE = 2{,}5$). Deci :

$$v_A = (2{,}5 - r)\ 2\omega = -4 \text{ m/s}.$$

2°) Se rotește în jurul axei prin C cu $v_A' = +3\omega r = +24$ m/s și în jurul axei prin O cu $v_A'' = -(OD + r)\omega = -7\omega = -28$ m/s deci $v_A = -4$ m/s (fig. XIII.4, *a*).

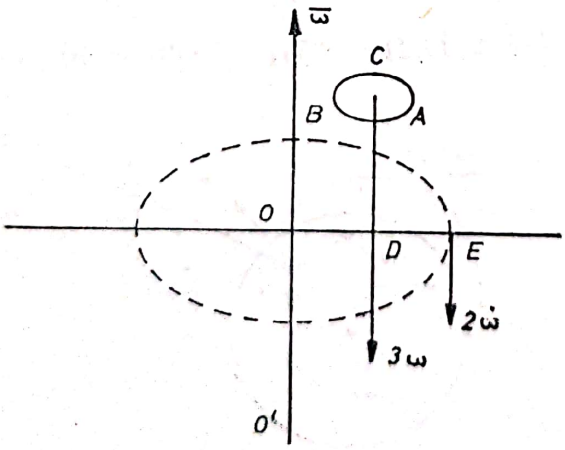


Fig. XIII.4, *a*

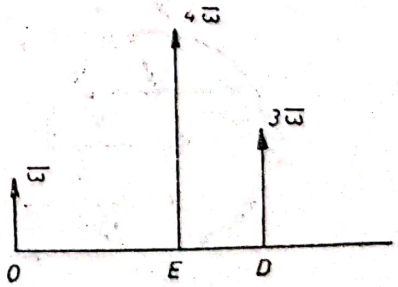


Fig. XIII.4, *b*

Punctul B. Din rotație în jurul axului prin E : $v_B = (r + DE)2\omega = 36$ m/s.

Din rotație în jurul axului prin C: $v'_B = r\,3\omega = 24$ m/s.

Din rotația în jurul axului prin O : $v''_B = 3\omega = 12$ m/s.

b) Aci rezultanta (fig. XIII.4, *b*) este 4ω la distanța de O dată de $4\omega x = 3\omega\frac{R}{2}$; deci $x = \frac{3R}{8} = 3{,}75$ m. Deci $ED = 1{,}25$ m.

Viteza lui A : $v_A = -(r + DE)4\omega = -60$ m/s.

Viteza lui B : $v_B = (r - DE)\,4\omega = 4$ m/s.

5. În acest caz este un cuplu de rotații $-\bar{\omega}$, $\bar{\omega}$ la distanța $\frac{R}{2}$ între vectorii $|\bar{\omega}|$.

Viteza lui C : $v_C = -\frac{R}{2}\omega = -20$ m/s.

Viteza lui A : $\bar{v}_A = \bar{v}'_A + \bar{v}''_A$ unde $\bar{v}'_A = r\omega$ este viteza în jurul axului CD, $\bar{v}''_A$ în jurul axului OO',

$v'_A = r\omega = 8$; $v''_A = -\left(\frac{R}{2} + r\right)\omega = -20$ m/s ; $v_A = -20$ m/s.

Viteza lui B : $\bar{v}_B = \bar{v}'_B + \bar{v}''_B$ ($\bar{v}'_B$ în raport cu CD, $\bar{v}''_B$ în raport cu OO')

$\bar{v}'_B = -r\omega = -8$; $\bar{v}''_B = -\left(\frac{R}{2} - r\right)\omega = -12$; $\bar{v}_B = -20$.

Toate punctele au viteze egale și paralele deci mișcarea este de translație.

6. a) Toate punctele roții au același $\bar{v}$ datorit translației și o viteză $|\bar{\omega}r|$ datorită rotației care depinde de distanța $\bar{r}$ pînă la centrul O (fig. XIII.6, *a*). Mișcarea de translație plus mișcarea de rotație se reduc la o mișcare de rotație în jurul centrului instantaneu în care $|\bar{\omega}r| = \bar{v}$ deci $r = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$ m.

Viteza lui A : $v_A = v - R\omega = 15 - 20 = -5$ m/s. Viteza de rotație în jurul lui I ; $\Omega = \frac{5}{AI} = \frac{5}{\frac{1}{8}} = 40$ r/s $= \omega$.

Viteza lui B $\left(OB = \frac{R}{2}\right)$: $v_B = v + \overline{IB}\Omega = 15 + \frac{5}{8}\cdot 40 = 40$ m/s.

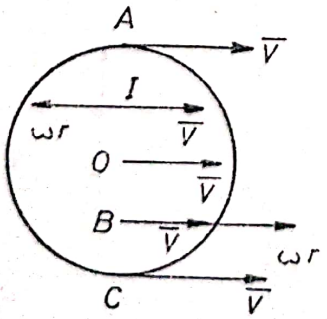


Fig. XIII.6, *a*

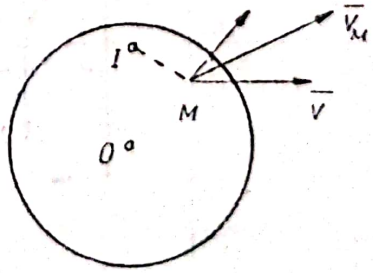


Fig. XIII.6, *c*

Viteza lui O : $v_0 = v = 15$ m/s.

Viteza lui C $v_c = v + \bar{IC} \cdot \Omega = 15 + \frac{7}{8} \cdot 40 = 50$ m/s.

b) Aceleași rezultate.

c) Figura XIII.6, *c* : $v = 15$; $v_1 = \overline{MI} \cdot \omega$, $\bar{v}_M = \bar{v} + \bar{v}_1$.

7. Presupunem (fig. XIII.7, *a*) : $v_1 = \overline{AI} \cdot \bar{\omega}$; $v_2 = \overline{BI} \cdot \bar{\omega}$ deci $\frac{v_1}{AI} = \frac{v_2}{BI} \Rightarrow$

$\Rightarrow BI = 6$ m ;

$\omega = 2$ rad/s, $v_c = 16$ m/s.

a) Descompunerea în translație și rotație se poate face într-o infinitate de moduri :

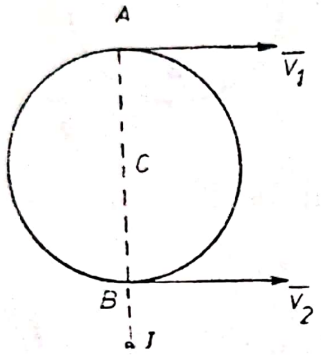


Fig. XIII.7, *a*

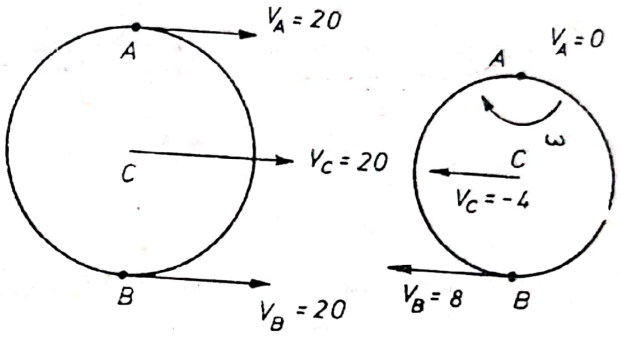


Fig. XIII.7, *a'*

(I) *Translație definită de* $v = 20$ m/s. (fig. XIII.7, *a'*) toate punctele roții cu aceeași viteză *v*. Rotație în raport cu *A*

$$v_A = 0 \ ; \ v_c = 16 - 20 = -4 \ ; \ v_B = 12 - 20 = -8.$$

Din $v_B = |8| = 2R\omega \Rightarrow \omega = 2$

(II) *Translație definită de* $v = 12$ (fig. XIII.7, *a''*). Rotație în jurul lui *B*

cu $\omega = \frac{v_1}{2R} = \frac{8}{4} = 2$; $v_A = 20 - 12 = 8$; $v_c = 16 - 12 = 4$;

$$v_B = 12 - 12 = 0.$$

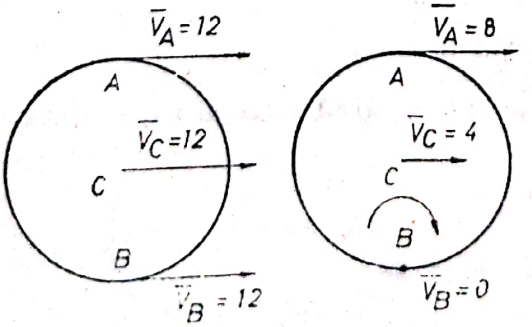


Fig. XIII.7, *a''*

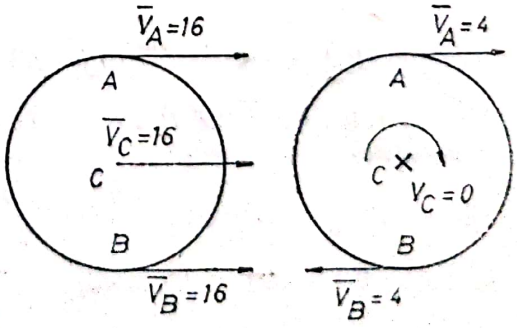


Fig. XIII.7, *a'''*

(III) *Translație definită de* $v = 16$ (fig. XIII.7, a'''). Rotație în jurul lui C

cu $\omega = \frac{v_1}{R} = 2$; $v_A = 20 - 16 = 4$; $v_c = 16 - 16 = 0$;

$$v_B = 12 - 16 = -4.$$

Se pot face aceleași descompuneri în raport cu orice punct.

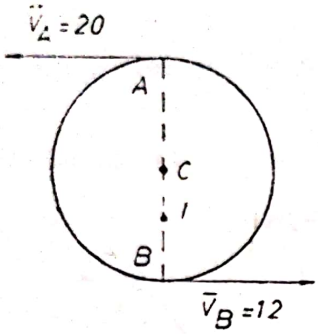
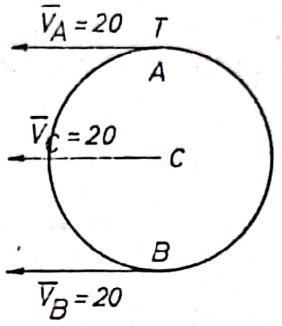


Fig. XIII.7, b'



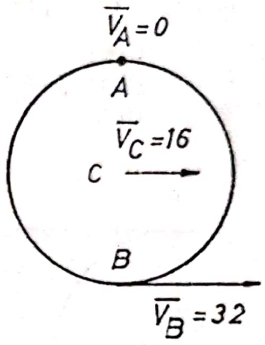


Fig. XIII.7, b''

b) Centrul instantaneu I e dat de $\overline{AI}$ (fig. XIII.7, b') :

$\frac{v_A}{AI} = \frac{v_B}{BI}$; $\frac{20}{AI} = \frac{12}{4 - AI} \Rightarrow AI = \frac{5}{2}$ m. ; $20 = \overline{AI} \cdot \omega$; $\omega = 8$ rad/s ;

$$v_c = 0{,}5\omega = -4 \text{ m/s.}$$

Descompunerea în translație și rotație (fig. XIII.7, b'') :
Translație definită de : $v_1 = -20$; $v_B = 32 = 4\omega$; $\omega = 8$;
$v_c = 16 = 2\omega$; $\omega = 8$.
Se pot defini și alte translații și rotații ca la (a).

3. Viteza centrului de greutate al roții este (fig. XIII.8) $v = \frac{72\,000}{3\,600} = 20$ m/s.

Aceasta este viteza centrului roții.

Vitezele punctelor de pe BB' la 1 m deasupra solului sînt perpendiculare pe dreapta care unește punctul respectiv cu A punctul momentan fix.

Viteza unghiulară a roții este : $\omega = \frac{20}{R} = \frac{20}{0{,}6} = \frac{100}{3}$ rad/s, $AB = 0{,}6\sqrt{3}$.

$v_B = \omega \cdot \overline{BA} = v_{B'} = \frac{100}{3} \cdot 0{,}6\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ m/s.

Viteza relativă a lui B în raport cu C se capătă dînd întregii roți viteză orizontală — 20 m/s.

$v_{Bx} = 20\frac{3}{2} = 30$; $v_{By} = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

$v_{r(Ox)} = 30 - 20 = 10$; $v_{ry} = 10\sqrt{3}$; $v_r = 20$.

v_r face cu Ox unghiul φ : $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

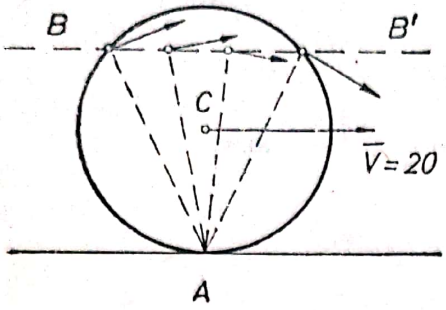


Fig. XIII.8

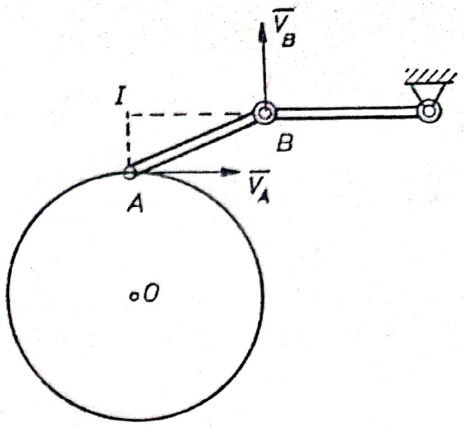


Fig. XIII.9

9. Centrul instantaneu este în I la intersecția perpendicularelor pe vitezele $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_B$ (fig. XIII.9):

$\frac{v_A}{AI} = \frac{v_B}{BI}$; $v_A = R\omega_1$; $v_B = R\omega_2$; $AI = \frac{R}{2}$; $BI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ deci $\omega_1 = \omega_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10 Aci: $v_A = 2R\omega_1$; $AI = \frac{R}{2}$; $v_B = R\omega_2$; $BI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $\omega_1 = \frac{\omega_2}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. a) *Rotația în jurul lui O* (fig. XIII.11, *a*):

$\overset{\frown}{IAB} = \overset{\frown}{IBC} = 30°$ (AIB este un triunghi isoscel)

$\overline{AI} = \overline{BI}$; deci deoarece $v_A = R\omega_1$ și $v_B = R\omega_2$; obținem $\omega_2 = \omega_1$

b) *Rostogolire în raport cu D* (fig. XIII.11, *b*):

$\sphericalangle OAD = 15°$; $\sphericalangle IAB = 45°$;

$AI \cos 45 + BI \cos 30 = BA = R$; $AI \sin 45 = BI \sin 30$.

$BI = \frac{2R}{\sqrt{3}+1}$; $AI = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$.

$AD = 2R \cos 15°$; $v_A = \omega_1 2R \cos 15°$; $v_B = R\omega_2$

$\frac{v_A}{AI} = \frac{v_B}{BI}$; $\omega_2 = 2\sqrt{2}\,\omega_1 \cos 15 \approx 2{,}7\omega_1$.

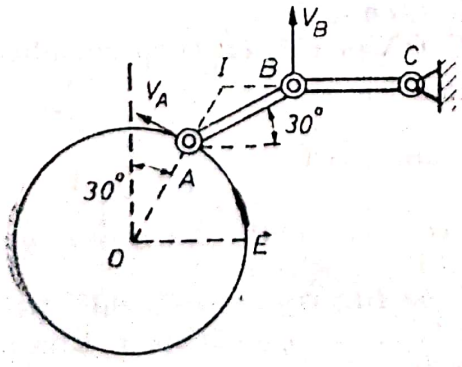


Fig. XIII.11, *a*

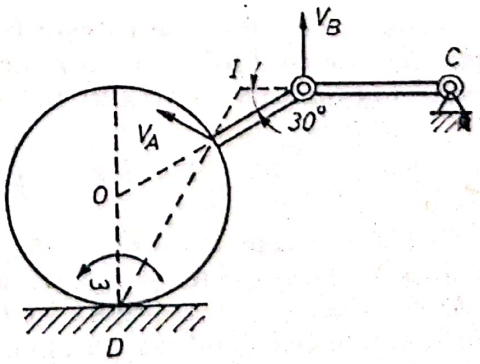


Fig. XIII.11, *b*

12. Centrul instantaneu I este în B; $CB = EB = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

$$v_C = v_E = \omega_1 \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_2 \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 ; \frac{v_D}{DB} = \frac{v_C}{CB} ; v_D = \omega_1 l \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

13. Avem (fig. XIII.13) $\omega = \frac{\pi n}{30} = 8\pi$; $v_B = 4\pi$; $AO = 2r = 1$ m;

$$\frac{AI}{AO} = \sqrt{3} ; \quad OI = 2, \quad \text{deci } v_A = \sqrt{3}\,\frac{4\pi}{15,} \text{ m/s.}$$

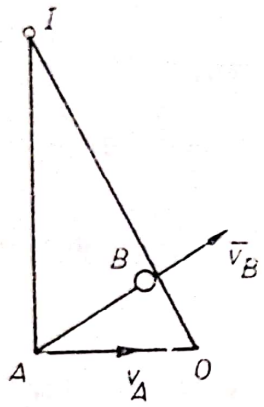


Fig. XIII.13

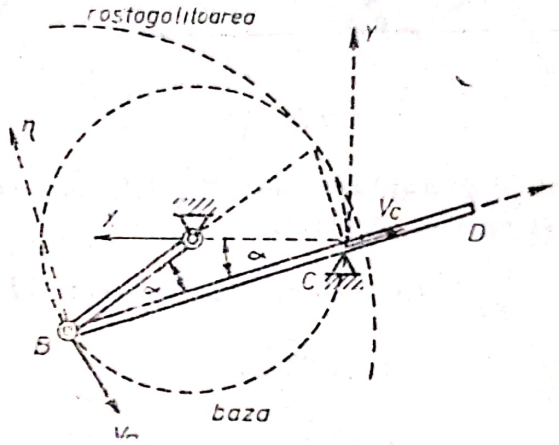


Fig. XIII.14

14. Centrul instantaneu I este la intersecția perpendicularelor pe $\bar{v}_B$ și $\bar{v}_C$; $BI = 2l$; $CI = 2l \sin\alpha$; $v_B = l\omega_1$. Deci (fig. XIII.14):

$$\frac{v_B}{BI} = \frac{v_C}{CI} \text{ dă } \frac{l\omega_1}{2l} = \frac{v_C}{2l\sin\alpha} ; \quad v_C = l\omega_1 \sin\alpha < v_B.$$

Viteza unghiulară ω de rotație în jurul centrului instantaneu se capătă din $l\omega_1 = 2l\omega \Rightarrow \omega = \frac{\omega_1}{2}$.

Proiectînd pe $\bar{v}_B$ pe direcția barei avem $v_B \sin\alpha = l\omega_1 \sin\alpha = v_C$ (v_C = viteza de deplasare a barei). Componenta vitezei $\bar{v}_B$ perpendicular pe bara BD dă $v_B \cos\alpha = 2l \cos\alpha\omega$;

$v_B = 2l\omega = l\omega_1$. Bara se rotește față de C cu $\bar{\omega}$.

Baza. Axe de coordonate cu origine în C. OX pe CA, iar Oy perpendicular. Avem coordonatele centrului instantaneu:

$$x = 2l \sin^2\alpha ; \quad y = 2l \sin\alpha \cos\alpha.$$

Eliminînd α avem $x^2 + y^2 - 2lx = 0$ cerc cu centrul în $x = l$, $y = 0$, adică în A. (Se constată și geometric că $AI = l = \text{const}$).

Rostogolitoarea. Axe cu origină în B. $O\zeta$ pe BC, $O\eta$ perpendicular pe BC. Coordonatele centrului instantaneu $\zeta = 2l \cos\alpha$; $\eta = 2l \sin\alpha$. Eliminînd pe α: $\zeta^2 + \eta^2 = 4l^2$ (cerc cu centrul în B și rază $2l$).

Scanned with OKEN Scanner

15. Vitezele în O și B sînt tangente la bare, deci, centrul instantaneu I este la intersecția perpendicularelor pe ele (fig. XIII.15).
Luăm axe Ox și Oy. Avem $OM = x = l\cos^2\alpha$; $MI = y = l\cos\alpha\sin\alpha$.
Baza. Eliminînd pe α ecuația bazei este
$\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{l^2}{4}$, cerc cu centrul în C la $\frac{OO'}{2}$ și care trece prin I, O, O'.
Rostogolitoarea. Axele AO și AB:
$\zeta = IB = l\sin\alpha - R$; $\eta = OI = l\cos\alpha$.
Ecuația $(\zeta + R)^2 + \eta^2 = l^2$, cerc de rază l cu centrul în C' ($\zeta = -R$, $\eta = 0$). Se vede că $C'I = l$ este diagonala dreptunghiului $IOC'O'$.

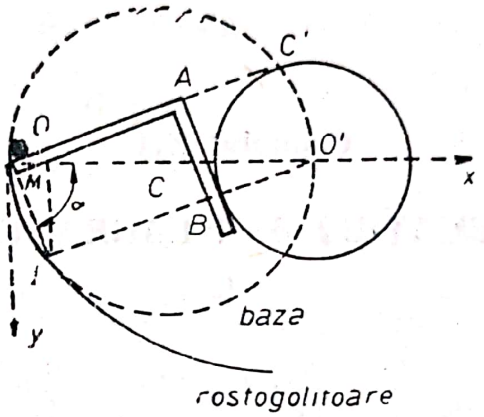


Fig. XIII.15

16. *Baza.* Axe Ox și Oy ca în figura XIII.16,
$x = OB = l\operatorname{ctg}\alpha$; $y = BI = l + l\operatorname{cotg}^2\alpha$
Eliminînd α: $x^2 = l(y - l)$. Parabolă.
Rostogolitoarea. Axe cu originea în B

$$\zeta = BA = \frac{l}{\sin\alpha}; \quad \eta = AI = \frac{l\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}$$

Ecuația curbei $\eta = \frac{\xi(\xi^2 - l^2)}{2}$ curbă de ordinul 3.

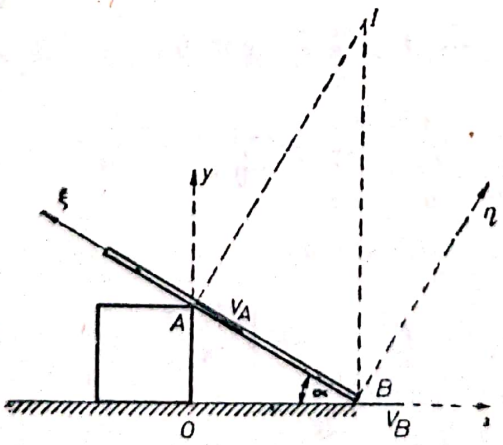


Fig. XIII.16

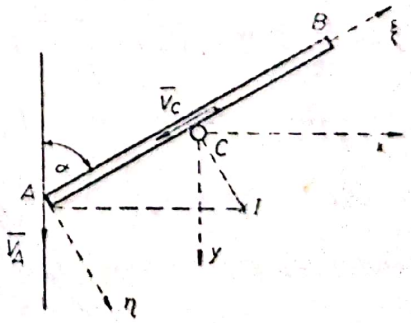


Fig. XIII.17

17. *Baza.* $x = AI - l = \frac{l}{\sin^2\alpha} - l$; $y = CI\cos\alpha = \frac{l}{\sin\alpha}\cos\alpha$ din eliminarea lui α: $y^2 = lx$, ecuația bazei (fig. XIII.17).

Rostogolitoarea. Axe cu originea în A:

$\zeta = AC = \frac{l}{\sin\alpha}$; $\eta = CI = \frac{l\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$

$\eta^2 = \frac{\xi^2}{l^2}(\zeta^2 - b^2)$, ecuația rostogolitoarei.

Capitolul XIV

ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

1. Avem $I_A = \frac{G}{g}\frac{l^2}{3} + \frac{G}{2g}\frac{R^2}{2} + \frac{G}{2g}(R+l)^2 = \frac{5}{4}\frac{G}{g}l^2$.

Ecuația lui Lagrange:

Energia cinetică:

$E_c = \frac{5}{4}\frac{G}{g}l^2\frac{\dot\theta^2}{2}$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial\dot\theta} = \frac{5}{4}\frac{G}{g}l^2\ddot\theta$.

Lucrul mecanic de la I la II:

$L = \frac{7}{6}Gl\sin\theta$; $E_{pot} = -\frac{7}{6}Gl\sin\theta$; $\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = -\frac{7}{6}Gl\cos\theta$; $\frac{\partial E_c}{\partial\theta} = 0$;

$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial E_c}{\partial\theta} = \frac{-\partial E_p}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{5}{4}\frac{G}{g}l^2\ddot\theta - \frac{7}{6}Gl\cos\theta = 0$;

de unde: $\varepsilon = \ddot\theta = \frac{14}{15}\frac{g}{l}\cos\theta$.

Prin $M_{ext} = I_A\varepsilon$ avem $M_{ext} = G\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{G}{2}\frac{4}{3}l\cos\theta$;

se capătă același ε.

2. $I_A = \frac{17}{12}\frac{G}{g}l^2$; $E_c = \frac{17}{12}\frac{G}{g}l^2\frac{\dot\theta^2}{2}$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial\dot\theta} = \frac{17}{12}\frac{G}{g}l^2\ddot\theta$

$L = \frac{3}{2}Gl(1-\cos\theta) = -E_p$; $\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = \frac{3}{2}Gl\sin\theta$

Ecuația lui Lagrange: $\ddot\theta + \frac{18}{17}\frac{g}{l}\theta = 0$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{17}{18}\frac{l}{g}}$.

Pendul simplu sincron: $l_0 = \frac{I_A}{\frac{G}{g}\frac{l}{2} + \frac{G}{g}l} = \frac{17}{18}l$.

Scanned with OKEN Scanner

3. a) $I_B = \frac{5G}{g}\frac{l^2}{12}$; $E_c = \frac{5}{12}\frac{G}{g}l^2\frac{\dot\theta^2}{2}$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial\dot\theta} = \frac{5}{12}\frac{G}{g}l^2\ddot\theta$

$L = -G\frac{l}{2}(1-\cos\theta) = -E_p$; $\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = G\frac{l}{2}\sin\theta$

Ecuația lui Lagrange: $\frac{5}{12}\frac{G}{g}l^2\ddot\theta = -G\frac{l}{2}\sin\theta \Rightarrow \ddot\theta + \frac{6}{5}\frac{g}{l}\theta = 0$

$T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{6}\frac{l}{g}}$

b) E_c este același ca la (a). $L = G\frac{l}{2}\sin\theta$ (unde θ = unghiul lui AB cu orizontala). $E_p = -G\frac{l}{2}\sin\theta$; $\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = -G\frac{l}{2}\cos\theta$.

Ecuația lui Lagrange:

$$\frac{5}{12}\frac{G}{g}l^2\ddot\theta = G\frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \ddot\theta = \frac{6}{5}\frac{g}{l}\cos\theta$$

Aceasta este accelerația unghiulară $\varepsilon = \ddot\theta$ după ce bara s-a rotit cu θ.

4. Presupunem că bara s-a rotit cu $\measuredangle\theta$. Lucrul mecanic la această rotație va fi (fig. XIV.4):

$$L = -G\frac{l}{2}\left[\frac{\sqrt2}{2} - \cos(45^\circ+\theta)\right] + G\frac{l}{2}\left[\cos(45^\circ+\theta) - \frac{\sqrt2}{2}\right] =$$

$$= -Gl\left[\frac{\sqrt2}{2} - \cos(45^\circ+\theta)\right]$$

iar energia potențială:

$E_p = -L = Gl\left[\frac{\sqrt2}{2} - \cos(45+\theta)\right]$; $E_c = \frac{I_A\dot\theta^2}{2} = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\dot\theta^2}{2}$;

$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial\dot\theta} = \frac{2G}{3g}l^2\ddot\theta$; $\frac{\partial E_c}{\partial\theta} = 0$; $\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = G\frac{l\sqrt2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$

Ecuația lui Lagrange

$\frac{2G}{3g}l^2\ddot\theta = -Gl\frac{\sqrt2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$. Deoarece θ este mic:

$\sin\theta \cong \theta$; $\cos\theta \cong 1$; $\ddot\theta + \frac{3g\sqrt2}{4l}(\theta+1) = 0$ punînd $\theta+1=\alpha$ obținem:

$\alpha'' + \frac{3g\sqrt2}{4l}\alpha = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sqrt2}{4l}}$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{3g\sqrt2}}$

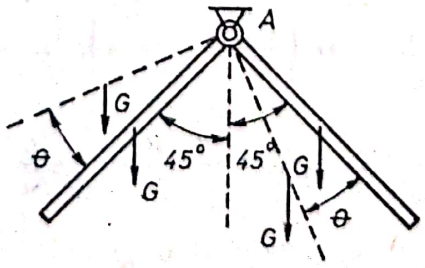


Fig. XIV.4

La pendul compus : $l_0 = \dfrac{I_A}{\dfrac{2G}{g} y_G} = \dfrac{\dfrac{2G}{g}\dfrac{l^2}{3}}{\dfrac{2G}{g}\dfrac{l}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{4l}{3\sqrt{2}}$

$T_{sec} = 2\pi\sqrt{\dfrac{4l}{3g\sqrt{2}}}$.

5. În rotirea în jurul articulațiilor, sistemul parcurge $\measuredangle\theta$. Lucrul mecanic este :

$L = 2G\dfrac{l}{2}(1 - \cos\theta) - Gl(1 - \cos\theta) = -2Gl(1 - \cos\theta) = -E_p$

$\dfrac{\partial E_p}{\partial\theta} = 2Gl\sin\theta$; $E_c = 2I_A\dfrac{\omega^2}{2} + m\dfrac{v^2}{2}$; $I_A = \dfrac{G}{g}\dfrac{l^2}{3}$; $\omega = \dot\theta = \dfrac{v}{l}$

$E_c = \dfrac{5}{6}\dfrac{G}{g}l^2\dot\theta^2$; $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_c}{\partial\dot\theta} = \dfrac{5}{3}\dfrac{G}{g}l^2\ddot\theta$; $\dfrac{\partial E_c}{\partial\theta} = 0$

Ecuația lui Lagrange : $\dfrac{5}{3}\dfrac{G}{g}l^2\ddot\theta = -2Gl\sin\theta$. Pentru θ mic : $\sin\theta \cong \theta$

deci $\ddot\theta + \dfrac{6}{5}\dfrac{g}{l}\theta = 0$; $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\dfrac{5}{6}\dfrac{l}{g}}$.

6. Din poziția AB vertical la AB având θ cu verticala lucrul mecanic este

$$L = 2G\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) + Gl(1 - \cos\theta) = 2I_A\frac{\dot\theta^2}{2} + \frac{G}{g}\frac{l^2\dot\theta^2}{2}$$

unde $I_A = \dfrac{G}{g}\dfrac{l^2}{3}$. Deci $2Gl(1 - \cos\theta) = \dfrac{5}{6}\dfrac{G}{g}l^2\dot\theta^2$ (1)

pentru $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; $\dot\theta^2 = \omega^2 = \dfrac{12}{5}\dfrac{g}{l}$. Derivînd ecuația (1) avem $\ddot\theta =$

$$= \varepsilon = \frac{6}{5}\frac{g}{l}.$$

Prin *ecuația lui Lagrange :*

$E_p = -L = -2Gl(1 - \cos\theta)$; $\dfrac{\partial E_p}{\partial\theta} = -2Gl\sin\theta$;

$E_c = \dfrac{5}{6}\dfrac{G}{g}l^2\dot\theta^2$; $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E_c}{\partial\dot\theta} = \dfrac{5}{3g}Gl^2\ddot\theta$; $\dfrac{\partial E_c}{\partial\theta} = 0$.

Deci $\ddot\theta = \dfrac{6g\sin\theta}{5l}$ pentru $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \ddot\theta = \dfrac{6}{5}\dfrac{g}{l}$.

7. În cădere de la poziția inițială la cea din poziția punctată în figura XIV.7, lucrul mecanic este $L = 2Gl\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos\alpha\right)$; $E_p = -2Gl\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos\alpha\right)$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\alpha} = -2Gl\sin\alpha\ ;\quad E_c = \frac{2G}{g}\frac{l^2}{3}\frac{\dot\alpha^2}{2} + \frac{G}{g}\frac{l^2\dot\alpha^2}{2} = \frac{5G}{g}\frac{l^2\dot\alpha^2}{6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial\dot\alpha} = \frac{5}{3}\frac{G}{g}l^2\ddot\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

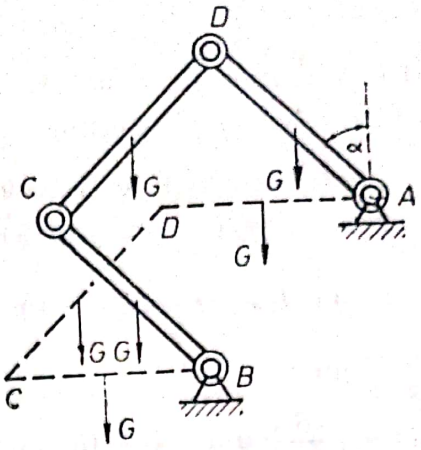


Fig. XIV.7

Ecuația lui Lagrange rezultă : $\frac{5}{3}\,\frac{G}{g}\,l^2\ddot{\alpha} - 2Gl\,\sin\,\alpha = 0$

de unde $\ddot{\alpha} = \frac{6}{5}\,\frac{g}{l}\sin\,\alpha$. Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (cazul barelor AD și BC orizontale) obținem $\ddot{\alpha} = \frac{6}{5}\,\frac{g}{l}$.

8. a) *Lucrul mecanic* după ce a coborît cu θ (fig. XIV.8, *a*) : $L = G\,\frac{l}{2}\sin\,\theta +$

$+ Gl\,\sin\,\theta + G\,\frac{l}{2}\sin\,\theta = 2Gl\,\sin\,\theta.$

Energia potențială : $E_p = -L = -2Gl\sin\,\theta\,;\ \frac{\partial E_p}{\partial\theta} = -2Gl\cos\,\theta.$

Energia cinetică (bara verticală în translație) :

$$E_c = \frac{2G}{3}\,\frac{l^2}{2}\,\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{G}{g}\,l^2\,\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{5}{6}\,\frac{G}{g}\,l^2\dot{\theta}^2\,;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}} = \frac{5G}{3g}\,l^2\ddot{\theta}$$

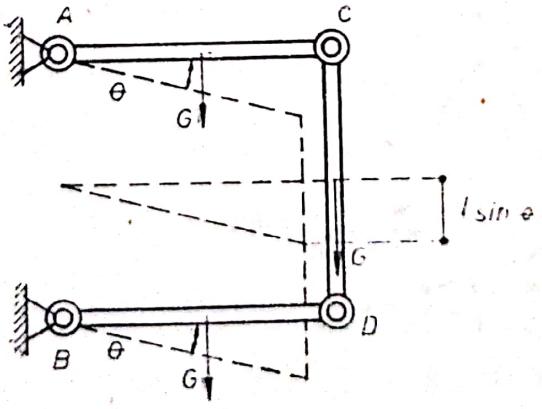


Fig. XIV.8, *a*

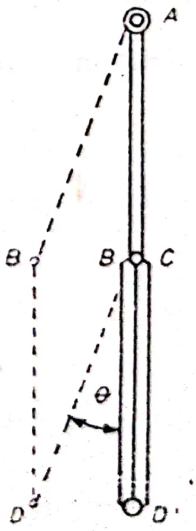


Fig. XIV.8, *b*

de unde $\ddot{\theta} = \frac{6}{5}\frac{g}{l}\cos\theta = \varepsilon$; $\dot{\theta}^2 = \frac{12}{5}\frac{g}{l}\sin\theta$ (din legea lucrului mecanic);

$\dot{\theta}^2 = 0$ la $\theta = 0$ și $\theta = \pi$ (poziția punctată din figură). Iar $\dot{\theta}^2 = \max$ la $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\dot{\theta}^2 = \frac{12g}{5l}$ în poziția de echilibru static.

b) Poziția de echilibru static este dată de figura XIV.8, *b*. Pentru o mică deplasare θ avem $L = -2G\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta\right) - G\left(\frac{3l}{2} - \frac{l}{2} - l\cos\theta\right)$;

$L = -\frac{3}{2}Gl(1 - \cos\theta)$; $E_p = \frac{3G}{2}l\,(1 - \cos\theta)$; $\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = \frac{3}{2}Gl\sin\theta$;

$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}} = \frac{5G}{3g}l^2\ddot{\theta}$ de unde:

Ecuația lui Lagrange: $\frac{5G}{3g}l^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}Gl\sin\theta$ sau la θ mic $\sin\theta = \theta$; $\ddot{\theta} + \frac{9g}{10l}\theta = 0$; $T_{sec} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{10l}{g}}$.

9. Fie s deplasarea centrului de greutate al sferei în timpul t și x deplasarea corpului triunghiular spre stînga în același timp (fig. XIV.9):

$$s_{abs} = s\cos\alpha - x. \tag{1}$$

Din legea mișcării centrului de greutate:

$$m(s\cos\alpha - x) = Mx \text{ sau}$$

$$x = \frac{m}{M+m}s\cos\alpha. \tag{2}$$

Momentul de inerție al sferei în raport cu centrul: $I_0 = \frac{2}{5}mR^2$.

Energia cinetică: $E_c = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$ dar $\omega^2 = \frac{\dot{s}^2}{R^2}$;

$$v_x = \dot{s}\cos\alpha - \dot{x}\,;\ v_y = \dot{s}\sin\alpha\,;\ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 - 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha$$

de unde $E_c = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{7}{5}\frac{m\dot{s}^2}{2} - m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha$.

Lucrul mecanic: $L = mg\sin\alpha s = -E_p$; $\frac{\partial E_p}{\partial s} = -mg\sin\alpha$; $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$.

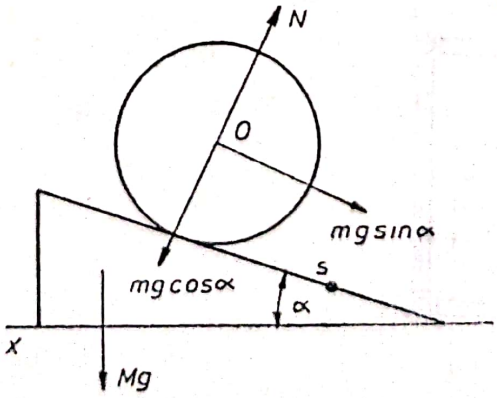


Fig. XIV.9

Ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_c}{\partial x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow (M+m)\ddot{x} - m\ddot{s}\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial E_c}{\partial s} = -\frac{\partial E_p}{\partial s} \Rightarrow \frac{7}{5}m\ddot{s} - m\ddot{x}\cos\alpha = mg\sin\alpha \qquad (4)$$

Înlocuind din ecuația (2) $\ddot{x} = \frac{m}{M+m}\ddot{s}\cos\alpha$ avem :

$$\ddot{s}\left(\frac{7}{5} - \frac{m}{M+m}\cos^2\alpha\right) = g\sin\alpha \text{ sau } \frac{7}{5}s - \frac{m}{M+m}s\cos^2\alpha = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha$$

Înlocuind iarăși din ecuația (2) : $\frac{7}{5}s - x\cos\alpha = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha$.

10. Analog cu problema 9 : $s_{abs} = s\cos\alpha - x$ unde

$x = \frac{m}{M+m}s\cos\alpha$; $E_c = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$ iar $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 - 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha$

$$E_c = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{s}^2 - m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha \; ; \; E_p = -mg\sin\alpha s$$

Ecuațiile lui Lagrange :

$(M+m)\ddot{x} - m\ddot{s}\cos\alpha = 0$ și $m\ddot{s} - m\ddot{x}\cos\alpha = mg\sin\alpha$ sau

$s - \frac{m}{M+m}\cos^2\alpha = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha$, de unde $s - x\cos\alpha = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha$.

11. $E_c = \frac{m}{2}(R+r)\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{5}r^2\dot{\theta}^2$, dar $r\dot{\theta} = (R+r)\dot{\varphi}$ (rostogolire fără lunecare)

deci $E_c = \frac{m}{2}(R+r)^2\frac{7}{5}\dot{\varphi}^2$; $\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = 0$.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = m(R+r)^2\frac{7}{5}\ddot{\varphi}$; $L = mg(R+r)(1-\cos\varphi) = -E_p$

$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = -mg(R+r)\sin\varphi$.

Ecuația lui Lagrange :

$\ddot{\varphi} = \frac{5g}{7(R+r)}\sin\varphi$ este ecuația mișcării.

Forța de frecare : $F_f = mg\sin\varphi - \frac{G}{g}r\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi\,\frac{7R+2r}{7(R+r)}$

12. $L = -mg(R-r)(1-\cos\theta) = -E_p$; $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mg(R-r)\sin\theta$

$E_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}m\frac{r^2\omega^2}{2} = \frac{7}{5}\frac{mv^2}{2}$ dar $v = (R-r)\dot{\theta}$.

$E_c = \frac{7}{5}\frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\theta}$.

Ecuația lui Lagrange : $\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\theta} = -mg(R-r)\sin\theta$ pentru θ mic :

$\sin\theta \approx 0$ deci $\ddot{\theta} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\theta = 0$ $T_{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$ mișcare oscilatorie în jurul poziției de echilibru static.

Scanned with OKEN Scanner

13. $x = R \sin \varphi \sin \theta$; $\dot{x} = R \sin \varphi \cos \theta \dot{\theta} + R \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}$;

$y = R \sin \varphi \cos \theta$; $\dot{y} = R \cos \theta \cos \varphi \dot{\varphi} - R \sin \varphi \sin \theta \dot{\theta}$;

$z = R \cos \varphi$; $\dot{z} = -R \sin \varphi \dot{\varphi}$;

$E_c = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\theta}^2)$; $E_p = mgR \cos \varphi$.

$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = 0$ (căci $\dot{\theta} = \text{const}$) ; $\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$; $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$ (nu există ecuație în θ).

$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \dot{\varphi}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \ddot{\varphi}$; $\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = mR^2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi$;

$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mg R \sin \varphi$.

Ecuația lui Lagrange în φ este :

$mR^2 \ddot{\varphi} - mR^2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi = mg R \sin \varphi$ sau

$R\ddot{\varphi} - R\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = g \sin \varphi$ de unde pentru $\varphi = 60°$ $\ddot{\varphi} = 11 \sqrt{3}\ \text{rad/s}^2$

14. Avem $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$; $\varphi = \omega t$. Poziția lui m este dată de $x = R \cos \varphi + R \cos (\theta + \varphi)$; $y = R \sin \varphi + R \sin (\theta + \varphi)$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$.

$E_c = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} [R^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + 2R^2 \dot{\varphi} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cos \theta]$

$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = 0$ (căci $\dot{\varphi} = \text{const}$) ; $\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = 0$; $E_p = 0$;

$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi} + \varphi \cos \theta)$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 (\ddot{\theta} - \varphi \sin \theta \dot{\theta})$;

$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = -mR^2 \dot{\varphi} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \sin \theta$.

Ecuația lui Lagrange devine :

$mR^2 [\ddot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\theta} + \dot{\varphi} (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \sin \theta] = 0$

de unde punînd $\dot{\varphi} = \omega$ avem $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$, iar $\sin \theta \approx \theta$, mișcarea inelului este o mișcare oscilatorie în jurul diametrului AOB.

Capitolul XV

LINII ECHIPOTENȚIALE. POTENȚIAL. FORȚE DE ATRACȚIE. MIȘCĂRI PE ORBITE

1. Liniile echipotențiale sînt date de $U = \text{const}$, deci

$$4x = \text{const} = K.$$

Pentru diverse valori ale lui K($K = 1$, $K = 2$ etc.) avem o familie de drepte paralele cu Oy, $x = \frac{K}{4}$, echidistante între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Liniile de forță fiind perpendiculare pe acestea sînt drepte paralele cu Ox (fig. XV.1).

În orice punct, forța e dată de componentele : $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$; $Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$.

Aci $X = 4$; $Y = 0$ deci $F = -4$ în orice punct și este orizontal.

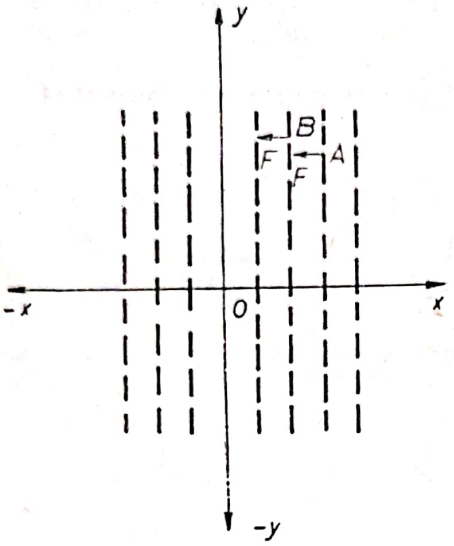


Fig. XV.1

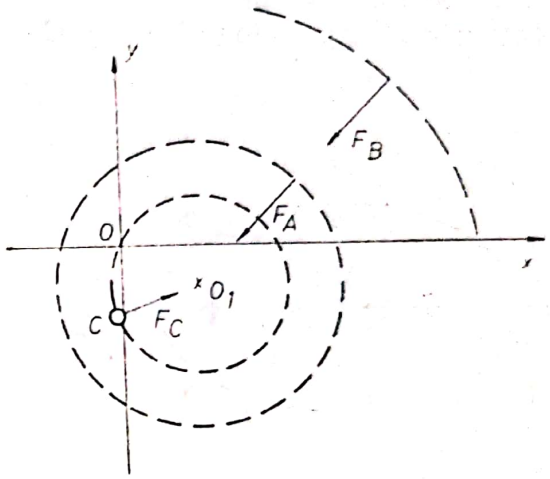


Fig. XV.2

2. Liniile echipotențiale date de $U = \text{const}$. Ecuația poate fi scrisă $U = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$ deci liniile echipotențiale sînt date de $(x-2)^2+(y+1)^2 = K$.

Analog pentru diverși K avem cercuri cu centrul în $O_1(2, -1)$ și raze $\sqrt{K}$; $\sqrt{2}\sqrt{K}$; $\sqrt{3}\sqrt{K}$ deci cercuri concentrice care se îndesesc cu cît K crește (fig. XV.2).

Liniile de forță sînt razele acestor cercuri :

Forțele : $Y = -\frac{\partial U}{\partial x} = -2x + 4$; $Y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -2y - 2$

Punctul A (5, 3) este pe cercul $(5 - 2)^2 + (3 + 1)^2 = 25$ deci $K = 25$; raza $\sqrt{K} = 5$.

Punctul B este pe cercul $(8 - 2)^2 + (7 + 1)^2 = 100$.

Deci raza $\sqrt{K} = 10$.

Punctul C va fi pe cercul de rază $\sqrt{13} \approx 3{,}6$.

Avem : $X_A = -6$; $Y_A = -8$; $F_A = 10$;

$X_B = -12$; $Y_B = -16$; $F_B = 20$;

$X_C = 6$; $Y_C = 4$; $F_C = \sqrt{52} \approx 7{,}1$.

Lucrul mecanic de la B la A este $U_B - U_A = 100 - 25 = 75$.

3. *Liniile echipotențiale* (fig. XV.3) sînt elipsele $\frac{x^2}{4K} + \frac{y^2}{K} = 1$. Ele se îndesesc cu cît K crește.

$X = -\frac{x}{2}$; $Y = -2y$. *În A* avem $K = 1$, deci elipsa are semiaxele $a = 2$; $b = 1$ și forța e dată de $X_A = 0$; $Y_A = -2$; $F_A = -2$.

Scanned with OKEN Scanner

În B : $K = 25$ şi $a = 10$; $b = 5$; $X_B = -3$; $Y_B = -8$; $F_B = \sqrt{73} \cong$ $\cong 8{,}5$.

Liniile de forţă le avem din cele echipotenţiale unde în loc de y' avem $-\frac{1}{y'}$.

Din $\frac{x^2}{4} + y^2 - K = 0$ avem $x + 4yy' = 0$ deci $x - \frac{4y}{y'} = 0$ de unde $xy' = 4y$ sau $dy = 4\,dx$.

Integrînd $\log y = \log x^4 + \log C$ sau $y = Cx^4$ este ecuaţia liniilor de forţă.

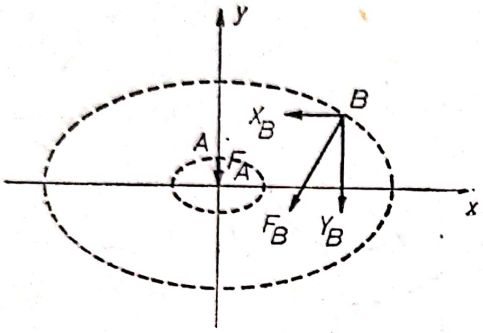


Fig. XV.3

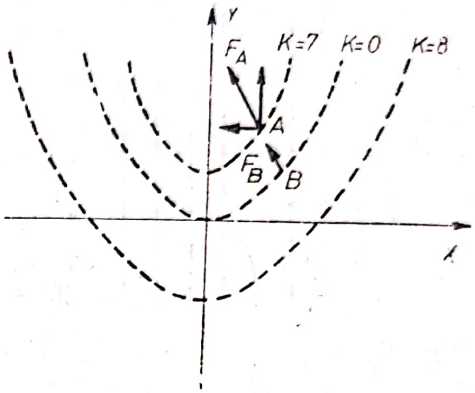


Fig. XV.4

4. Liniile echipotenţiale sînt parabole care se îndesesc pentru K în creştere (fig. XV.4) : pentru A (1, 2) $K = -7$; Pentru B (2, 1) $K = 0$. Avem $X = -2x$; $Y = 4$. Deci $X_A = -2$; $Y_A = 4$; $F_A = \sqrt{20} \approx 4{,}5$

$X_B = -4$; $Y_B = 4$; $F_B = \sqrt{32} \approx 5{,}6$.

Pentru *liniile de forţă*, analog ca mai sus avem $y' = \frac{x}{2}$, deci $-\frac{1}{y'} = \frac{2}{x}$ sau $x\frac{dy}{dx} = -2$. Integrînd avem $x^2e^y = C$ ecuaţia liniilor de forţă.

5. $F_1 = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{16R^2}\gamma = \frac{\pi R\gamma}{12}$ (fig. XV.5). Proiecţii pe Ox în A : $\left(\cos\alpha = \frac{4}{5}; \sin\alpha = \right.$ $\left. = \frac{3}{5}\right)$

$F_1\ \frac{4}{5} = \frac{3F_2}{5} \Rightarrow F_2 = \frac{\pi R\gamma}{9} = \frac{4}{3}\frac{\pi x^3\gamma}{9R^2}$. Se deduce $x = \sqrt[3]{0{,}75}R \approx 0{,}9R$

$F = F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha = \frac{5}{3}F_1 = \frac{5\pi\gamma}{36}R$.

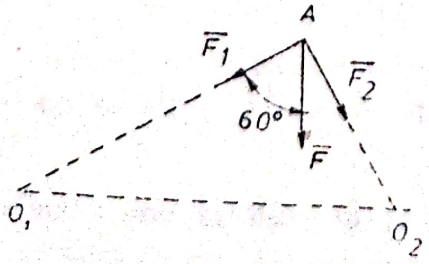


Fig. XV.5

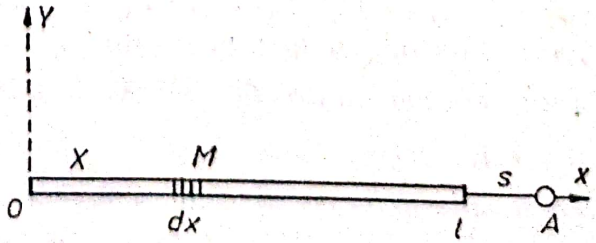


Fig. XV.6

Scanned with OKEN Scanner

6. Fie $\gamma = \frac{m}{l}$ masa unitară (fig. XV.6). Avem potențialul P: $P = \int_0^l \frac{\gamma dx}{\rho}$ unde γdx este masa elementului M de lungime dx, iar

$$\rho = MA = l + s - x, \text{ unde } x = 0M.$$

Vom căpăta $P = -\gamma \left| \log(1l + s - x) \right|_0^l = \gamma \log \frac{l+s}{s} = \frac{m}{l} \log \frac{l+s}{s}$.

Forța atractivă este $F = \frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\gamma l}{s(l+s)} = \frac{m}{s(l+s)}$ sau prin integrare directă:

$$F = -\int \frac{dm}{\rho^2} = -\int_0^l \frac{\gamma dx}{(l+s-x)^2} = -\frac{\gamma l}{s(l+s)} = -\frac{m}{s(l+s)}.$$

7. Aci $\rho = \sqrt{r^2 + s^2}$ și $dm = \gamma\, 2\pi r\, dr$ (fig. XV.7).

Deci $P = \int \frac{dm}{\rho} = \int_0^R \frac{\gamma 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2+s^2}}$, de unde $P = 2\pi\gamma \left| \sqrt{s^2 + r^2} \right|_0^R$.

Punînd $m = \pi\gamma R^2$ se obține $P = \frac{2m}{R^2} \left[\sqrt{s^2 + R^2} - s\right]$, iar $F = \frac{\partial P}{\partial s} =$

$$= -\frac{2m}{R^2} \left[\frac{s}{\sqrt{s^2+R^2}} - 1\right].$$

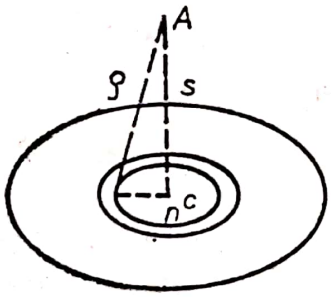


Fig. XV.7

8. Avem forța de atracție la suprafața unui astru (care deci este greutatea sa): $f = m \frac{KM}{R^2}$.

În cazul Lunei: $f = m \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}07345 \cdot 10^{24}}{(1\,738 \cdot 10^3)^2}$.

Găsim $f = m \cdot 1{,}62$, deci g (pe lună) $= 1{,}62$.

În cazul lui Marte: $f = \frac{m \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}643 \cdot 10^{24}}{3\,407^2 \cdot 10^6}$.

Găsim $f = m \cdot 3{,}66$, deci g (pe Marte) $= 3{,}66$.

9. Din $f = K \frac{mM}{\rho^2}$ avem $g_\rho = \frac{KM}{\rho^2}$ și $g = \frac{KM}{R^2}$, deci $g_\rho = g \frac{R^2}{\rho^2}$

sau $g_\rho = \frac{g}{4} = \frac{9{,}80}{4} = 2{,}45$ m/s².

Scanned with OKEN Scanner

10. Lucrul mecanic pentru ridicarea unei mase m cu $\Delta\rho$ este $\Delta L = -mg\Delta\rho$ unde $g_\rho = g\ \frac{R^2}{\rho^2}$. Deci $\frac{\Delta L}{\Delta\rho} = -mg\ \frac{R^2}{\rho^2}$ sau presupunînd că ridicarea se face între ρ_1 și ρ_2 avem :

$$L = \left| mg\frac{R^2}{\rho}\right|_{\rho}^{\rho_1} = mg\ R^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right)$$

ρ și ρ_1 fiind distanțele de la centrul astrului respectiv, deci $\rho_1 = \infty$ și $L = -mg\ \frac{R^2}{\rho} = -\frac{1}{2}\ mv_e^2$ (v_e fiind viteza cu care trebuie lansat mobilul ca să nu se mai întoarcă, viteza la infinit fiind presupusă nulă).

Înlocuind $g = \frac{KM}{R^2}$, avem $v_e^2 = \frac{2\,KM}{\rho}$.

Pentru lansări de pe suprafața astrelor ρ este raza lor.

Pentru Pămînt : $\rho = R = 6\,370\cdot10^3$ m, $M = 5{,}9\cdot10^{24}$

$$v_e^2 = \frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}5{,}9\cdot10^{24}}{6\,370\cdot10^3} \Rightarrow v_e = 11{,}18 \text{ km/s.}$$

Pentru Lună : $\rho = 1\,738\cdot10^3$ m, $M = 0{,}07345\cdot10^{24}$; avem :

$$v_e^2 = \frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot0{,}07345\cdot10^{24}}{1\,738\cdot10^3} \Rightarrow v_e = 2{,}374 \text{ km/s.}$$

Pentru Marte : $\rho = 3\,407\cdot10^3$ m, $M = 0{,}613 \Rightarrow v_e = 5{,}017$km/s.

11. Din problema (9) avem $g_\rho = \frac{gR^2}{\rho^2}$ și $g = \frac{KM}{R^2}$ deci accelerația centripetă de pe orbita circulară este g_ρ :

$$g_\rho = \frac{v_0^2}{\rho} = \frac{KM}{\rho}$$

Pentru Pămînt : $\rho = 2R$; $v_0^2 = \frac{KM}{2R} \Rightarrow v_0 = 5{,}6$ km/s.

Se vede că

$v_0^2 = \frac{v_e^2}{2}$ (v_e la același $\rho = 2R$ este $v_e \approx 7{,}98$).

deci $v_0 = \sqrt{31{,}84} \approx 5{,}6$ km/s.

Pentru Lună : $v_0^2 = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot0{,}07345\cdot10^{24}}{2\cdot1\,738} \Rightarrow v_0 \approx 1{,}19$ km/s.

Pentru Marte : $v_0^2 = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot0{,}613\cdot10^{24}}{2\cdot3\,407\cdot10^3} \Rightarrow v_0 \approx 2{,}5$ km/s.

12. *La perigeu P* (fig. XV.12), viteza areolară este

$$\frac{\Delta A_P}{\Delta t} = \frac{\Delta s\cdot\rho_P}{2}\ \frac{1}{\Delta t} = \frac{\rho_P}{2}\ v_p$$

La apogeu A : $\frac{\Delta A_A}{\Delta t} = \frac{\rho_A}{2}\ v_A$

Vitezele areolare fiind egale avem :

$$\rho_P v_P = \rho_A v_A \qquad (1)$$

(ρ_P și ρ_A fiind distanțele de la P, respectiv A, la centrul Pămîntului).

Scanned with OKEN Scanner

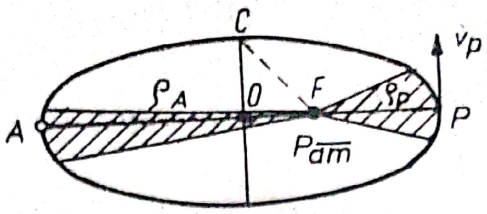


Fig. XV.12

Din legea lucrului mecanic (problema 9) avem :

$$L = mg\,R^2\left(\frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_P}\right) = mKM\left(\frac{1}{\rho_P} - \frac{1}{\rho_A}\right) = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_P^2}{2}$$

de unde :

$$(2)\quad v_A^2 - v_P^2 = 2KM\left(\frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_P}\right)$$

Din relaţiile (1) şi (2) se deduce :

$$v_P^2 = \frac{2KM}{\rho_P + \rho_A}\,\frac{\rho_A}{\rho_P};\quad v_A^2 = \frac{2KM}{\rho_P + \rho_A}\,\frac{\rho_P}{\rho_A}.$$

Avînd viteză circulară v_0 (problema 11) corespunzătoare perigeului $v_0^2 = \frac{KM}{\rho_P}$ obţinem :

$v_P^2 = \frac{2\rho_A}{\rho_P + \rho_A}\,v_0^2$ sau cu $\lambda = \frac{\rho_A}{\rho_P}$ avem $v_P^2 = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\,v_o^2$.

Notînd $x = \frac{v_P}{v_0}$ avem $\lambda = \frac{x^2}{1-x^2}$ relaţia care dă apogeul atins de un satelit pentru un perigeu şi o viteză de intrare pe orbită date.

Pentru problema de faţă $\rho_P = 2R = 12\,740$ km şi $v_P = 6$ km/s deci $x = \frac{v_P}{v_0} = \frac{6}{5{,}6} = 1{,}07$ (s-a văzut la problema 11), că viteza circulară la $\varphi = 2R$ este $v_0 = 5{,}6$ km/s. Deci $\lambda = \frac{x^2}{2-x^2} = 1{,}32$ de unde $\rho_A = 1{,}32 \cdot 2R = 2{,}64R \approx 16\,816$ km de la centrul Pămîntului sau $1{,}64\,R = 10\,446$ km altitudine deasupra Pămîntului. Forma elipsei, ţinînd seama de proprietăţile ei va fi cea din figură unde $FP = \rho_P = 12\,740$ km ; $OP = FC = 14\,778$ km ; $OF \approx 2\,040$ km ; $OC = 14\,736$ km (F este focarul elipsei, unde este amplasat Pămîntul).

13. Conform legii lui Kepler, T depinde numai de axa mare a elipsei, deci e independent de forma elipsei şi are aceeaşi valoare ca pentru un cerc de rază ρ. Deci într-o rotaţie circulară $T = \frac{2}{v_0}$ sau (din problema (11) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{KM}}\,\rho^{\frac{3}{2}}$ sau $T^2 = \frac{4\pi^2}{KM}\,a^3$. În cazul problemei de faţă vom avea

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 8440^3 \cdot 10^9}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow T \approx 7\,740 \text{ s} = 2 \text{ h } 9 \text{ min}$$

Scanned with OKEN Scanner

14. S-a văzut în problema 11 că: $v_0^2 = \frac{KM}{\rho_P}$. Aci:

$\rho_P = R + 130 = 6\,500$ km $= 6500 \cdot 10^3$ m; $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$, $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$

Deci $v_0 = 7{,}827$ km/s.

Din legea lui Kepler $T^2 = \frac{4\pi^2}{KM} a^3$, unde $T = 5\,400$ s avem $a = 665 \cdot 10^4$ m $=$ $= 6\,650$ km.

$2a = 13\,300$ km $= 6\,500 + \rho_A \Rightarrow \rho_A = 6\,800$ km și deci altitudinea la apogeu $h_A = \rho_A - R = 430$ km.

Avem (problema 12) $v_P^2 = \frac{2\rho_A}{\rho_A + \rho_P} v_0^2 = 62{,}5 \Rightarrow v_P = 7{,}912$ km/s.

Din $\rho_A v_A = \rho_P v_P$ (problema 12) avem $v_A = 7{,}51$ km/s.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Geiger, J. *Mechanische Schwingungen.* Ed. J. Springer, Berlin, 1927
2. Ioachimescu, A. *Mecanica rațională.* Ed. Monitorul Oficial, București, 1947.
3. Jeans, J. *Theoretical Mechanics.* Ed. Gimm and Co., Boston, 1907.
4. Kaufmann, W. *Mechanik starrer Körper.* Ed. Helwing, Hannover, 1927.
5. Mc. Gregor, J. *Treatise on Kinematics and Dynamics.* Ed. MacMillan, London, 1909.
6. Osgood, W. *Mechanics.* Ed. MacMillan, New York, 1937.
7. Pöschl, Th. *Technische Mechanik.* Ed. J. Springer, Berlin, 1930.
8. Smith, P. și Longley, W. *Mécanique Rationnelle.* Ed. Vuibert, Paris, 1941.
9. Timoschenko, S. și Young, D. N. *Engineering Mechanics.* Ed. Mc Graw Hill, New York, 1956.
10. Țițeica, G. *Teorie și probleme de statică* (litografiat). Ed. Inst. Politehnic, București, 1972.
11. Țițeica, G. *Teorie și probleme de Dinamică* (litografiat). Ed. Inst. Politehnic, București, 1972.
12. Țițeica, G. și Stoenescu, Al. *Probleme de calcul vectorial* (litografiat). Ed. I. Gorjanu, București, 1946
13. Țițeica, G. și Stoenescu, Al. *Teoria Giroscopului.* Ed. tehnică, București, 1961.
14. Vîlcovici, V. ș.a. *Mecanica teoretică.* Ed. tehnică, București, 1968.
15. Voinea, R. ș.a. *Mecanica.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1975.
16. Wittenbauer, F. *Aufgaben aus der technischen Mechanik.* Ed. J. Springer, Berlin, 1922.

Scanned with OKEN Scanner

ERATA

Pag.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:
47	Fig. VI. 6, *d*	—	Bara AC este spre stînga
75	1 de jos	ε	ξ
240	Fig. VIII. 4, *a'*	—	Punctul O este la intersecția forțelor
249	7	$\Sigma M_B = O$	$\Sigma M_A = O$
265	Fig. XI. 8	—	a doua forță verticală este $\frac{G}{4}$
316	Fig. V. 4	A	B
340	9	$T = 3\ G = -\frac{3G}{g}a = \ldots$	$T = 3\ G - 3\frac{G}{g}a = \ldots$
	4 de jos	$\mu\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ldots$	$\mu = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ldots$
395	8	$x = \frac{4}{3} \ldots$	$x = \frac{3}{4} \ldots$
419	3 de jos	$T = \frac{2}{v_0}$	$T = \frac{2\pi\rho}{v_0}$

Probleme de mecanică

Coli de tipar 26,500. B.T. 18.03.1977.
Format 16/70×100, hîrtie scris I A.
70×100/49. Tiraj 12 000+90 leg. 1/1.
Apărut 1977.

I. P. „Oltenia" Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România
Plan 5 452/277/1976.

Scanned with OKEN Scanner